2022학년도 임용고사 <확률과 통계> 기출문제

2022학년도 A형 4번

두 확률변수 X와 Y의 결합확률질량함수(joint probability mass function)가 다음과 같다.

$X \backslash Y$	1	2	3	4
0	p	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{8}$
1	0	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{24}$
2	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{12}$	q

X의 기댓값이 $\mathrm{E}(X)=\frac{11}{12}$일 때, $p\times\frac{1}{q}$의 값과 조건부확률 $\mathrm{P}(X+Y\le 4 \mid Y-X=2)$의 값을 순서대로 쓰시오. [2점]

[모범답안]

이산확률변수 X가 갖는 값에 대한 확률의 합은 1이므로

$$p+\frac{1}{24}+\frac{1}{12}+\cdots+\frac{1}{12}+q=1,\ p+q=\frac{5}{24}$$

이다. 그리고 기댓값이 $\mathrm{E}(X)=\frac{11}{12}$이므로

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(X)&=0\times\left(p+\frac{1}{24}+\frac{1}{12}+\frac{1}{8}\right)+1\times\left(0+\frac{1}{12}+\frac{1}{8}+\frac{1}{24}\right)+2\times\left(\frac{1}{12}+\frac{1}{8}+\frac{1}{12}+q\right)\\&=\frac{6}{24}+\frac{14}{24}+2q=\frac{11}{12},\end{aligned}$$

즉, $q=\frac{1}{24}$이다. 따라서 연립방정식 $\begin{cases}p+q=\frac{5}{24}\\ q=\frac{1}{24}\end{cases}$ 을 풀면 $p=\frac{4}{24}$, $q=\frac{1}{24}$이므로

$p\times\frac{1}{q}=\frac{4}{24}\times 24=4$이다. 또한, 조건부확률 $\mathrm{P}(X+Y\le 4 \mid Y-X=2)$는

$$\mathrm{P}(X+Y\le 4 \mid Y-X=2)=\frac{\mathrm{P}(X+Y\le 4,\ Y-X=2)}{\mathrm{P}(Y-X=2)}$$

이다. $\mathrm{P}(Y-X=2)$는 $(X,\ Y)$가 $(0,\ 2)$ 또는 $(1,\ 3)$ 또는 $(2,\ 4)$인 확률이고
$\mathrm{P}(X+Y\le 4,\ Y-X=2)$는 $(X,\ Y)$가 $(0,\ 2)$ 또는 $(1,\ 3)$인 확률이므로

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(X+Y\le 4 \mid Y-X=2)&=\frac{\mathrm{P}(X+Y\le 4,\ Y-X=2)}{\mathrm{P}(Y-X=2)}\\&=\frac{\frac{1}{24}+\frac{1}{8}}{\frac{1}{24}+\frac{1}{8}+\frac{1}{24}}=\frac{4}{5}\end{aligned}$$

이다.

2022~2023 임용고사 <확률과 통계> 파트
기출문제 풀이

2022학년도 B형 7번

확률변수 X의 적률생성함수(moment generating function) $M_X(t)$가

$$M_X(t)=\frac{1}{(1-2t)^4}\ \left(t<\frac{1}{2}\right)$$

이다. 확률변수 X의 분산을 풀이 과정과 함께 쓰시오.

또한, X_1, X_2, $\cdots$, X_{100}이 적률생성함수가 $M_X(t)$인 분포로부터 뽑힌 확률표본일 때, 이들의 평균 $\overline{X}=\frac{1}{100}\sum_{i=1}^{100}X_i$에 대하여 $\overline{X}$가 9 이상이 될 확률은 중심극한정리(central limit theorem)를 적용하면 근사적으로 $\mathrm{P}(Z\geq c)$이다. 상수 c의 값을 풀이 과정과 함께 쓰시오. (단, Z는 표준정규분포를 따르는 확률변수이다.) [4점]

[모범답안]

적률생성함수 $M_X(t)$를 변수 t에 관하여 미분하면

$$M_X{}'(t)=\frac{dM_X(t)}{dt}=-4(1-2t)^{-5}\times(-2)=8(1-2t)^{-5}$$

이고 양변에 $t=0$을 대입하면 기댓값 $\mathrm{E}(X)$는

$$\mathrm{E}(X)=M_X{}'(0)=8(1-0)^{-5}=8$$

이다. 그리고 적률생성함수 $M_X(t)$의 도함수를 변수 t에 관하여 미분하면

$$M_X{}''(t)=\frac{dM_X{}'(t)}{dt}=8\times(-5)(1-2t)^{-6}\times(-2)=80(1-2t)^{-6}$$

이고 양변에 $t=0$을 대입하면

$$M_X{}''(0)=80(1-0)^{-6}=80$$

이다. 따라서 $M_X{}''(0)-\{M_X{}'(0)\}^2=\mathrm{Var}(X)$에 의하여 분산 $\mathrm{Var}(X)$은

$$\mathrm{Var}(X)=80-8^2=16$$

이다. 또한 확률변수 X의 평균과 분산이 각각

$$\mathrm{E}(X)=8,\ \sigma(X)=4$$

이고, 표본 100개의 평균 $\overline{X}=\frac{1}{100}\sum_{i=1}^{100}X_i$은 중심극한정리에 의하여 근사적으로

$$\overline{X}\sim \mathrm{N}\left(8,\ \frac{4^2}{100}\right)=\mathrm{N}(8,\ 0.4^2)$$

를 따른다. 그리고 표본평균 $\overline{X}$에 대한 표준화변수 $Z=\frac{\overline{X}-8}{0.4}$는 표준정규분포 $Z\sim\mathrm{N}(0,\ 1)$를 따른다. 따라서 구하는 확률은

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(\overline{X}\geq 9)&=\mathrm{P}\left(\frac{\overline{X}-8}{0.4}\geq\frac{9-8}{0.4}\right)\\&=\mathrm{P}(Z\geq 2.5)\end{aligned}$$

이므로 $x=2.5$이다.

2023학년도 임용고사 <확률과 통계> 기출문제

2023학년도 A형 4번

어떤 정책에 대한 A, B 두 도시 시민의 의견을 알아보기 위하여 각 도시에서 확률표본을 선택하여 이 정책에 대한 찬성 여부를 알아본 결과는 다음과 같다.

	A도시	B도시
표본의 수	350명	160명
정책에 찬성한 비율	0.7	0.8

A, B 두 도시의 이 정책에 대한 찬성 비율을 각각 p_1, p_2라 할 때, 찬성 비율의 평균 $\frac{p_1+p_2}{2}$에 대한 90% 신뢰구간은 $(a-1.645\times b,\ a+1.645\times b)$이다. a, b의 값을 각각 구하시오. (단, 확률변수 Z가 $N(0,1)$을 따를 때, $\mathrm{P}(0\le Z\le 1.645)=0.45$로 계산한다.) [2점]

[모범답안]

모집단에 대한 찬성 비율의 평균 $\frac{p_1+p_2}{2}$에 대한 추정량은 $\frac{\hat{p}_1+\hat{p}_2}{2}$이며

$\frac{\hat{p}_1+\hat{p}_2}{2}$는 $N\left(\frac{p_1+p_2}{2},\ \frac{1}{4}\left\{\frac{p_1(1-p_1)}{n_1}+\frac{p_2(1-p_2)}{n_2}\right\}\right)$를 따른다.

따라서 찬성 비율의 평균 $\frac{p_1+p_2}{2}$에 대한 90% 신뢰구간 $(a-1.645\times b,\ a+1.645\times b)$에 대해

$a=\frac{\hat{p}_1+\hat{p}_2}{2}=\frac{0.7+0.8}{2}$이고

$\frac{\hat{p}_1+\hat{p}_2}{2}$의 표준오차 b는 $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{0.7\times0.3}{350}+\frac{0.8\times0.2}{160}}=0.02$이다.

(2023학년도 B형 5번)

두 확률변수 X와 Y의 결합확률밀도함수(joint probability density function) $f(x, y)$를

$$f(x, y) = \begin{cases} 2, 0 < x < 2 - y < 1 \\ 0, \text{그 외의 경우} \end{cases}$$

라 하고 확률변수 Z를 $Z = Y - X$라 하자. Z의 누적분포함수(cumulative distribution function) $G(z)$를 풀이 과정과 함께 쓰시오. 또한 $g(z)$를 Z의 확률밀도함수(probability density function)라 할 때, $\mathrm{P}\left(g(Z) > \frac{1}{2}\right)$의 값을 풀이 과정과 함께 쓰시오. [4점]

[모범답안]

Z의 누적분포함수는 $G(z) = \mathrm{P}(Z \le z) = \mathrm{P}(Y \le X + z)$이다.

(1) $0 \le z < 1$인 경우, $G(z) = \mathrm{P}(Z \le z) = \mathrm{P}(Y \le X + z)$

$$= \frac{1}{2} \times z \times \frac{z}{2} \times 2 = \frac{1}{2} z^2$$

(2) $1 \le z < 2$인 경우, $G(z) = \mathrm{P}(Z \le z) = \mathrm{P}(Y \le X + z)$

$$= 1 - \frac{1}{2} \times (2 - z) \times \left(1 - \frac{z}{2}\right) \times 2$$
$$= 1 - \frac{(2-z)^2}{2}$$

이므로 Z의 누적분포함수는

$$G(z) = \begin{cases} 0 & , z < 0 \\ \frac{1}{2} z^2 & , 0 \le z < 1 \\ 1 - \frac{(2-z)^2}{2} & , 1 \le z < 2 \\ 1 & , z \ge 2 \end{cases}$$

이다. 그리고 Z의 확률밀도함수는

$$g(z) = \begin{cases} z & , 0 \le z < 1 \\ 2 - z & , 1 \le z < 2 \\ 0 & , \text{그 외} \end{cases}$$

이므로 $\mathrm{P}\left(g(Z) > \frac{1}{2}\right)$는

$$\mathrm{P}\left(g(z) > \frac{1}{2}\right) = \mathrm{P}\left(\frac{1}{2} < z < \frac{3}{2}\right)$$
$$= 1 - 2\mathrm{P}\left(0 < z < \frac{1}{2}\right) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

이다.

<수고하셨습니당~~>