해빙(海氷)은 지구 생태계의 중요한 부분입니다. 연습 9.3.56에서 시간이 지남에 따라 변화하는 해빙의 두께를 모델링하는 미분방정식을 유도해야 합니다.

9 미분방정식

Differential Equations

미분적분학의 모든 응용 가운데서 가장 중요한 것은 아마도 미분방정식일 것이다. 물리학자나 사회학자가 미분적분학을 사용하고자 할 때, 연구하고자 하는 어떤 현상을 모델링하는 과정에서 나타나는 미분방정식을 분석하는 일을 가장 많이 하게 된다. 비록 미분방정식의 해를 구하기 위한 분명한 공식을 찾는 것은 보통 불가능하지만 해를 구하는 데 필요한 정보를 제공해주는 그래프적 접근과 수치적 접근을 통해 해를 짐작할 수 있다.

9.1 미분방정식으로 모델화하기

1.2절의 수학적 모델링을 읽고 의논해보자.

1장의 모델화의 과정에서, 실세계 문제에 대한 수학적 모델의 설정은 직관적인 추론을 통하거나 실험에 따른 증거에 기반을 둔 물리법칙으로부터 이루어진다고 설명했다. 수학적 모델은 가끔 **미분방정식**(differential equation), 즉 미지의 함수와 그 함수의 몇 가지 도함수들을 포함하는 방정식의 형태를 띤다. 실세계 문제에서 우리는 가끔 변화가 일어나는 것을 감지하고 현재의 값들의 변화에 따라 미래의 행동을 예측하기를 원하기 때문에 미지의 함수를 포함하는 것은 놀랍지가 않다. 물리적 현상을 모델화할 때 미분방정식이 어떻게 생기는지에 대해 몇 가지 예를 통해 알아보자.

■ 개체수 증가 모델

개체수 증가에 대한 한 가지 모델은, 개체수는 개체수 크기에 비례하여 증가한다는 가정에 기초한다. 이것은 이상적인 조건(제약을 받지 않는 주변환경, 적당한 영양, 천적의 부재, 질병으로부터의 면역)하에서 박테리아나 동물 수를 가정할 때 적합하다.

이 모델을 표현하는 데 필요한 변수를 도입하여

t = 시간(독립변수)

P = 개체군 안에 있는 개체수(종속변수)

개체수의 증가율은 도함수 dP/dt이므로 개체수의 증가율은 개체수에 비례한다는 가정은 다음 방정식으로 나타낼 수 있다. 여기서 k는 비례상수이다.

$$\boxed{1} \qquad \frac{dP}{dt} = kP$$

방정식 $\boxed{1}$은 개체수 증가에 대한 첫 번째 모델이다. 이것은 미지의 함수 P와 도함수 dP/dt를 포함하고 있기 때문에 미분방정식이다.

모델을 구성했으면, 이제 결과를 관찰하자. 개체수가 0인 경우를 제외하면, 모든 t에 대해 $P(t) > 0$이다. 따라서 $k > 0$이면, 방정식 $\boxed{1}$은 모든 t에 대해 $P'(t) > 0$이다. 이것은 개체수가 항상 증가함을 뜻한다. 실제로, $P(t)$가 증가함에 따라 방정식 $\boxed{1}$의 dP/dt는 점점 더 커진다. 다시 말하면, 증가율은 개체군이 증가함에 따라 증가한다.

이제 방정식 $\boxed{1}$의 해에 대해 생각해보자. 이 방정식을 풀려면 도함수가 자신의 상수배인 함수를 구해야 한다. 그런데 지수함수가 그러한 성질을 갖고 있다(3장 참조). 실제로 $P(t) = Ce^{kt}$라 두면,

$$P'(t) = C(ke^{kt}) = k(Ce^{kt}) = kP(t)$$

이다. 그래서 $P(t) = Ce^{kt}$와 같은 형태의 임의의 지수함수는 방정식 $\boxed{1}$의 해이다. 9.4절에서 이 방정식을 자세히 공부하면, 이 방정식은 이런 형태 외의 다른 해는 없다는 것을 알게 될 것이다.

C가 임의의 실수라면 해 $P(t) = Ce^{kt}$들의 집합을 얻는데 그들의 그래프는 그림 1에 나타나 있다. 그러나 개체수가 오직 양수이어야 하므로 $C > 0$인 해에만 관심이 있다.

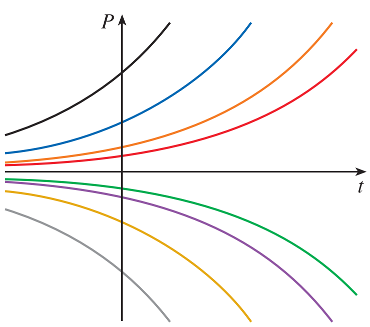


그림 1 $dP/dt = kP$의 해집합

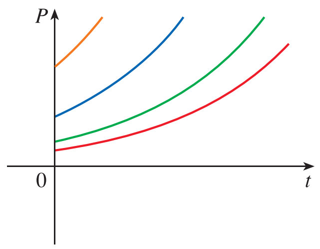


그림 2 $C > 0$이고 $t \geqslant 0$인 해 $P(t) = Ce^{kt}$의 집합

그리고 초기 시각 $t = 0$보다 큰 t의 값만을 다룬다. 그림 2는 실제로 의미 있는 해들을 보여준다. $t = 0$이라 두면, $P(0) = Ce^{k(0)} = C$를 얻고, 따라서 상수 C는 초기 개체수 $P(0)$이 된다.

방정식 1은 이상적인 조건하에서 개체군 증가의 모델로 적합하지만, 더 현실적인 모델은 주어진 환경이 이상적이지 않다는 사실을 반영해야만 한다. 많은 개체군은 지수적으로 증가하면서 시작하지만, 개체군이 수용 용량(carrying capacity) M에 접근(혹은 만약 개체군이 M을 넘으면 M으로 감소)하면 그 개체군은 안정 상태가 된다. 이 두 가지 경향을 모두 고려하는 모델이 되도록 하기 위하여 두 가지 가정을 만든다.

- P가 작으면 $\dfrac{dP}{dt} \approx kP$ (초기에 성장률은 P에 비례한다.)
- $P > M$이면 $\dfrac{dP}{dt} < 0$ (P가 M을 넘으면 P는 감소한다.)

두 가정을 통합하는 한 가지 방법은 개체수 증가율이 개체수, 수용 용량과 개체수 간의 차이 둘 다에 비례한다고 가정하는 것이다. 해당 미분방정식은 $dP/dt = cP(M - P)$이며, 여기서 c는 비례 상수이거나

$$\boxed{2} \qquad \frac{dP}{dt} = kP\left(1 - \frac{P}{M}\right) \qquad (k = cM)$$

이다. 만약 P가 M과 비교하여 작으면 P/M는 0에 가깝고, 따라서 $dP/dt \approx kP$이다. 만약 $P > M$이면 $1 - P/M$는 음수이고, 따라서 $dP/dt < 0$이다.

방정식 2는 **로지스틱 미분방정식**(logistic differential equation)으로 1840년대에 세계 인구 증가의 모형으로 네덜란드의 수리생물학자 베르훌스트(Verhulst)가 제안하였다. 9.4절에서 로지스틱 방정식의 구체적인 해를 찾는 방법을 공부하겠지만, 지금은 방정식 2로부터 직접적으로 해의 특성을 유도해보자. 먼저 상수함수 $P(t) = 0$과 $P(t) = M$은 방정식 2의 우변을 0이 되게 하므로 해가 된다. (이것은 확실히 실제적인 의미가 있다. 만약 개체수가 0이거나 수용 용량에 도달하면 그 상태에 머물러 있는다.) 이러한 두 개의 상수해를 **평형해**(equilibrium solutions)라 부른다.

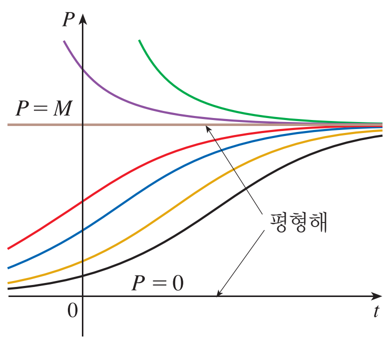


그림 3 로지스틱 방정식의 해

만약 초기 개체수 $P(0)$가 0과 M 사이에 있다면, 방정식 2의 우변은 양이 되어 $dP/dt > 0$이고 개체수는 증가한다. 그러나 개체수가 수용 용량을 넘으면($P > K$), $1 - P/M$는 음이 되어 $dP/dt < 0$이고 개체수는 감소한다. 만약 어느 경우이건 개체수가 수용 용량에 접근하면($P \to \mathrm{M}$), 개체수가 안정 상태가 됨을 의미하는 $dP/dt \to 0$이 된다. 그래서 로지스틱 미분방정식의 해는 그림 3의 그래프와 유사하다. 그래프들은 평형해 $P = 0$에서 멀어지면서 평형해 $P = M$을 향하여 이동한다.

■ 용수철 운동의 모델

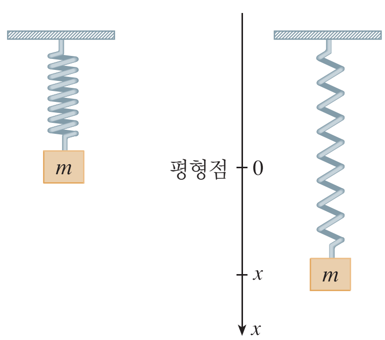


그림 4

물리학에서 나온 모델의 예를 하나 살펴보자. 수직으로 있는 용수철의 끝에 매달려 있는 질량 m인 물체의 운동을 생각하자(그림 4). 6.4절에서 훅의 법칙을 배웠다. 이 법칙에 따르면 만약 용수철을 원래 길이로부터 x단위만큼 늘인다면(혹은 압축한다면), 용수철은 x에 비례하는 힘을 나타낸다. 즉,

$$\text{복원력} = -kx$$

이다. 여기서 k는 양의 상수이다(**용수철 상수**라 부름). 만약 외부의 저항하는 힘(공기저항 혹은 마찰)을 무시한다면, 뉴턴의 제2법칙(힘 = 질량 × 가속도)에 의하여,

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx \qquad \boxed{3}$$

를 얻는다. 이것은 2차도함수를 포함하므로 2계 미분방정식의 예이다. 이 방정식으로부터 해의 형태를 직접 추측할 수 있음을 보이자. 방정식 $\boxed{3}$을 다시 쓰면

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x$$

를 얻는다. 이것은 x의 2차도함수가 x에 비례하지만 반대 부호를 가짐을 말해준다. 이러한 성질을 만족하는 함수가 사인과 코사인함수임을 잘 알고 있다. 실제로 방정식 $\boxed{3}$의 모든 해는 적당한 사인과 코사인의 결합으로 나타낼 수 있다(연습문제 16 참조). 이것은 놀라운 일이 아닌데, 용수철은 평형점을 중심으로 진동하므로 삼각함수들이 포함되리라고 생각하는 것은 자연스럽다.

■ 일반적인 미분방정식

일반적으로, **미분방정식**(differential equation)은 미지의 함수와 그 도함수들을 포함하는 방정식이다. 미분방정식의 **계수**(order)는 방정식에 있는 최고차 도함수의 계수이다. 그래서 방정식 $\boxed{1}$과 $\boxed{2}$는 1계 미분방정식이고 방정식 $\boxed{3}$은 2계 미분방정식이다. 이 세 방정식에서 독립변수는 시각을 나타내는 t이지만, 일반적으로 독립변수가 꼭 시각을 나타내는 것은 아니다. 예를 들면, 다음과 같은 미분방정식

$$y' = xy \qquad \boxed{4}$$

를 생각해보면 y는 x에 관한 미지의 함수이다.

어떤 미분방정식에 $y = f(x)$와 그 도함수들을 대입하여 그 방정식이 만족될 때에 함수 $f(x)$를 그 미분방정식의 **해**(solution)라고 한다. 그래서 어떤 구간 내의 모든 x의 값에 대하여

$$f'(x) = xf(x)$$

를 만족하면, f는 방정식 $\boxed{4}$의 해이다.

미분방정식을 풀 때에는 미분방정식의 가능한 해를 모두 찾아야 한다. 이미

$$y' = f(x)$$

같은 형의 간단한 미분방정식은 풀었다. 예를 들면, 미분방정식

$$y' = x^3$$

의 일반해는

$$y = \frac{x^4}{4} + C$$

로 주어짐을 알 수 있다(단, C는 임의의 상수).

그러나 일반적으로 미분방정식을 푸는 것은 쉬운 일이 아니다. 모든 미분방정식을 푸는 체계적인 방법은 없다. 그러나 9.2절에서 명백한 해를 얻지 못하더라도 해의 개략적인 그래프를 그리는 방법은 알게 될 것이다. 또한 해의 수치적인 근삿값을 찾는 방법을 배울 것이다.

예제 1 함수 $y = x + 1/x$가 주어진 미분방정식의 해인지 확인하여라.

(a) $xy' + y = 2x$ (b) $xy'' + 2y' = 0$

풀이 $y = x + 1/x$의 (x에 대한) 1계 및 2계 도함수는 $y' = 1 - 1/x^2$ 및 $y'' = 2/x^3$이다.

(a) y와 y'에 대한 식을 미분방정식의 좌변에 대입하면 다음을 얻는다.

$$\begin{aligned} xy' + y &= x\left(1 - \frac{1}{x^2}\right) + \left(x + \frac{1}{x}\right) \\ &= x - \frac{1}{x} + x + \frac{1}{x} = 2x \end{aligned}$$

$2x$는 미분방정식의 우변과 같으므로 $y = x + 1/x$는 해이다.

(b) y'과 y''을 대입하면 좌변은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} xy'' + 2y' &= x\left(\frac{2}{x^3}\right) + 2\left(1 - \frac{1}{x^2}\right) \\ &= \frac{2}{x^2} + 2 - \frac{2}{x^2} = 2 \end{aligned}$$

이는 미분방정식의 우변과 같지 않다. 따라서 $y = x + 1/x$는 해가 아니다. ■

예제 2 임의의 상수 c에 대하여 함수족

$$y = \frac{1 + ce^t}{1 - ce^t}$$

은 미분방정식 $y' = \frac{1}{2}(y^2 - 1)$의 해가 됨을 보여라.

풀이 미분법의 몫의 법칙을 써서 도함수를 계산하자.

$$\begin{aligned} y' &= \frac{(1 - ce^t)(ce^t) - (1 + ce^t)(-ce^t)}{(1 - ce^t)^2} \\ &= \frac{ce^t - c^2e^{2t} + ce^t + c^2e^{2t}}{(1 - ce^t)^2} = \frac{2ce^t}{(1 - ce^t)^2} \end{aligned}$$

미분방정식의 우변은 다음과 같이 된다.

그림 5는 예제 2의 7가지 경우를 나타낸다. 이 미분방정식은 $y \approx \pm 1$일 경우 $y' \approx 0$임을 보인다. 그것은 $y = 1$과 $y = -1$에 가까울수록 그래프의 평평함에 의하여 입증된다.

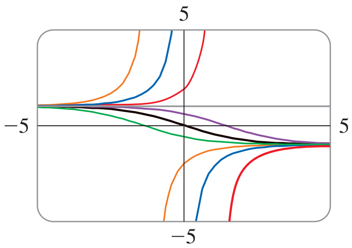


그림 5

$$\frac{1}{2}(y^2 - 1) = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{1 + ce^t}{1 - ce^t}\right)^2 - 1\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{(1 + ce^t)^2 - (1 - ce^t)^2}{(1 - ce^t)^2}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\frac{4ce^t}{(1 - ce^t)^2} = \frac{2ce^t}{(1 - ce^t)^2}$$

좌변과 우변이 같음을 보여준다. 그러므로 모든 c의 값에 대하여, 주어진 함수족은 주어진 미분방정식의 해이다. ■

미분방정식을 풀 때 해의 모임(일반해)을 찾는 것은 전제 조건을 만족하는 해를 찾는 것보다 흥미 있는 일은 아니다. 많은 실제적인 문제에서 조건 $y(t_0) = y_0$을 만족하는 특수 해를 요구할 때가 많다. 이 조건을 **초기조건**(initial condition)이라 부르고, 초기조건을 만족하는 미분방정식의 해를 찾는 문제를 **초깃값문제**(initial-value problem)라고 부른다.

기하학적으로 초기조건이 주어졌을 때, 일반해에서 점 (t_0, y_0)를 지나는 해곡선을 찾을 수 있다. 실제로 이것은 시각 t_0에서 어떤 체계의 상태를 재고 초깃값문제의 해를 이용하여 그 체계의 미래의 행위를 예측하는 일과 부합된다.

예제 3 초기조건 $y(0) = 2$를 만족하는 미분방정식 $y' = \frac{1}{2}(y^2 - 1)$의 해를 구하여라.

풀이 예제 2에서 공식

$$y = \frac{1 + ce^t}{1 - ce^t}$$

에 $t = 0$과 $y = 2$를 대입하면,

$$2 = \frac{1 + ce^0}{1 - ce^0} = \frac{1 + c}{1 - c}$$

를 얻는다. 이 방정식을 c에 관하여 풀면, $2 - 2c = 1 + c$이고 $c = \frac{1}{3}$이 된다. 그래서 초깃값문제의 해는

$$y = \frac{1 + \frac{1}{3}e^t}{1 - \frac{1}{3}e^t} = \frac{3 + e^t}{3 - e^t}$$

이다.

해의 그래프는 그림 6에 있다. 곡선은 점 (0, 2)를 통과하는 그림 5의 해곡선 중 하나이다. ■

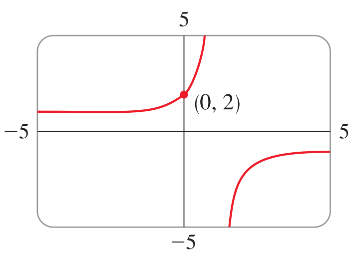


그림 6

9.1 연습문제

1-5 주어진 상황을 나타내는 미분방정식을 쓰라. 각각의 경우에 명시된 변화율은 시간 t에 대한 것이다.

1. 나무 몸통의 반지름 r의 변화율은 반지름에 반비례한다.

2. 낙하하는 물체의 속도 v의 변화율은 일정하다.

3. 최대 속도가 M인 자동차의 경우 자동차의 속도 v의 변화율은 M과 v의 차이에 비례한다.

4. 인구가 N인 도시에 전염병이 유입되었을 때 감염자 수 y의 변화율은 감염자 수와 비감염자 수를 곱한 값에 비례한다.

5. 새로운 제품에 대한 광고가 인구가 N으로 고정된 도시에 소개되었을 때, 시각 t에 제품에 대해 들어본 개인의 수 y의 변화율은 아직 제품에 대해 들어본 적이 없는 개인 수에 비례한다.

6-12 주어진 함수가 미분방정식의 해인지 확인하여라.

6. $y = \sin x - \cos x$; $y' + y = 2\sin x$

7. $y = \frac{2}{3}e^x + e^{-2x}$; $y' + 2y = 2e^x$

8. $y = \tan x$; $y' - y^2 = 1$

9. $y = \sqrt{x}$; $xy' - y = 0$

10. $y = \sqrt{1 - x^2}$; $yy' - x = 0$

11. $y = x^3$; $x^2y'' - 6y = 0$

12. $y = \ln x$; $xy'' - y' = 0$

13-14 주어진 함수가 초깃값문제의 해임을 보여라.

13. $y = -t\cos t - t$; $t\dfrac{dy}{dt} = y + t^2 \sin t$, $y(\pi) = 0$

14. $y = 5e^{2x} + x$; $\dfrac{dy}{dx} - 2y = 1 - 2x$, $y(0) = 5$

---

15. (a) $y = e^{rx}$가 미분방정식 $2y'' + y' - y = 0$의 해가 되도록 하는 r의 값은 무엇인가?

(b) r_1과 r_2가 (a)에서 r의 값을 만족할 때 $y = ae^{r_1x} + be^{r_2x}$도 또한 미분방정식의 해가 됨을 보여라.

16. (a) $y = \cos kt$가 미분방정식 $4y'' = -25y$를 만족할 때 0이 아닌 k값은 무엇인가?

(b) (a)에서 구한 k값에 대하여 $y = A\sin kt + B\cos kt$도 또한 해임을 보여라.

17. 다음 함수 중 어느 것이 미분방정식 $y'' + y = \sin x$의 해인가?

(a) $y = \sin x$ (b) $y = \cos x$

(c) $y = \frac{1}{2}x\sin x$ (d) $y = -\frac{1}{2}x\cos x$

18. (a) 함수족 $y = (\ln x + C)/x$은 미분방정식 $x^2y' + xy = 1$의 해임을 증명하여라.

(b) 같은 화면에 해의 족의 그래프를 몇 개 그려서 (a)를 설명하여라.

(c) 초기조건 $y(1) = 2$를 만족하는 미분방정식의 해를 구하여라.

(d) 초기조건 $y(2) = 1$을 만족하는 미분방정식의 해를 구하여라.

19. (a) $y' = -y^2$을 단지 보기만 함으로써 미분방정식의 해에 대하여 무엇을 말할 수 있는가?

(b) $y = 1/(x + C)$는 (a)의 미분방정식의 해임을 밝혀라.

(c) (b)의 형이 아닌 미분방정식 $y' = -y^2$의 해를 생각할 수 있겠는가?

(d) 초깃값문제 $y' = -y^2$, $y(0) = 0.5$의 해를 구하여라.

20. (a) x가 0에 가까이 갈 때 방정식 $y' = xy^3$의 해의 그래프에 관해 무엇을 말할 수 있는가?

(b) 족 $y = (c - x^2)^{-1/2}$의 모든 원소는 미분방정식 $y' = xy^3$의 해임을 밝혀라.

(c) 같은 화면에 해의 족의 여러 원소들을 그려라. (a)에서 예상한 대로 그래프가 나타나는가?

(d) 초깃값문제 $y' = xy^3$, $y(0) = 2$의 해를 구하여라.

21. 개체수 P가 미분방정식

$$\frac{dP}{dt} = 1.2P\left(1 - \frac{P}{4200}\right)$$

로 나타난다.

(a) 개체수가 증가할 때 P는 어떤 값을 가지는가?

(b) 개체수가 감소할 때 P는 어떤 값을 가지는가?

(c) 평형해는 무엇인가?

22. 뉴런의 전기 충격에 대한 Fitzhugh-Nagumo 모델은 이완 효과가 없는 경우 뉴런의 전위 $v(t)$가 미분방정식

$$\frac{dv}{dt} = -v[v^2 - (1 + a)v + a]$$

을 따른다. 여기서 a는 $0 < a < 1$인 양의 상수이다.

(a) v가 변하지 않을 때(즉, $dv/dt = 0$) v는 어떤 값을 가지는가?

(b) v가 증가할 때 v는 어떤 값을 가지는가?

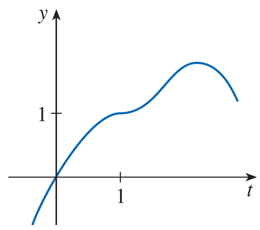
(c) v가 감소할 때 v는 어떤 값을 가지는가?

23. 다음 그래프로 주어진 함수는 왜 미분방정식

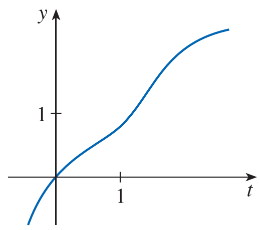
$$\frac{dy}{dt} = e^t(y-1)^2$$

의 해가 될 수 없는지 설명하여라.

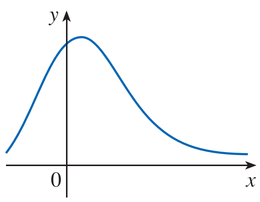
(a)



(b)



24. 주어진 그래프를 갖는 함수는 다음 미분방정식 중의 하나의 해이다. 어느 것이 정확한 방정식인지 결정하고 설명하여라.



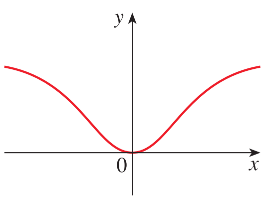
A. $y' = 1 + xy$ B. $y' = -2xy$ C. $y' = 1 - 2xy$

25. 다음 I~IV의 그래프가 해가 되는 미분방정식을 골라 각각 연결시키고, 그 이유를 설명하여라.

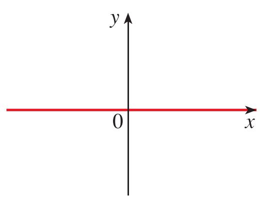
(a) $y' = 1 + x^2 + y^2$ (b) $y' = xe^{-x^2-y^2}$

(c) $y' = \dfrac{1}{1 + e^{x^2+y^2}}$ (d) $y' = \sin(xy)\cos(xy)$

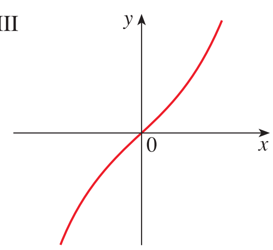
I



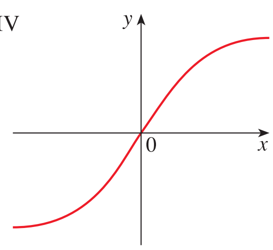
II



III



IV



26. 방금 섭씨 95도짜리 커피를 섭씨 20도인 방 안에 있는 컵에 부었다고 가정하자.

(a) 커피가 언제 가장 빨리 식을 것이라 생각하는가? 시간이 지남에 따라 냉각률은 어떻게 되겠는가?

(b) 뉴턴의 냉각 법칙에 따르면 물체의 냉각률은 물체와 주위의 온도차가 그렇게 크지 않다면 그 차이에 비례한다. 이 특수한 상황에 대해 뉴턴의 냉각 법칙을 표현하는 미분방정식을 써라. 초기조건은 무엇인가? (a)에 대해 예상되는 답에 비추어 이 미분방정식은 식는 것에 대한 적절한 모형이라고 생각하는가?

(c) (b)의 초깃값문제의 해의 그래프를 간단히 그려라.

27. 학습이론에 관심 있는 심리학자들은 **학습곡선**(learning curves)을 연구한다. 학습곡선은 함수 $P(t)$의 그래프인데, 이것은 훈련시간 t에 따라 어떤 개체가 기술을 배우는 성취도를 나타낸다. 도함수 dP/dt는 성취도의 증가비율을 나타낸다.

(a) 언제 P가 가장 빠르게 증가한다고 생각하는가? t가 증가함에 따라 dP/dt에 무엇이 일어나는가? 설명해보아라.

(b) 만약 M을 개체가 터득할 수 있는 성취의 최고수준이라 하면, 다음 미분방정식

$$\frac{dP}{dt} = k(M - P) \quad (k\text{는 양의 상수})$$

가 왜 학습에 대한 적당한 모형이 되는지를 설명하여라.

(c) 이 미분방정식의 가능한 해를 개략적으로 말해보아라.

28. 폰 베르탈란피(Von Bertalanffy) 방정식은 물고기 개체의 성장 속도가 현재 길이 L과 점근적 길이 L_∞의 차이에 비례함을 나타낸다.

(a) 이 생각을 표현하는 미분방정식을 쓰라.

(b) 이 초깃값 미분방정식의 해에 대한 간략한 그림을 그려라.

29. 미분방정식은 경구용 약물 투여 환자의 약물 용해 연구에 광범위하게 사용되었다. 그러한 방정식 중 하나는 약물의 농도 $c(t)$에 대한 Weibull 방정식이다.

$$\frac{dc}{dt} = \frac{k}{t^b}(c_s - c)$$

여기서 k와 c_s는 양의 상수이고 $0 < b < 1$이다.

$$c(t) = c_s\left(1 - e^{-\alpha t^{1-b}}\right)$$

가 $t > 0$에 대한 Weibull 방정식의 해가 되는지 확인하여라(여기서 $\alpha = k/(1-b)$). 미분방정식은 약물 용해가 어떻게 일어나는지에 대해 무엇을 말하는가?

9.2 방향장과 오일러 방법

불행하게도 모든 미분방정식의 해에 대한 명백한 공식을 얻는다는 것은 불가능하다. 이 절에서는 명백한 해를 구하지 못하더라도, 그래프적 접근(방향장) 혹은 수치적 접근(오일러 방법)을 통하여 해에 대한 많은 것을 배울 수 있다.

■ 방향장

초깃값문제

$$y' = x + y \qquad y(0) = 1$$

에 대하여 해들의 그래프를 생각해보자. 해를 구하는 공식을 모르면 어떻게 그래프를 그리는 것이 가능하겠는가? 미분방정식 자체가 의미하는 것에 대하여 생각해보자. 방정식 $y' = x + y$는 그래프[해곡선(solution curve)이라 부름]상의 임의의 점 (x, y)에서의 기울기가 그 점에서의 x와 y의 좌표의 합과 같다(그림 1 참조). 특히 곡선이 $(0, 1)$을 지나므로, 그 점에서의 기울기는 $0 + 1 = 1$이 된다. 그래서 $(0, 1)$에서의 해곡선의 작은 부분은 $(0, 1)$을 지나는 기울기 1인 작은 선분과 같이 보인다(그림 2 참조).

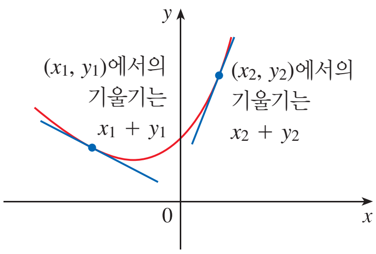


그림 1 $y' = x + y$의 해

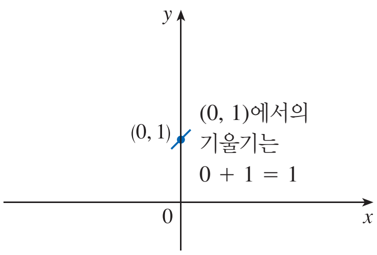


그림 2 (0, 1)을 지나는 해곡선의 시작 부분

그 곡선의 나머지 부분을 개략적으로 그리기 위하여, 몇 개의 점 (x, y)에서 기울기 $x + y$를 가지는 작은 선분들을 그려보자. 이렇게 하여 얻은 결과를 방향장(direction field)이라 부르는데 그림 3에서 볼 수 있다. 예를 들면, 점 $(1, 2)$에서의 선분의 기울기는 $1 + 2 = 3$이다. 이 방향장은 곡선의 각 점에 곡선이 나아가는 방향을 제시하므로 해곡선의 일반적인 모양을 보여준다.

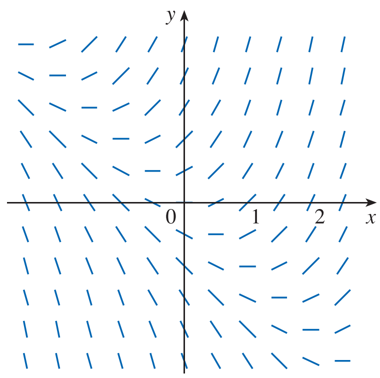


그림 3 $y' = x + y$의 방향장

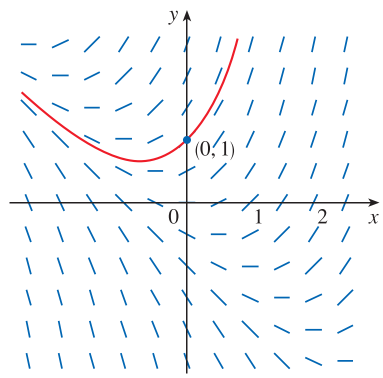


그림 4 (0, 1)을 지나는 해곡선

점 $(0, 1)$에서 그림 4와 같이 방향장을 따라 하나의 해곡선을 그릴 수 있다. 해곡선이 인접한 선분들과는 평행하도록 그렸음을 주목하여라.

일반적인 형태로, 1계 미분방정식

$$y' = F(x, y)$$

를 생각해보자. 여기서 $F(x, y)$는 x와 y의 식이다. 이 미분방정식은 해곡선 위의 점 (x, y)에서의 기울기가 $F(x, y)$임을 말한다. 만약 해곡선상의 점 (x, y)들에서 기울기 $F(x, y)$를

가지는 작은 선분들을 그린다면, 그 결과를 **방향장** 혹은 **기울기장**(slope field)이라 부른다. 이러한 선분들은 해곡선이 진행하는 방향을 보여주므로, 방향장은 해곡선의 일반적인 모양을 볼 수 있게 해준다.

예제 1

(a) 미분방정식 $y' = x^2 + y^2 - 1$의 방향장을 그려라.

(b) (a)를 사용하여 원점을 지나는 해곡선의 개형을 그려라.

풀이

(a) 먼저 다음 표와 같이 몇 개의 점에서의 기울기를 계산하자.

x	-2	-1	0	1	2	-2	-1	0	1	2	...
y	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	...
$y' = x^2 + y^2 - 1$	3	0	-1	0	3	4	1	0	1	4	...

그리고 이 점들에서 그 기울기를 갖는 작은 선분을 그린다. 그 결과 그림 5와 같은 방향장을 얻는다.

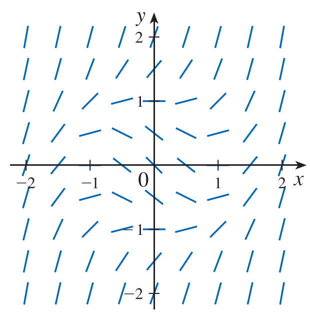


그림 5

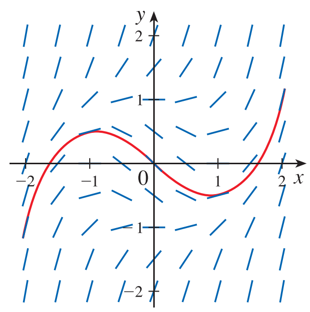


그림 6

(b) 원점에서 시작하여 선분(기울기 -1을 가짐)의 방향에 따라 오른쪽으로 이동한다. 그리고 인접한 선분과는 평행하게 이동시키면서 해곡선을 계속하여 그려 나간다. 그 결과로 얻어진 해곡선이 그림 6에 나타나 있다. 원점에서 다시 시작하여 같은 방법으로 왼쪽으로 해곡선을 그려 나간다. ■

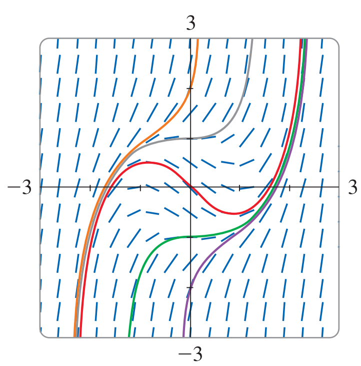


그림 7

방향장에서 선분을 많이 그릴수록 그림은 더 분명해진다. 물론 손으로 직접 많은 점에서 기울기를 계산하고 선분을 그리는 것은 지루한 일이지만, 컴퓨터는 이런 일을 하기에 적합하다. 그림 7은 예제 1의 미분방정식에 대하여 컴퓨터가 그린 좀 더 상세한 방향장을 보여준다. y절편이 -2, -1, 0, 1, 2인 상당히 정확한 해곡선들을 그릴 수 있다.

다음으로 방향장이 자연현상을 어떻게 통찰할 수 있게 해주는지 알아보자. 그림 8의 단순 전기회로는 시각 t에서 $E(t)$ 볼트(V)의 전압과 $I(t)$ 암페어(A)의 전류를 생성하는 기전력(배터리 혹은 발전기)을 가지고 있다. 또한 이 회로는 R 옴(Ω)을 가지는 저항기와 L 헨리(H)의 인덕턴스를 가지는 인덕터를 포함하고 있다.

옴의 법칙에 의하여 전압은 저항기를 지나면서 RI만큼 전압이 떨어진다. 인덕터를

지나면서 떨어지는 전압은 $L(dI/dt)$이다. 키르히호프의 법칙(Kirchhoff's law) 중의 하나는 떨어지는 전압의 합은 공급되는 전압 $E(t)$와 같다는 것을 말해준다. 다시 말해

$$\boxed{1} \qquad L\frac{dI}{dt} + RI = E(t)$$

를 얻는데, 이것은 시각 t에서의 전류 I를 모형으로 만드는 1계 미분방정식이다.

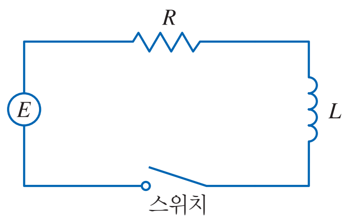


그림 8

예제 2 단순 전기회로 그림 8에서 저항 R이 12Ω, 인덕턴스 L는 4H, 그리고 배터리는 60V 직류라고 가정하자.

(a) 이러한 값들을 가진 방정식 $\boxed{1}$의 방향장을 그려라.

(b) 전류의 극한값은 무엇이라고 말할 수 있겠는가?

(c) 평형해를 구하여라.

(d) 전류가 $I(0) = 0$으로 시작되도록 $t = 0$일 때 스위치가 닫힌다면 방향장을 이용하여 해곡선을 그려보아라.

풀이

(a) 방정식 $\boxed{1}$에 $L = 4$, $R = 12$, $E(t) = 60$을 대입하면,

$$4\frac{dI}{dt} + 12I = 60 \qquad \text{즉} \qquad \frac{dI}{dt} = 15 - 3I$$

를 얻는다. 이 미분방정식의 방향장은 그림 9와 같다.

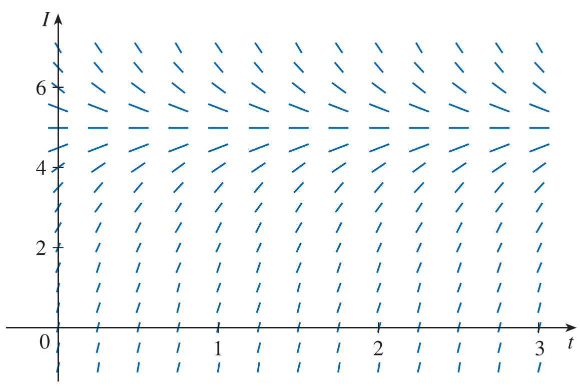


그림 9

(b) 방향장을 보면 모든 해는 5로 접근함을 알 수 있다. 즉,

$$\lim_{t\to\infty} I(t) = 5$$

이다.

평형해는 상수해임을 상기하라(그래프는 수평선).

(c) 방향장으로 보면 상수함수 $I(t) = 5$가 평형해처럼 보인다. 실제로 미분방정식 $dI/dt = 15 - 3I$로부터 직접 이 사실을 입증할 수 있다. 만약 $I(t) = 5$이면, 좌변은 $dI/dt = 0$이고, 우변은 $15 - 3(5) = 0$이다.

(d) 방향장을 이용해서 (0, 0)을 지나는 해곡선을 그려보면 그림 10의 붉은 곡선처럼 된다.

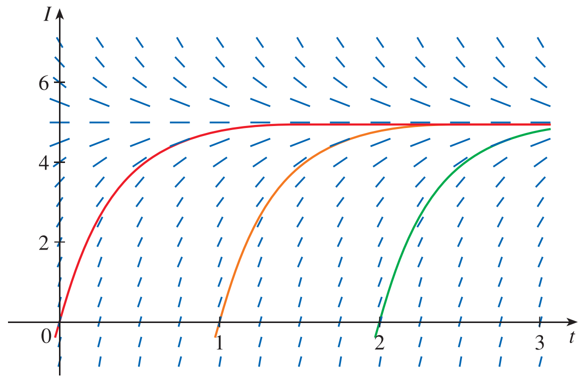


그림 10

그림 9에서 임의의 수평선을 따라갈 때 나타나는 선분들은 평행함을 주목하여라. 이것은 독립변수 t가 방정식 $I' = 15 - 3I$의 우변에 나타나지 않기 때문이다. 일반적으로, 우변에 독립변수가 없는 미분방정식

$$y' = f(y)$$

를 **자율적**(autonomous)이라 한다. 이러한 방정식에 대하여 y좌표가 같은 서로 다른 두 점에 대응되는 기울기는 같아야 한다. 이것은 자율적 미분방정식의 한 해를 알면, 그 해를 좌우로 이동하면서 무수히 많은 다른 해를 얻을 수 있음을 말해준다. 그림 10에서 예제 2의 해곡선을 오른쪽으로 1단위와 2단위만큼 이동시킨 해를 볼 수 있다. 그것들은 $t = 1$과 $t = 2$일 때 스위치를 닫는 것에 해당된다. 이 체계는 언제나 같은 형태로 행동함을 주목하여라.

오일러 방법

방향장의 기본 아이디어는 미분방정식의 해의 수치적 근삿값을 찾는 데 사용될 수 있다는 것이다. 우리가 방향장을 소개하는 데 사용한 초깃값문제

$$y' = x + y \qquad y(0) = 1$$

에 대하여 그 방법을 설명해보자. 이 미분방정식은 $y'(0) = 0 + 1 = 1$임을 말하며, 따라서 해곡선은 점 $(0, 1)$에서 기울기 1을 가진다. 해에 대한 첫 번째 근사식으로 우리는 선형근사식 $L(x) = x + 1$을 사용할 수 있다. 다시 말하면, 해곡선의 개략적 근사식으로 $(0, 1)$에서의 접선을 사용할 수 있다(그림 11 참조).

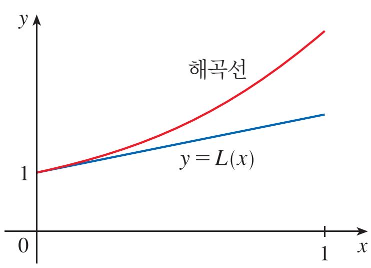


그림 11 첫 번째 오일러 근사식

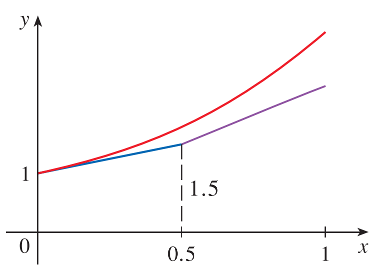


그림 12 단계 크기 0.5인 오일러 근사식

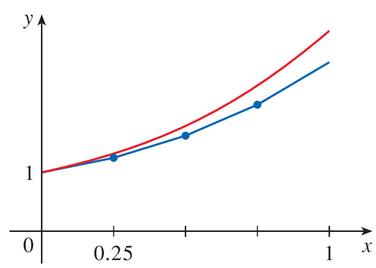


그림 13 단계 크기 0.25인 오일러 근사식

오일러의 착상은 이 접선을 따라 오직 짧은 거리만큼 나아간 다음 방향장에 의하여 표시되는 대로 방향을 바꾸어 중간진로로 수정함으로써 이 근사식을 개선해나가는 것이다. 그림 12는 접선을 따라 출발하여 $x = 0.5$에서 멈출 경우에 일어나는 것을 보여준다[이 이동하는 수평거리를 **단계 크기**(step size)라 부른다]. $L(0.5) = 1.5$이므로, $y(0.5) \approx 1.5$를 얻고, $(0.5, 1.5)$를 새로운 선분에 대한 시작점으로 잡는다. 이 미분방정식은 $y'(0.5) = 0.5 + 1.5 = 2$임을 말해주므로 $x > 0.5$에서의 근사해로 1차함수

$$y = 1.5 + 2(x - 0.5) = 2x + 0.5$$

를 사용한다(그림 12의 아래선). 만약 단계 크기를 0.5에서 0.25로 줄인다면, 그림 13과 같이 더 나은 오일러 근사식을 얻는다.

일반적으로, 오일러 방법은 초깃값이 주어진 점에서 시작하여 방향장에 의하여 표시되는 방향으로 진행한다. 짧은 시간 경과 후 멈추어서 새로운 지점에서의 기울기를 계산하여 그 방향으로 진행한다. 멈추고 방향장에 따라 방향을 바꾸는 것을 계속한다. 그러나 오일러 방법은 초깃값문제의 정확한 해를 만들지는 못하고 근사식만 제공할 뿐이다. 그러나 단계 크기를 작게 함에 따라(중간진로의 수정을 많이 함에 따라), 정확한 해의 더 나은 근사식을 성공적으로 얻는 데 성공한다(그림 11, 12, 13을 비교하여라).

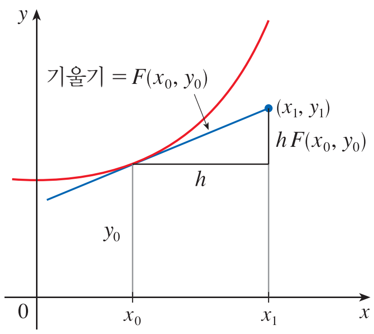


그림 14

일반적인 1계 초깃값문제 $y' = F(x, y)$, $y(x_0) = y_0$에 대하여, 목표는 일정한 간격의 수 $x_0, x_1 = x_0 + h, x_2 = x_1 + h, \ldots$, (여기서 h는 단계 크기)에서 해의 근삿값을 찾는 것이다. 이 미분방정식은 (x_0, y_0)에서의 기울기가 $y' = F(x_0, y_0)$임을 말하므로, 그림 14는 $x = x_1$일 때에 해의 근삿값이

$$y_1 = y_0 + hF(x_0, y_0)$$

이고, 같은 방법으로

$$y_2 = y_1 + hF(x_1, y_1)$$

이고, 일반적으로

$$y_n = y_{n-1} + hF(x_{n-1}, y_{n-1})$$

임을 보여준다.

오일러 방법 $x_n = x_{n-1} + h$에서 단계 크기가 h인 1계 초깃값문제에 대한 해의 근삿값은

$$y_n = y_{n-1} + hF(x_{n-1}, yx_{n-1}) \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

이다.

예제 3 단계 크기가 0.1인 오일러 방법을 사용하여 초깃값문제

$$y' = x + y \qquad y(0) = 1$$

에 대한 해의 근삿값 표를 만들어라.

풀이 $h = 0.1$, $x_0 = 0$, $y_0 = 1$ 그리고 $F(x, y) = x + y$라 두면,

$$y_1 = y_0 + hF(x_0, y_0) = 1 + 0.1(0 + 1) = 1.1$$

$$y_2 = y_1 + hF(x_1, y_1) = 1.1 + 0.1(0.1 + 1.1) = 1.22$$

$$y_3 = y_2 + hF(x_2, y_2) = 1.22 + 0.1(0.2 + 1.22) = 1.362$$

를 얻는다. 이것은 정확한 해가 $y(x)$라면 $y(0.3) \approx 1.362$가 됨을 의미한다.

같은 방법으로 계속하면, 다음과 같은 표를 얻는다.

미분방정식의 해에 수치적 근사를 생기게 하는 컴퓨터 소프트웨어 패키지는 오일러 방법의 정교한 방법에 이용한다. 비록 오일러 방법이 간단하고 정확하지 않다고 하더라도 그것은 매우 정확한 방법에 기초한 기본적인 아이디어이다.

n	x_n	y_n	n	x_n	y_n
1	0.1	1.100000	6	0.6	1.943122
2	0.2	1.220000	7	0.7	2.197434
3	0.3	1.362000	8	0.8	2.487178
4	0.4	1.528200	9	0.9	2.815895
5	0.5	1.721020	10	1.0	3.187485

■

예제 3에서 수표의 더 나은 정확성을 위하여, 단계 크기를 감소시킬 수 있다. 그러나 단계가 작은 많은 수에 대해서는 많은 계산이 필요하므로 계산기나 컴퓨터 프로그램을 사용하기도 한다. 다음 쪽 표는 예제 3의 초깃값문제에 대하여 단계 크기를 줄이면서 오일러 방법을 적용한 것의 결과를 보여준다.

아래 표에서 오일러 추정치는 어떠한 극한값, 즉 $y(0.5)$와 $y(1)$의 참값에 접근하는 것과 같이 보임을 주목하여라. 그림 15는 단계 크기 0.5, 0.25, 0.1, 0.05, 0.02, 0.01 그리고 0.005일 때의 오일러 근사식들의 그래프이다. 이것들은 단계 크기 h가 0에 접근함에 따라 정확한 해곡선에 접근하고 있다.

단계 크기	$y(0.5)$의 오일러 추정치	$y(1)$의 오일러 추정치
0.500	1.500000	2.500000
0.250	1.625000	2.882813
0.100	1.721020	3.187485
0.050	1.757789	3.306595
0.020	1.781212	3.383176
0.010	1.789264	3.409628
0.005	1.793337	3.423034
0.001	1.796619	3.433848

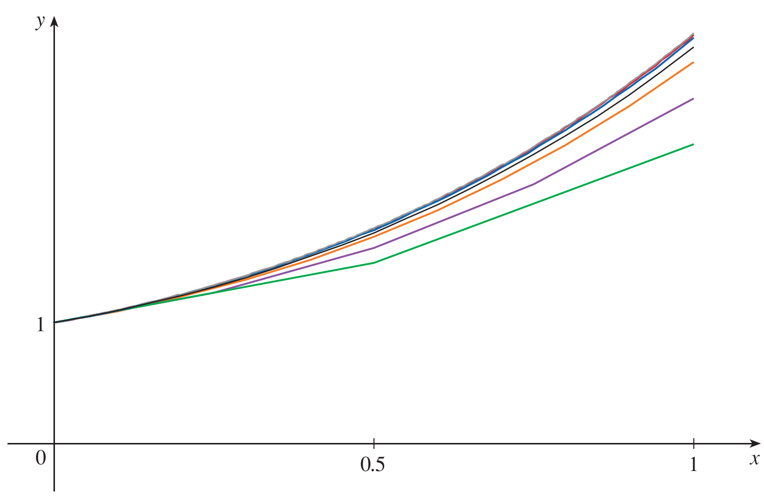


그림 15 정확한 해에 접근하는 오일러 근사식들

예제 4 예제 2에서 저항 12Ω, 인덕턴스 4H, 전압 60V인 배터리를 가진 단순 전기회로에 대하여 논의하였다. $t = 0$에서 스위치가 닫힐 때, 시각 t에서 전류 I 에 대한 초깃값 문제

오일러

오일러(Leonhard Euler, 1707~1783)는 18세기 중반을 이끌었던 대표적인 수학자이며 그 시대에 가장 연구 업적이 풍부했던 수학자였다. 스위스에서 출생했지만 대부분의 시간을 러시아의 상트페테르부르크와 독일 베를린의 과학 학술원에서 보냈다. 오일러의 연구 업적은 두꺼운 전집으로 100권이 넘을 정도이다. 프랑스 물리학자였던 아라고(Arago)는 "오일러는 마치 사람이 숨을 쉬듯, 독수리가 공중에 자연스럽게 나는 것처럼 계산을 전혀 힘들이지 않고 했다"라고 말했다. 오일러는 13명의 손자들을 키우면서도, 그리고 말년의 17년 동안 시력을 완전히 상실했을 때도 그의 계산 능력과 연구는 줄어들지 않았다. 실제로 시력을 상실했을 때도 천재적 기억력과 상상력으로부터 나온 발견들을 연구원들에게 받아 적도록 했다. 계산뿐만 아니라 대부분의 다른 수학적 주제에 관한 오일러의 논문들은 수학 지도를 위한 표준 내용이 되었고 그가 발견한 방정식 $e^{i\pi} + 1 = 0$은 전체 수학사에서 가장 유명한 다섯 개의 수를 함께 보여주었다.

$$\frac{dI}{dt} = 15 - 3I \qquad I(0) = 0$$

을 만들었다. 스위치가 닫힌 후부터 0.5초 후 회로의 전류를 정하여라.

풀이 $F(t, I) = 15 - 3I$, $t_0 = 0$, $I_0 = 0$ 그리고 단계 크기 $h = 0.1$초를 오일러 방법에 적용한다.

$$I_1 = 0 + 0.1(15 - 3 \cdot 0) = 1.5$$

$$I_2 = 1.5 + 0.1(15 - 3 \cdot 1.5) = 2.55$$

$$I_3 = 2.55 + 0.1(15 - 3 \cdot 2.55) = 3.285$$

$$I_4 = 3.285 + 0.1(15 - 3 \cdot 3.285) = 3.7995$$

$$I_5 = 3.7995 + 0.1(15 - 3 \cdot 3.7995) = 4.15965$$

따라서 0.5초 후의 전류는

$$I(0.5) \approx 4.16 \text{ A}$$

이다. ■

9.2 연습문제

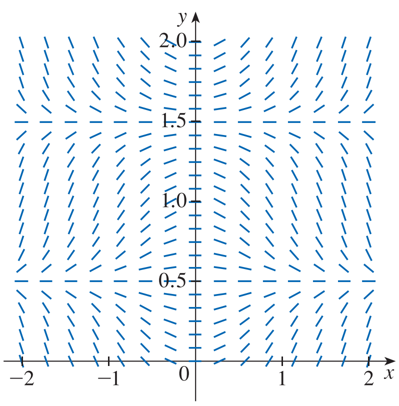
1. 미분방정식 $y' = x\cos \pi y$에 대한 방향장이 아래와 같이 주어져 있다.

(a) 주어진 초기조건을 만족하는 해의 그래프를 그려라.

(i) $y(0) = 0$ (ii) $y(0) = 0.5$

(iii) $y(0) = 1$ (iv) $y(0) = 1.6$

(b) 평형해를 모두 구하여라.



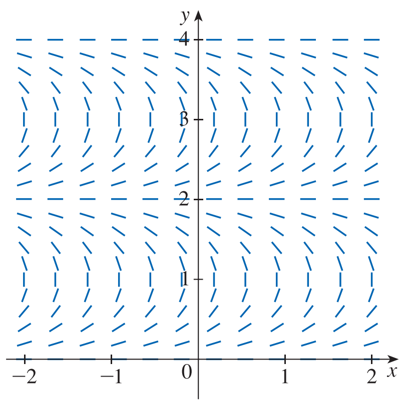
2. 미분방정식 $y' = \tan(\frac{1}{2}\pi y)$에 대한 방향장이 아래와 같이 주어져 있다.

(a) 주어진 초기조건을 만족하는 해의 그래프를 그려라.

(i) $y(0) = 1$ (ii) $y(0) = 0.2$

(iii) $y(0) = 2$ (iv) $y(1) = 3$

(b) 평형해를 모두 구하여라.



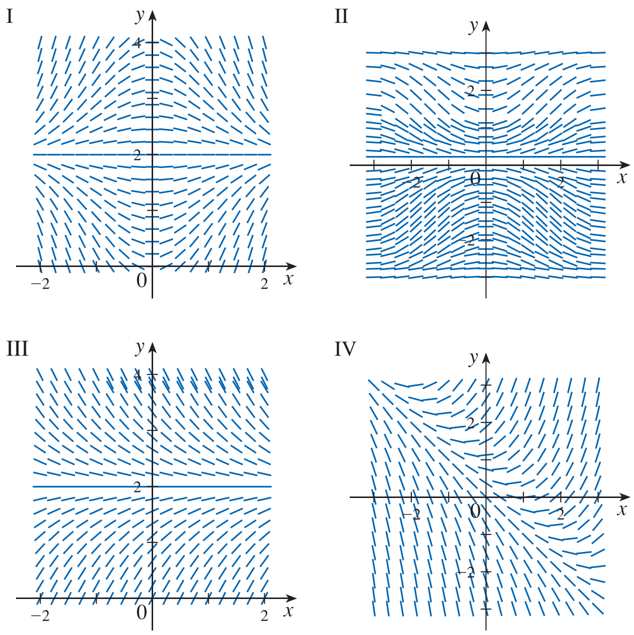
3-6 다음 미분방정식을 관련되는 (I~IV로 번호를 붙인) 방향장과 연결하고 그 이유를 말하여라.

3. $y' = 2 - y$

4. $y' = x(2 - y)$

5. $y' = x + y - 1$

6. $y' = \sin x \sin y$



7. (위의) I의 방향장을 이용하여 다음 초기조건을 만족하는 해의 그래프를 그려라.

(a) $y(0) = 1$ (b) $y(0) = 2.5$ (c) $y(0) = 3.5$

8. (위의) III의 방향장을 이용하여 다음 초기조건을 만족하는 해의 그래프를 그려라.

(a) $y(0) = 1$ (b) $y(0) = 2.5$ (c) $y(0) = 3.5$

9-10 다음 미분방정식의 방향장을 그리고 이것을 이용하여 해곡선 3개를 그려라.

9. $y' = \frac{1}{2}y$ **10.** $y' = x - y + 1$

11-14 다음 미분방정식의 방향장을 그리고 이것을 이용하여 주어진 점을 지나는 해곡선을 그려라.

11. $y' = y - 2x$, $(1, 0)$ **12.** $y' = xy - x^2$, $(0, 1)$

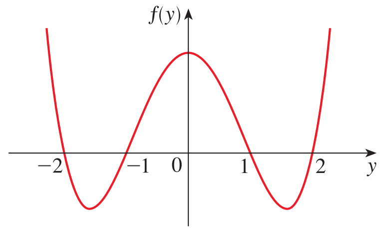
13. $y' = y + xy$, $(0, 1)$ **14.** $y' = x + y^2$, $(0, 0)$

T 15-16 컴퓨터를 이용해 다음 방정식에 대한 방향장을 그려라. 이것을 출력하여 (0, 1)을 지나는 해곡선을 그려라. 그리고 CAS를 이용하여 해곡선을 그려서 직접 그린 것과 비교하여라.

15. $y' = x^2 y - \frac{1}{2}y^2$ **16.** $y' = \cos(x + y)$

T 17. CAS를 사용하여 미분방정식 $y' = y^3 - 4y$에 대한 방향장을 그려라. 이것을 출력하여 초기조건 $y(0) = c$를 만족하는 해곡선을 그려라. 어떤 c값에 대하여 $\lim_{t\to\infty} y(t)$가 존재하는가? 가능한 극한값은 어떤 것들이겠는가?

18. f의 그래프가 다음과 같이 주어질 때 자율적 미분방정식 $y' = f(y)$에 대한 방향장을 그려라. 해의 극한 성질이 $y(0)$의 값에 어떻게 의존하는가?



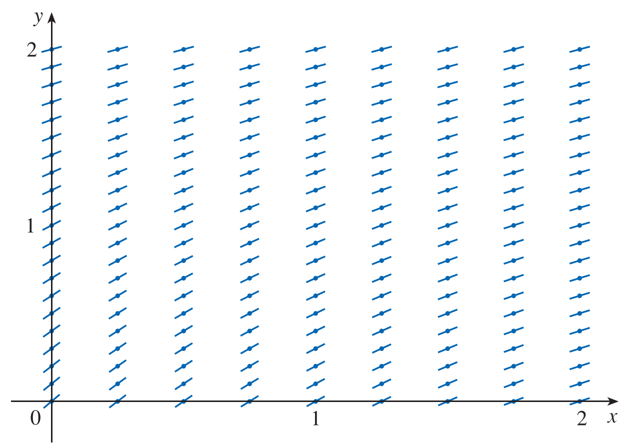
19. (a) 다음과 같은 단계 크기로 오일러 방법을 이용하여 $y(0.4)$의 값을 추정하여라. 여기서 y는 초깃값문제 $y' = y$, $y(0) = 1$의 해이다.

(i) $h = 0.4$ (ii) h = 0.2 (iii) h = 0.1

(b) (a)에서 초깃값문제의 정확한 해는 $y = e^x$임을 알고 있다. $y = e^x$, $0 \leq x \leq 0.4$의 그래프를 가능한 한 정확하게 그리고 (a)의 단계 크기를 이용하여 오일러 근사식을 그려라. (그림 11, 12, 13과 유사할 것이다.) 여러분의 그림을 (a)에서 추정한 값이 과대 추정인지 과소 추정인지를 결정하는 데 사용하여라.

(c) 오일러 방법에 대한 오차는 참값과 근삿값의 차이이다. 참값 $y(0.4) = e^{0.4}$를 추정하는 데 (a)에서 오일러 방법을 이용하여 만들어진 오차를 찾아라. 매번 단계 크기를 반으로 줄인다면 오차에 대하여 어떤 일이 일어나겠는가?

20. 미분방정식에 대한 방향장이 주어져 있다. 자를 이용해 원점을 지나는 해곡선에 대한 오일러 근사의 그래프를 그려라. 단계 크기 $h = 1$과 $h = 0.5$를 이용하여라. 오일러 근사는 과소 평가되는가, 또는 과대 평가되는가? 설명하여라.



21. 단계 크기가 0.5인 오일러 방법을 사용하여 초깃값문제 $y' = y - 2x$, $y(1) = 0$의 해에 대한 y의 근삿값 y_1, y_2, y_3, y_4를 계산하여라.

22. 단계 크기 0.2로 오일러 방법을 이용해 $y(x)$가 초깃값문제

$$y' = x^2 y - \frac{1}{2}y^2,\ y(0) = 1$$

의 해일 때 $y(1)$의 근삿값을 구하여라.

23. 단계 크기 0.1로 오일러 방법을 이용해 $y(x)$가 초깃값문제

$$y' = y + xy,\ y(0) = 1$$

의 해일 때 $y(0.5)$의 근삿값을 구하여라.

24. (a) 단계 크기 0.2로 오일러 방법을 이용해 $y(x)$가 초깃값문제

$$y' = \cos(x + y),\ y(0) = 0$$

의 해일 때 $y(0.6)$의 근삿값을 구하여라.

(b) 단계 크기 0.1로 (a)를 해결하여라.

T **25.** (a) 오일러 방법을 이용하여 $y(1)$을 계산하기 위한 계산기나 컴퓨터를 이용하여라. 여기서 $y(x)$는 다음 초깃값문제의 해이다.

$$\frac{dy}{dx} + 3x^2 y = 6x^2 \qquad y(0) = 3$$

(i) h = 1 (ii) h = 0.1

(iii) h = 0.01 (iv) h = 0.001

(b) $y = 2 + e^{-x^3}$이 이 미분방정식의 해임을 밝혀라.

(c) (a)의 단계 크기로 오일러 방법을 이용하여 $y(1)$을 계산한 오차를 찾아라. 단계 크기를 10으로 나누었을 때 그 오차에는 어떤 일이 일어나는가?

T **26.** (a) y가 초깃값문제

$$y' = x^3 - y^3 \qquad y(0) = 1$$

의 해일 때 단계 크기 0.01로 오일러 방법을 이용해 $y(2)$의 근삿값을 계산하여라.

(b) (a)의 답을 컴퓨터로 그린 해곡선에 나타나는 $y(2)$값과 비교하여라.

27. 다음 그림은 배터리, 커패시턴스가 C패럿(F)인 커패시터, 그리고 저항이 R옴(Ω)인 저항기를 가진 회로도이다. 커패시터에 떨어지는 전압이 Q/C이다. 여기서, Q는 단위가 쿨롬(coulomb, C)인 전하량이다. 이러한 경우 키르히호프의 법칙에 의하여

$$RI + \frac{Q}{C} = E(t)$$

가 주어진다. 그러나 $I = dQ/dt$이므로,

$$R\frac{dQ}{dt} + \frac{1}{C}Q = E(t)$$

를 얻는다. 저항이 5Ω, 커패시턴스가 0.05F, 그리고 배터리가 항상 60V의 전압을 가진다고 가정하자.

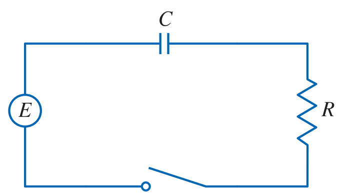
(a) 이 미분방정식의 방향장을 그려라.

(b) 전하량의 극한은 무엇인가?

(c) 평형해가 존재하는가?

(d) 초기전하량이 $Q(0) = 0$C일 때, 방향장을 이용하여 해곡선을 그려라.

(e) 초기전하량이 $Q(0) = 0$C일 때, 단계 크기 0.1로 오일러 방법을 이용하여 0.5초 후의 전하량을 추정하여라.



28. 9.1절의 연습문제 26에서 섭씨 20도의 방 안에서 섭씨 95도의 한 잔의 커피를 가정했다. 만약 커피 온도가 섭씨 70도일 때 커피는 분당 섭씨 1도의 비율로 차가워진다고 가정하자.

(a) 이 경우 미분방정식은 무엇이 되는가?

(b) 방향장을 그리고 이것을 이용해 초깃값문제에 대한 해곡선을 그려라. 온도의 극한값은 무엇인가?

(c) 단계 크기 $h = 2$분으로 오일러 방법을 이용해 10분 후의 커피 온도를 추정하여라.

9.3 변수분리형 방정식

1계 미분방정식을 기하학적 관점(방향장)과 수치적 관점(오일러 방법)으로 다루어 보았다. 기호적 관점에서 보면 어떠한가? 미분방정식의 해에 대하여 구체적인 공식을 얻을 수 있다면 환영할 일이다. 그러나 불행하게도 이것은 가능한 일이 아니다. 그러나 이 절에서는 명백하게 풀리는 특정한 미분방정식을 다루고자 한다.

■ 변수분리형 미분방정식

변수분리형 방정식(separable equation)은 dy/dx가 x만의 함수와 y만의 함수의 곱으로 표현되는 1계 미분방정식이다. 다시 말하면, 이것은

$$\frac{dy}{dx} = g(x)f(y)$$

인 형태로 적을 수 있다. 변수분리형이란 것은 우변이 x만의 함수와 y만의 함수로 '분리' 될 수 있다는 사실에서 나온다. 즉 $f(y) \neq 0$이면,

$$\boxed{1} \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{g(x)}{h(y)}$$

로 쓸 수 있다. 여기서 $h(y) = 1/f(y)$이다. 이 미분방정식을 풀기 위해서, 미분 형식

$$h(y)\, dy = g(x)\, dx$$

로 다시 쓰면 y에 관한 모든 것은 방정식의 좌변에, x에 관한 모든 것은 우변에 있게 된다. 그 다음 방정식의 양변을 적분하여 해를 얻는다.

$$\boxed{2} \qquad \int h(y)\, dy = \int g(x)\, dx$$

변수분리형 미분방정식을 푸는 기술은 1690년 제임스 베르누이(James Bernoulli)가 진자에 대한 문제를 푸는 데 최초로 사용하였고, 또 라이프니츠가 1691년에 호이겐스한테 보낸 편지에도 사용하였다. 한편 요한 베르누이가 1694년에 발간한 논문에서 일반적인 방법을 설명하였다.

방정식 $\boxed{2}$는 y를 x의 음함수로 정의하고 있다. 어떤 경우에는 y를 x로 풀 수도 있다.

이 과정은 연쇄법칙을 사용해서 밝힐 수 있다. h와 g가 방정식 $\boxed{2}$를 만족한다면 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\frac{d}{dx}\left(\int h(y)\, dy\right) = \frac{d}{dx}\left(\int g(x)\, dx\right)$$

$$\frac{d}{dy}\left(\int h(y)\, dy\right)\frac{dy}{dx} = g(x)$$

$$h(y)\frac{dy}{dx} = g(x)$$

따라서 방정식 $\boxed{1}$이 유도되었다.

예제 1

(a) 미분방정식 $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x^2}{y^2}$을 풀어라.

(b) 초기조건 $y(0) = 2$를 만족하는 미분방정식의 해를 구하여라.

그림 1은 예제 1의 미분방정식의 해집합의 몇 개의 원소에 대한 그래프이다.

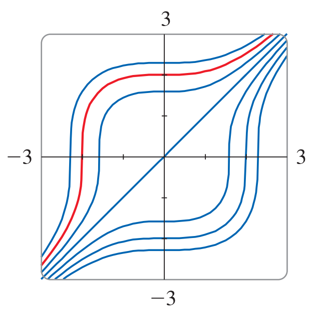


그림 1

풀이

(a) 미분 형식으로 쓰고 양변을 적분하면,

$$y^2 dy = x^2 dx$$

$$\int y^2 dy = \int x^2 dx$$

$$\tfrac{1}{3}y^3 = \tfrac{1}{3}x^3 + C$$

여기서 C는 임의의 상수이다. (좌변에 C_1을 쓰고 우변에 상수 C_2를 쓸 수 있다. 그러나 이러한 상수들은 $C = C_2 - C_1$로 묶을 수 있다.)

y에 대하여 풀면 $y = \sqrt[3]{x^3 + 3C}$이며 $y = \sqrt[3]{x^3 + K}$와 같이 표현할 수도 있다. 여기서 $K = 3C$(C와 마찬가지로 K도 상수)이다.

(b) (a)에 나와 있는 일반해에 $x = 0$을 대입하면 $y(0) = \sqrt[3]{K}$를 갖는다. 초기조건 $y(0) = 2$를 만족하기 위한 K값은 8이다. 따라서 초기조건을 만족하는 해는 $y = \sqrt[3]{x^3 + 8}$이다. ■

어떤 컴퓨터 소프트웨어는 음함수 방정식으로 정의된 곡선을 구성할 수 있다. 그림 2는 예제 2의 미분방정식의 해 몇 개를 보여준다. 곡선의 왼쪽에서 오른쪽으로 C의 값은 3, 2, 1, 0, −1, −2, −3이다.

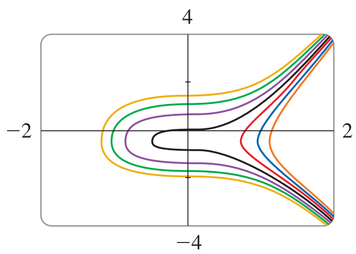


그림 2

예제 2 미분방정식 $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{6x^2}{2y + \cos y}$을 풀어라.

풀이 주어진 미분방정식을 미분 형식으로 쓰고 양변을 적분하면,

$$(2y + \cos y)\,dy = 6x^2\,dx$$

$$\int (2y + \cos y)\,dy = \int 6x^2\,dx$$

$$y^2 + \sin y = 2x^3 + C \qquad \boxed{3}$$

를 얻는다. 여기서 C는 임의의 상수이다. 방정식 $\boxed{3}$은 음함수로 나타낸 일반해이다. 이러한 경우에 y를 x의 양함수로 나타낼 수 없다. ■

예제 3 방정식 $y' = x^2 y$를 풀어라.

풀이 먼저 이 방정식을 라이프니츠 기호로 다시 쓰자.

$$\frac{dy}{dx} = x^2 y$$

예제 3의 방정식과 같은 미분방정식의 해에 대한 고유성 정리에서 두 해가 하나의 x값에서 일치하면 모든 x값에서 일치해야 한다. (두 해곡선은 동일하거나 절대 교차하지 않는다.) $y = 0$은 예제 3의 미분방정식의 해이므로 다른 모든 해는 모든 x에 대해 $y(x) \neq 0$을 가져야 한다.

상수 함수 $y = 0$이 주어진 미분방정식의 해임을 쉽게 확인할 수 있다. $y \neq 0$이면 다음과 같이 미분 표기법으로 방정식을 다시 쓰고 적분할 수 있다.

$$\frac{dy}{y} = x^2\,dx \qquad y \neq 0$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int x^2\,dx$$

$$\ln|y| = \frac{x^3}{3} + C$$

이 방정식은 y를 x의 음함수로 정의한다. 그러나 이러한 경우에는 다음과 같이 y에 관하여 풀 수 있다.

$$|y| = e^{\ln|y|} = e^{(x^3/3)+C} = e^C e^{x^3/3}$$

따라서

$$y = \pm e^C e^{x^3/3}$$

이다. 그러므로 일반해는

$$y = Ae^{x^3/3}$$

형태로 쓸 수 있다. 여기서 A는 임의의 상수($A = e^C$ 또는 $A = -e^C$ 또는 $A = 0$)이다. ■

그림 3은 예제 3의 미분방정식에 대한 방향장을 보여준다. 이것을 A의 다양한 값에 대한 그래프 해를 구하기 위해 방정식 $y = Ae^{x/3}$을 이용한 그림 4와 비교하여라. 만약 방향장을 이용해 절편이 5, 2, 1, -1, -2인 해곡선을 그린다면 이것들은 그림 4의 곡선들과 유사할 것이다.

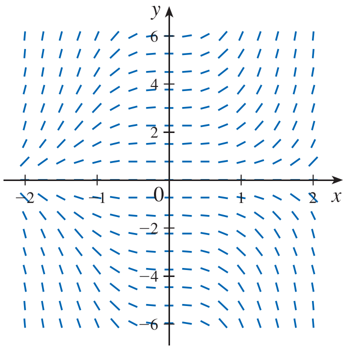


그림 3

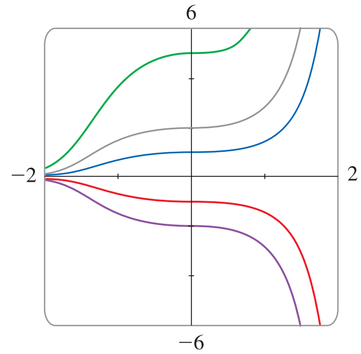


그림 4

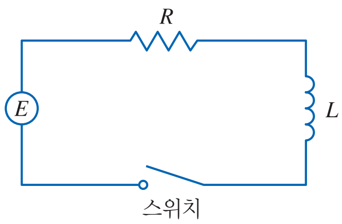


그림 5

예제 4 9.2절에서 그림 5의 전기회로에 대하여 전류 $I(t)$를 다음과 같은 미분방정식으로 나타내었다.

$$L\frac{dI}{dt} + RI = E(t)$$

저항이 12Ω, 인덕턴스가 4H, 배터리가 일정한 60V의 전압, 그리고 $t = 0$일 때 개폐기가 켜진다. 이 회로에서 전류에 대한 식을 찾아라. 전류의 극한값은 무엇인가?

풀이 $L = 4$, $R = 12$ 그리고 $E(t) = 60$으로, 이 방정식은

$$4\frac{dI}{dt} + 12I = 60 \qquad \text{즉} \qquad \frac{dI}{dt} = 15 - 3I$$

가 되고, 따라서 초깃값문제는

$$\frac{dI}{dt} = 15 - 3I \qquad I(0) = 0$$

이다. 이 방정식이 변수분리형임을 알 수 있어서 다음과 같이 푼다.

$$\int \frac{dI}{15 - 3I} = \int dt \qquad (15 - 3I \neq 0)$$

$$-\tfrac{1}{3}\ln|15 - 3I| = t + C$$

$$|15 - 3I| = e^{-3(t+C)}$$

$$15 - 3I = \pm e^{-3C}e^{-3t} = Ae^{-3t}$$

$$I = 5 - \tfrac{1}{3}Ae^{-3t}$$

그림 6은 예제 4의 해(전류)가 어떻게 극한값에 접근하는지를 보여준다. 9.2절의 그림 10과 비교하면 방향장으로부터 아주 정확한 해곡선을 그릴 수 있다는 것을 알 수 있다.

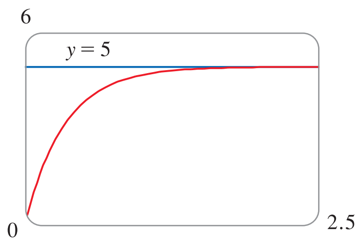


그림 6

$I(0) = 0$이므로, $5 - \frac{1}{3}A = 0$이고 $A = 15$이다. 그러므로 해는

$$I(t) = 5 - 5e^{-3t}$$

이다. 전류의 극한값은

$$\lim_{t\to\infty} I(t) = \lim_{t\to\infty}(5 - 5e^{-3t}) = 5 - 5\lim_{t\to\infty} e^{-3t} = 5 - 0 = 5$$

이다. ■

■ 직교절선

곡선족의 **직교절선**(orthogonal trajectory)은 곡선족의 모든 곡선과 직교, 즉 직각으로 만나는 곡선이다(그림 7). 예를 들면, 원점을 지나는 직선족 $y = mx$의 원소는 중심이 원점인 동심원족 $x^2 + y^2 = r^2$의 직교절선이다(그림 8). 두 족은 각각 서로의 직교절선이라고 할 수 있다.

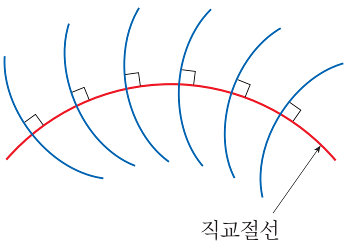


그림 7

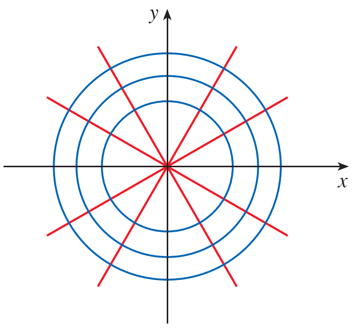


그림 8

예제 5 곡선족 $x = ky^2$(k는 임의 상수)의 직교절선을 구하여라.

풀이 곡선들 $x = ky^2$은 대칭축이 x축인 포물선족이다. 먼저 이 곡선족에 의해 만족되는 간단한 미분방정식을 찾아보자. $x = ky^2$을 미분하면

$$1 = 2ky\frac{dy}{dx} \qquad 즉 \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2ky}$$

을 얻는다. 이 미분방정식은 k에 종속되지만, k의 모든 값에 대해 동시에 유효한 방정식이 필요하다. k를 소거하기 위해서 포물선 $x = ky^2$으로부터 $k = x/y^2$를 얻는다. 그러면 미분방정식은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2ky} = \frac{1}{2\dfrac{x}{y^2}y} \qquad 즉 \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{y}{2x}$$

이것은 한 포물선 위의 임의의 점 (x, y)에서의 접선의 기울기가 $y' = y/(2x)$임을 의미한다. 직교절선에 대해서 접선의 기울기는 위 기울기의 음의 역수가 되어야 한다. 그러므로 직교절선의 미분방정식

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2x}{y}$$

를 만족해야 한다. 이 미분방정식은 변수분리형이며 다음과 같이 푼다.

$$\int y\,dy = -\int 2x\,dx$$

$$\frac{y^2}{2} = -x^2 + C$$

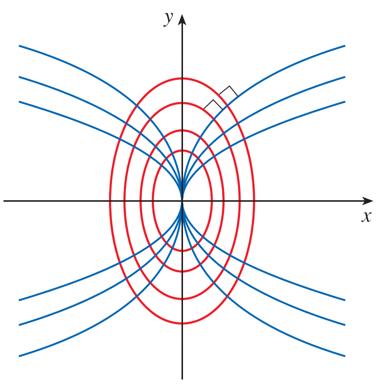


그림 9

$$\boxed{4} \qquad x^2 + \frac{y^2}{2} = C$$

여기서 C는 임의의 상수이다. 따라서 직교절선들은 방정식 $\boxed{4}$로 주어지는 타원족이고 그림 9와 같이 그려진다. ■

직교절선들은 물리학의 여러 분야에서 일어난다. 예를 들면, 정전기장에서 전력선들은 등전위선들에 직교한다. 또한 기체역학에서 유선들은 속도-등위곡선들의 직교절선들이다.

혼합문제

전형적인 혼합문제는 어떤 물질(예: 소금)의 완전히 혼합된 용액으로 채워진 일정한 용량의 탱크와 관련이 있다. 주어진 농도의 용액이 일정한 비율로 탱크에 들어가고 완전히 섞인 혼합물은 일정한 비율로 흘러 나간다. 여기서 이 비율은 들어가는 비율과는 달라질 수 있다. 만약 $y(t)$를 시각 t에서 탱크 안의 물질의 양이라고 둔다면, $y'(t)$는 그 물질이 더해지는 율에서 물질이 없어지는 율을 뺀 것이다. 이러한 상황의 수학적 표현은 가끔 1계 변수분리형 미분방정식으로 나타난다. 화학반응, 호수에 오염물질의 방류, 혈관 속으로 약의 주사와 같은 많은 현상의 모형을 만드는 데 똑같은 형태의 추론을 사용할 수 있다.

예제 6 5000L의 물이 들어 있는 탱크에 20kg의 소금이 녹아 있다. 물 1L당 0.03kg의 소금이 들어 있는 소금물이 분당 25L의 비율로 탱크 안으로 서서히 흘러 들어가고 탱크 속의 소금물이 같은 비율로 탱크로부터 서서히 흘러 나간다. 탱크 속에서 소금과 물이 완벽하게 섞인다고 가정할 때 30분 후에 얼마나 많은 소금이 탱크 안에 남아 있겠는가?

풀이 $y(t)$를 t분 후의 소금량(kg)이라 두자. $y(0) = 20$이고 우리가 찾는 것은 $y(30)$이다. $y(t)$를 만족하는 미분방정식을 찾아보자. dy/dt는 소금량의 변화율이다. 따라서

$$\boxed{5} \qquad \frac{dy}{dt} = (\text{들어가는 율}) - (\text{나가는 율})$$

이다. 여기서 (들어가는 율)은 소금이 탱크 속으로 들어가는 율이고, (나가는 율)은 탱크 밖으로 소금이 나가는 율이다. 따라서

$$\text{들어가는 율} = \left(0.03\,\frac{\text{kg}}{\text{L}}\right)\left(25\,\frac{\text{L}}{\text{min}}\right) = 0.75\,\frac{\text{kg}}{\text{min}}$$

를 얻는다. 탱크 속에는 항상 5000L의 용액이 들어 있다. 그래서 시각 t에서의 농도는 $y(t)/5000(\text{kg/L})$이다. 25L/min의 비율로 소금물이 흘러 나가기 때문에,

$$\text{나가는 율} = \left(\frac{y(t)}{5000}\,\frac{\text{kg}}{\text{L}}\right)\left(25\,\frac{\text{L}}{\text{min}}\right) = \frac{y(t)}{200}\,\frac{\text{kg}}{\text{min}}$$

를 가진다. 따라서 방정식 $\boxed{5}$로부터

$$\frac{dy}{dt} = 0.75 - \frac{y(t)}{200} = \frac{150 - y(t)}{200}$$

를 얻는다. 이 변수분리형 미분방정식을 풀면,

$$\int \frac{dy}{150 - y} = \int \frac{dt}{200}$$

$$-\ln|150 - y| = \frac{t}{200} + C$$

이다. $y(0) = 20$이므로 $-\ln 130 = C$이다. 따라서

$$-\ln|150 - y| = \frac{t}{200} - \ln 130$$

그림 10은 예제 6의 함수의 그래프를 보여준다. 시간이 지남에 따라 소금양은 150kg에 접근함을 주목하여라.

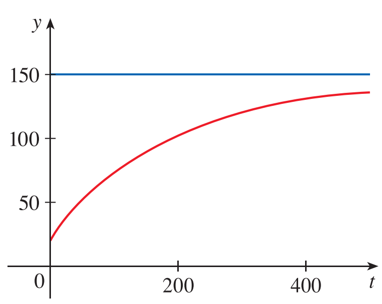


그림 10

이므로 $|150 - y| = 130e^{-t/200}$이다. $y(t)$는 연속이고, $y(0) = 20$ 그리고 우변은 0이 될 수 없기 때문에 $150 - y(t)$는 항상 양수이다. 따라서 $|150 - y| = 150 - y$이고

$$y(t) = 150 - 130e^{-t/200}$$

이다. 30분 후의 소금양은

$$y(30) = 150 - 130e^{-30/200} \approx 38.1 \text{ kg}$$

이다. ■

9.3 연습문제

1-12 다음 미분방정식을 풀어라.

1. $\dfrac{dy}{dx} = 3x^2y^2$ **2.** $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x}{y^4}$

3. $\dfrac{dy}{dx} = x\sqrt{y}$ **4.** $xy' = y + 3$

5. $xyy' = x^2 + 1$ **6.** $y' + xe^y = 0$

7. $(e^y - 1)y' = 2 + \cos x$ **8.** $\dfrac{dy}{dx} = 2x(y^2 + 1)$

9. $\dfrac{dp}{dt} = t^2p - p + t^2 - 1$ **10.** $\dfrac{dz}{dt} + e^{t+z} = 0$

11. $\dfrac{d\theta}{dt} = \dfrac{t\sec\theta}{\theta e^{t^2}}$ **12.** $\dfrac{dH}{dR} = \dfrac{RH^2\sqrt{1 + R^2}}{\ln H}$

13-20 주어진 초기조건을 만족하는 미분방정식의 해를 구하여라.

13. $\dfrac{dy}{dx} = xe^y, \quad y(0) = 0$ **14.** $\dfrac{dP}{dt} = \sqrt{Pt}, \quad P(1) = 2$

15. $\dfrac{dA}{dr} = Ab^2\cos br, \quad A(0) = b^3$

16. $x^2y' = k\sec y, \quad y(1) = \pi/6$

17. $\dfrac{du}{dt} = \dfrac{2t + \sec^2 t}{2u}, \quad u(0) = -5$

18. $x + 3y^2\sqrt{x^2 + 1}\,\dfrac{dy}{dx} = 0, \quad y(0) = 1$

19. $x\ln x = y\left(1 + \sqrt{3 + y^2}\right)y', \quad y(1) = 1$

20. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x\sin x}{y}, \quad y(0) = -1$

21. 점 $(0, 2)$를 지나고 (x, y)에서의 기울기가 x/y인 곡선의 방정식을 구하여라.

22. $f'(x) = xf(x) - x$이고 $f(0) = 2$를 만족하는 함수 f를 구하여라.

23. 변수 $u = x + y$의 변화율을 이용하여 미분방정식 $y' = x + y$의 해를 구하여라.

24. 변수 $v = y/x$의 변화율을 이용하여 미분방정식 $xy' = y + xe^{y/x}$의 해를 구하여라.

25. (a) 미분방정식 $y' = 2x\sqrt{1 - y^2}$을 풀어라.

(b) 초깃값문제 $y' = 2x\sqrt{1 - y^2}$, $y(0) = 0$을 풀고 그래프를 그려라.

(c) 초깃값문제 $y' = 2x\sqrt{1 - y^2}$, $y(0) = 2$는 해를 갖는가? 설명하여라.

26. 방정식 $e^{-y}y' + \cos x = 0$을 풀고 해족의 몇 개의 원소를 그려라. 상수 C가 변함에 따라 해곡선은 어떻게 변하는가?

27. 초깃값문제 $y' = (\sin x)/\sin y$, $y(0) = \pi/2$를 풀고 (음함수로 정의된) 해의 그래프를 그려라.

28. 미분방정식 $y' = x\sqrt{x^2 + 1}/(ye^y)$를 풀고 (음함수로 정의된) 해족의 몇 가지 원소를 그려라. 상수 C가 변할 때 해곡선은 어떻게 변하는가?

T 29-30

(a) 컴퓨터를 이용하여 미분방정식의 방향장을 그려라. 미분방정식을 풀지 말고 출력하여 몇 개의 해곡선을 그려 보아라.

(b) 미분방정식을 풀어라.

(c) (b)로부터 얻은 몇 개의 해들을 그려라. (a)로부터 얻은 곡선과 비교하여라.

29. $y' = y^2$ **30.** $y' = xy$

31-34 다음 곡선족의 직교절선들을 찾아라. 같은 화면에 각 족의 몇 개의 직교절선들을 그려라.

31. $x^2 + 2y^2 = k^2$

32. $y^2 = kx^3$

33. $y = \dfrac{k}{x}$

34. $y = \dfrac{1}{x + k}$

35-37 **적분방정식**(Integral Equations)이란 미지의 함수 $y(x)$와 $y(x)$를 포함하는 적분으로 구성되어 있는 방정식을 말한다. 다음 주어진 적분방정식을 풀어라. (**힌트**: 적분방정식에 들어 있는 초깃값을 사용하여라.)

35. $y(x) = 2 + \int_2^x [t - ty(t)]\, dt$

36. $y(x) = 2 + \int_1^x \dfrac{dt}{ty(t)}, \quad x > 0$

37. $y(x) = 4 + \int_0^x 2t\sqrt{y(t)}\, dt$

38. $f(3) = 2$이고 $(t^2 + 1) f'(t) + [f(t)]^2 + 1 = 0$, $t \neq 1$을 만족하는 함수를 구하여라. (**힌트**: $\tan(x + y)$에 대한 탄젠트 덧셈정리를 이용하여라.)

39. 시각 t에서 전하량에 대한 표현식을 찾기 위하여 9.2절의 연습문제 27의 초깃값문제를 풀어라. 전하량의 극한을 구하여라.

40. 9.2절의 연습문제 28에서 섭씨 20도의 방 안에 있는 섭씨 95도의 커피 한 잔의 모형을 논의했다. 미분방정식을 풀어 시각 t에서의 커피 온도에 대한 표현을 찾아라.

41. 9.1절의 연습문제 27에서 다음 미분방정식

$$\frac{dP}{dt} = k(M - P)$$

로 학습에 대한 공식의 모형을 만들었다. 여기서 $P(t)$는 훈련 시간 t 후에 익숙하게 배우는 어떤 개체의 이행 정도를 측정하고, M은 이행 정도의 최고 수준이고, 그리고 k는 양의 상수이다. $P(t)$에 대한 표현식을 찾기 위하여 이 미분방정식을 풀어라. 이 표현식의 극한은 무엇이겠는가?

42. 기본적인 화학 반응에서 두 반응액 A와 B의 단일 분자는 생산물 C 분자를 형성한다(A + B → C). 질량 운동의 법칙에 따르면 반응률은 A와 B의 농도의 곱에 비례한다.

$$\frac{d[\mathrm{C}]}{dt} = k[\mathrm{A}][\mathrm{B}]$$

(3.7절의 예제 4 참조) 따라서 만약 초기 농도가 $[\mathrm{A}] = a$ moles/L이고 $[\mathrm{B}] = b$ moles/L이고 $x = [\mathrm{C}]$라 쓰면,

$$\frac{dx}{dt} = k(a - x)(b - x)$$

를 얻는다.

(a) $a \neq b$라 가정하고, t의 함수로서 x를 구하여라. C의 초기 농도가 0이라는 사실을 이용하여라.

(b) $a = b$라 가정할 때 $x(t)$를 구하여라. 만약 20초 후에 $[\mathrm{C}] = \frac{1}{2}a$라는 것이 알려져 있다면 $x(t)$에 대한 이 표현은 어떻게 단순화되는가?

43. 연습문제 42의 상황과 다르게, 실험에 의하면 반응 $H_2 + Br_2 \rightarrow 2HBr$은 비율 법칙

$$\frac{d[\mathrm{HBr}]}{dt} = k[\mathrm{H_2}][\mathrm{Br_2}]^{1/2}$$

를 만족하고 따라서 이 반응에 대해 미분방정식은 $x = [\mathrm{HBr}]$이고 a와 b가 수소와 브롬의 초기 농도일 때,

$$\frac{dx}{dt} = k(a - x)(b - x)^{1/2}$$

이 된다.

(a) $a = b$일 때 x를 t의 함수로 구하여라. $x(0) = 0$임을 이용하여라.

(b) $a > b$일 때 t를 x의 함수로 구하여라. (**힌트**: 적분을 계산할 때 $u = \sqrt{b - x}$로 치환하여라.)

44. 반지름이 1m인 구의 온도가 15°C이다. 이것이 반지름이 2m이고 온도가 25°C인 동심구의 내부에 놓여 있다. 구의 공통 중심으로부터 거리 r에서의 온도 $T(r)$은 미분방정식

$$\frac{d^2T}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{dT}{dr} = 0$$

을 만족한다. 만약 $S = dT/dr$이라 하면, S는 1계 미분방정식을 만족한다. 이것을 풀어서 구 사이의 온도 $T(r)$에 대한 표현을 구하여라.

45. 포도당 용액은 일정한 비율 r로 정맥을 통하여 혈관 속으로 공급된다. 포도당이 많아짐에 따라, 농도를 적절하게 유지하기 위하여 다른 물질로 바뀌고 어떤 비율로 혈관으로부터 빠져 나온다. 그래서 혈관 속 포도당 용액의 농도 $C = C(t)$의 모형은

$$\frac{dC}{dt} = r - kC$$

이다. 여기서 k는 양의 상수이다.

(a) 시간 $t = 0$에서의 농도가 C_0이라고 가정하여라. 이 미분방정식을 풀어서 임의의 시각 t에서의 농도를 결정하여라.

(b) $C_0 < r/k$를 가정하여 $\lim_{t\to\infty} C(t)$를 찾고 답을 설명하여라.

46. 어떤 조그만 국가에서 총 100억 달러의 지폐가 유통되고 있고 매일 5억 달러가 국가의 은행으로 들어온다. 정부는 구화폐가 은행에 들어오는 대로 새 지폐로 바꿔줌으로써 새로운 화폐를 만들기로 결정하였다. $x = x(t)$를 시간 t에 유통되고 있는 새 화폐의 양이라 놓자. $x(0) = 0$이다.

(a) 새 화폐의 유통의 '흐름'을 나타내는 수학적 모형을 초깃값 문제의 형태로 구성하여라.

(b) (a)에서 찾은 초깃값문제를 풀어라.

(c) 새 화폐가 유통의 90%를 차지하려면 얼마나 걸리겠는가?

47. 탱크에 15kg의 소금이 녹아 있는 소금물 1000L가 채워져 있다. 순수한 물이 10L/min의 비율로 탱크에 들어간다. 용액이 완전히 섞여 같은 비율로 탱크로부터 빠져 나온다. (a) t분 후와 (b) 20분 후에 얼마나 많은 소금이 탱크에 남아 있는가?

48. 공기의 부피가 180m^3인 방 안에 처음 0.15%의 이산화탄소를 포함하고 있다. 0.05%의 이산화탄소를 포함하는 신선한 공기는 2m^3/min의 비율로 방 안에서 순환하고 혼합공기는 같은 비율로 빠져나간다. 방 안에서 이산화탄소의 비중(%)을 시간의 함수로 나타내어라. 시간이 지나면 어떤 일이 벌어지는가?

49. 맥주 2000L통은 4% 알코올을 함유하고 있다. 6% 알코올을 함유하고 있는 맥주를 20L/min의 비율로 위의 맥주통에 부었고 혼합된 맥주는 같은 비율로 쏟아붓고 있다. 한 시간이 지난 후에 알코올의 비중은 몇 %인가?

50. 탱크에 1000L의 순수한 물이 담겨 있다. 리터당 0.05kg의 소금을 포함한 소금물이 5L/min의 비율로 탱크로 유입된다. 또한 리터당 0.04kg의 소금을 포함한 소금물이 10L/min의 비율로 탱크로 유입된다. 용액은 탱크 안에서 완전히 섞인 다음 15L/min의 비율로 탱크 밖으로 빠져 나간다. (a) t분 후와 (b) 1시간 후에 탱크 안에 남아 있는 소금의 양은?

51. 빗방울은 떨어지면서 크기가 커진다. 그래서 t시각에 질량 m은 t의 함수, 즉 $m(t)$이다. 질량이 커지는 비율은 어떤 양의 상수 k에 대해 $km(t)$이다. 뉴턴의 운동법칙을 빗방울에 적용할 때 $(mv)' = gm$을 얻는다. 단, v는 빗방울의 속도(아래 방향)이고 g는 중력가속도이다. 빗방울의 **마지막 속도**(Terminal Velocity)는 $\lim_{t\to\infty} v(t)$이다. g와 k로 마지막 속도에 대한 식을 구하여라.

52. 질량이 m인 물체가 속도함수인 힘을 갖는 운동을 견디는 매개체를 수평으로 움직이고 있다. 즉 $v = v(t)$와 $s = s(t)$가 각각 시간 t에서의 물체의 속도와 위치일 때

$$m\frac{d^2s}{dt^2} = m\frac{dv}{dt} = f(v)$$

예를 들어, 물 위를 움직이는 보트를 생각하여라.

(a) 견디는 힘이 속도에 비례한다고 가정하자. 즉 k가 상수일 때, $f(v) = -kv$(이 모형은 v의 작은 값에 대해 적당하다.)이다. $v(0) = v_0$과 $s(0) = s_0$을 v와 s의 초깃값이라 하자. 시간이 t일 때 v와 s를 구하여라. 시간 $t = 0$에서부터 물체가 움직인 총 거리는 얼마인가?

(b) v의 큰 값에 대해 더 좋은 모형은 견디는 힘이 속도의 제곱에 비례한다고 가정함으로써 얻어진다. 즉 $k > 0$일 때, $f(v) = -kv^2$(이 모형은 뉴턴에 의해 처음으로 제시되었다)이다. v_0과 s_0을 v와 s의 초깃값이라 하자. 시간 t에서의 v와 s를 결정하여라. 이 경우 물체가 움직인 총 거리는 얼마인가?

53. 생물학에서 **상대 생장**(Allometric Growth)은 유기체의 부분들의 크기 사이의 관계(예를 들어, 머리의 길이와 몸의 길이)를 의미한다. $L_1(t)$와 $L_2(t)$가 연령 t의 유기체에서 두 기관의 크기를 나타내는 함수라 할 때, 특정 성장 비율이 비례한다면 L_1과 L_2는 다음 생장 법칙을 만족한다.

$$\frac{1}{L_1}\frac{dL_1}{dt} = k\frac{1}{L_2}\frac{dL_2}{dt}$$

(여기서 k는 상수)

(a) 생장 법칙을 이용하여 L_1과 L_2의 관계를 나타내는 미분방정식을 나타내고, 미분방정식의 해를 구하여 함수 L_1을 L_2로 나타내어라.

(b) 단세포 조류의 여러 종의 연구에서 B(세포 생물량)와 V(세포 부피)와 관련한 상대 성장 법칙에서의 비례상수는 $k = 0.0794$로 밝혀졌다. B를 V의 함수로 나타내어라.

54. 종양 증가 모델은 곰페츠 방정식

$$\frac{dV}{dt} = a(\ln b - \ln V)V$$

을 따른다. 여기서 a와 b는 양의 상수이고 V는 mm^3 단위로 측정한 종양의 부피이다.

(a) 시간의 함수로서 종양 부피의 해를 구하여라.

(b) 초기 종양 부피가 $V(0) = 1\text{mm}^3$인 해를 구하여라.

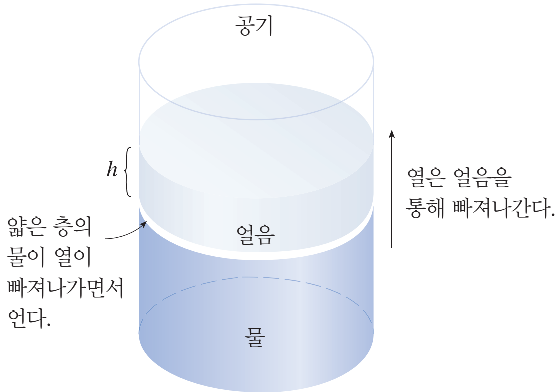
55. $A(t)$를 t시각의 조직 배양의 넓이라 하고 M을 성장이 완료되었을 때 조직의 마지막 넓이라 한다. 대부분의 세포분열은 조직의 표면에서 일어나며 표면에 있는 세포 개수는 $\sqrt{A(t)}$에 비례한다. 따라서 조직의 성장에 대한 합당한 모델은 그 넓이의 성장률이 $\sqrt{A(t)}$와 $M - A(t)$에 공동으로 비례한다는 것이다.

(a) 미분방정식으로 나타내고, 그것을 사용하여 $A(t) = \frac{1}{3}M$일 때 조직이 가장 빨리 성장한다는 것을 보여라.

(b) 이 미분방정식을 풀어 $A(t)$에 대한 표현식을 찾아라. 컴퓨터를 이용하여 적분을 구하여라.

56. **해빙**(Sea Ice) 많은 요인이 해빙의 형성과 성장에 영향을 미친다. 이 연습문제에서 해빙의 두께가 시간이 지남에 따라 공기와 바닷물의 온도에 어떻게 영향을 받는지 설명하는 단순화된 모델을 개발한다. 1.2절에서 언급했듯이 좋은 모델은 수학적 계산을 허용할 만큼 현실을 단순화하면서도 가치 있는 결론을 제공하기에 충분히 정확하다.

그림과 같이 공기/얼음/물의 기둥을 생각해보라. 얼음/공기 경계면에서 온도 T_a(°C)가 일정하고(T_a가 해수의 빙점보다 낮음) 얼음/물 경계면의 온도 T_w도 일정하게 유지된다고 가정하자(여기서 T_w가 물의 어는점보다 더 크다).



에너지는 줄(J)로 측정된 열 Q의 형태로 따뜻한 해수에서 더 차가운 공기로 얼음을 통해 위쪽으로 전달된다. 푸리에의 열전도 법칙에 의해 열전달율 dQ/dt는 미분방정식

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{kA}{h}(T_w - T_a)$$

을 만족한다. 여기서 k는 얼음의 열전도율이라고 하는 상수, A는 기둥의 (수평) 단면적(m^2), h는 얼음 두께(m)이다.

(a) 해수에서 소량의 열(ΔQ)이 손실되면 얼음/물 경계면에서 얇은 두께(Δh)의 물층이 동결된다. 해수의 질량 밀도 D(kg/m^3)는 온도에 따라 다르지만 경계면에서 온도가 일정하므로(0°C 근처) D는 일정하다고 가정할 수 있다. L을 해수의 잠열이라고 하고, 1kg의 물을 얼리는 데 필요한 열 손실량으로 정의하자. $\Delta h \approx (1/LAD)\Delta Q$이므로 $\dfrac{dh}{dQ} = \dfrac{1}{LAD}$임을 보여라.

(b) 연쇄 법칙을 사용하여 미분방정식

$$\frac{dh}{dt} = \frac{k}{LDh}(T_w - T_a)$$

를 작성하고 이 방정식이 왜 얇은 얼음이 두꺼운 얼음보다 더 빠르게 성장하여 얼음의 균열이 "치유"되는 경향이 있고 빙원(ice field)의 두께가 시간이 지남에 따라 균일해지는 경향이 있다는 사실을 예측하는지 이유를 설명하여라.

(c) 시각 $t = 0$일 때 얼음 두께가 h_0이면 (b)의 미분방정식을 풀어서 시각 t에서의 얼음 두께에 대한 모델을 찾아라.

Source: Adapted from M. Freiberger, "Maths and Climate Change: The Melting Arctic," *Plus* (2008): http://plus.maths.org/content/maths-and-climate-change-melting-arctic. Accessed March 9, 2019.

57. 탈출속도 뉴턴의 일반 중력법칙에 따르면 지구 표면으로부터 수직 위로 투시된 질량 m의 물체에 미치는 중력 힘은 $x = x(t)$가 시간 t에서 지표면에서 물체까지의 거리이고, R이 지구의 반지름, g가 중력가속도일 때,

$$F = \frac{mgR^2}{(x + R)^2}$$

이다. 또한 뉴턴의 제2법칙 $F = ma = m(dv/dt)$에 의해

$$m\frac{dv}{dt} = -\frac{mgR^2}{(x + R)^2}$$

을 얻는다.

(a) 로켓이 초기속도 v_0로 수직 위로 쏘아 올려졌다고 가정하자. h를 물체가 표면 위의 최고로 오를 수 있는 높이라 할 때

$$v_0 = \sqrt{\frac{2gRh}{R + h}}$$

임을 보여라.

(**힌트**: 연쇄법칙에 의해 $m(dv/dt) = mv(dv/dx)$이다.)

(b) $v_e = \lim_{h\to\infty} v_0$를 계산하여라. 이 극한을 지구 **탈출속도**(Escape Velocity)라 한다.

(c) $R = 6370$km와 $g = 9.8 m/s^2$을 이용해 v_e를 초당 m와 초당 km의 단위로 바꾸어라.

응용 프로젝트 | 탱크에서 물이 얼마나 빨리 빠질가?

만일 물(또는 다른 액체)을 탱크에서 뺀다면 처음에는(물의 깊이가 최고일 때) 흐름이 최고조에 달할 것이고 물의 수위가 점점 감소하며 흐름도 점점 감소할 것이다. 하지만 탱크에서 물이 완전히 빠질 때까지 시간이 얼마나 걸리겠는가와 스프링쿨러를 작동하기 위하여 최소한의 수압을 유지하려면 얼마나 많은 물이 있어야 하는가라는 공학자의 질문에 답하기 위하여 그 흐름이 감소하는 정확한 수학적 묘사가 필요하다.

$h(t)$와 $V(t)$를 각각 시각 t에서 탱크의 물의 높이와 부피라고 하자. 만일 물이 탱크의 밑바닥에 있는 구멍을 통해 샌다고 하면 토리첼리의 법칙에 따라

$$\boxed{1} \qquad \frac{dV}{dt} = -a\sqrt{2gh}$$

이다. 여기서 g는 중력에 의한 가속도이다. 그래서 탱크로부터 물이 흐르는 비율은 물의 높이의 제곱근에 비례한다.

1. (a) 탱크의 높이가 2m이고 반지름이 1m인 원통이고 구멍은 반지름이 2cm라고 하자. 만일 $g = 9.8\text{m/s}^2$이라면 h는 다음 미분방정식을 만족함을 보여라.

$$\frac{dh}{dt} = -0.0004\sqrt{20h}$$

(b) $t = 0$에서 탱크가 가득 차 있다고 할 때 시각 t에서 물의 높이를 찾기 위해 이 방정식을 풀어라.

(c) 물이 완전히 빠지는 데 얼마나 걸리겠는가?

문제 2(b)는 수업 시연이나 또는 세 명 학생의 팀 프로젝트로 수행하기에 가장 적합하다. 시간측정자는 시간을 재고, 병을 잡고 있는 사람은 매 10초마다 병 높이를 재고 기록자는 그 값들을 기록한다.

2. 액체의 점성계수와 회전 때문에 방정식 $\boxed{1}$로 주어진 이론적 모델은 정확하지는 않다. 대신에 모델

$$\boxed{2} \qquad \frac{dh}{dt} = k\sqrt{h}$$

가 자주 이용된다. 그리고 상수 k(액체의 물리적 특성에 의존)는 탱크에서 물이 빠져나오는 것과 관련된 자료에 의해 결정된다.

(a) 원통의 옆면에 구멍을 뚫고 물의 높이(구멍 위로) h가 68초에 10cm에서 3cm로 줄어 들었다고 하자. 식 $\boxed{2}$를 이용하여 $h(t)$를 식으로 써라. $t = 10, 20, 30, 40, 50, 60$일 때 $h(t)$를 계산하여라.

(b) 2리터짜리 플라스틱 소다수병의 원통의 밑부분 가까이 4mm 구멍을 뚫었다. 0부터 10cm까지 표시된 마스킹테이프를 구멍 위에 0이 위치하도록 붙였다. 한 손가락으로 구멍을 막고 10cm까지 물을 채웠다. 그런 다음 구멍에서 손을 떼고 $t = 10, 20, 30, 40, 50, 60$초에서 $h(t)$의 값을 기록한다. (아마도 68초면 $h = 3\text{cm}$ 정도로 낮아진 것을 알 수 있을 것이다.) $h(t)$의 값을 (a)에서 얻은 데이터와 여러분의 것을 비교하여라. 그 모델의 실제값에 얼마나 잘 맞아떨어졌는가?

3. 대부분의 큰 호텔과 병원의 스프링쿨러 시스템은 빌딩의 지붕이나 그 가까이에 원통형 탱크로부터 중력을 이용하여 사용하고 있다. 탱크의 반지름이 3m이고 배출구의 지름이 6cm라 하자. 엔지니어는 10분을 주기로 적어도 104kPa의 물의 압력을 유지해야 한다. (불이 났을 때 전기시스템은 고장 나고 긴급발전기와 방화펌프가 작동하는 데 10분은 걸린다고 한다.) 엔지니어가 물의 압력을 그만큼 유지하기 위하여 탱크의 물의 높이를 얼마로 해야 하나? (d미터의 수심에서 물의 압력이 $P = 10d$ kPa임을 이용하여라. 8.3절 참조)

4. 모든 물탱크가 원통인 것은 아니다. 탱크가 높이 h에서 절단면의 넓이가 $A(h)$라 하자. 그러면 높이 h까지 물의 부피는 $V = \int_0^h A(u)\,du$이고 미적분학의 기본정리에 의하여 $dV/dh = A(h)$이다. 즉

$$\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dh}\frac{dh}{dt} = A(h)\frac{dh}{dt}$$

그리고 토리첼리의 법칙은 다음과 같이 된다.

$$A(h)\frac{dh}{dt} = -a\sqrt{2gh}$$

(a) 탱크가 반지름 2m인 구 모양이고 물이 처음에 많이 차 있다고 하자. 구멍의 반지름이 1cm이고 $g = 10\text{m/s}^2$이라고 할 때 h는 다음 미분방정식을 만족함을 보여라.

$$(4h - h^2)\frac{dh}{dt} = -0.0001\sqrt{20h}$$

(b) 물이 완전히 빠지는 데 얼마나 걸리겠는가?

9.4 인구 증가 모델

9.1절에서 인구 증가를 설명하는 두 개의 미분방정식을 개발했다. 이 절에서는 이러한 방정식을 더 알아보고 9.3절의 기술을 사용하여 모집단에 대한 명시적 모델을 얻는다.

■ 자연증가의 법칙

9.1절에서 생각해본 개체군 증가의 모델 중 하나는 개체군은 크기에 비례하여 증가한다는 가정에 바탕을 두고 있다.

$$\frac{dP}{dt} = kP$$

이 가정은 타당한가? (예를 들어, 박테리아의) 개체군의 크기가 $P = 1000$이고, 어떤 시각에 증가율이 시간당 $P' = 300$박테리아라고 가정하자. 지금, 같은 종류의 박테리아 1000개를 또 취하여 처음 개체군 속에 넣기로 하자. 새로운 개체군의 각각의 군은 시간당 300박테리아의 비율로 증가한다. 충분한 공간과 영양분이 주어지면 크기가 2000인 개체군은 초기에 시간당 600박테리아의 비율로 증가하리라고 기대할 수 있다. 따라서 크기를 배로 하면 증가율이 배가 된다. 증가율은 크기에 비례하는 것이 타당해 보인다.

일반적으로, $P(t)$를 시각 t에서의 양(quantity)의 y값이라 하고 t에 관한 P의 변화율이 항상 그의 크기 $P(t)$에 비례한다면,

$$\boxed{1} \qquad \boxed{\frac{dP}{dt} = kP}$$

이다. 여기서 k는 상수이고, 방정식 $\boxed{1}$을 **자연증가의 법칙**(law of natural growth)이라고도 한다. k가 양수이면 인구가 증가하고, k가 음수이면 감소한다.

방정식 $\boxed{1}$은 변수분리형 미분방정식이므로, 이것을 9.3절의 방법으로 풀 수 있다.

$$\int \frac{dP}{P} = \int k\,dt$$

$$\ln|P| = kt + C$$

$$|P| = e^{kt+C} = e^C e^{kt}$$

$$P = Ae^{kt}$$

여기서 A $(= \pm e^C$ 또는 $0)$는 임의의 상수이다. 상수 A의 의미를 살펴보면,

$$P(0) = Ae^{k \cdot 0} = A$$

이다. 그러므로 A는 함수의 초깃값이다.

$\boxed{2}$를 사용하는 예제와 연습문제는 3.8절에 제시되어 있다.

$\boxed{2}$ 초깃값문제

$$\frac{dP}{dt} = kP \qquad P(0) = P_0$$

의 해는

$$P(t) = P_0 e^{kt}$$

이다.

식 $\boxed{1}$을 나타내는 또 다른 방법은

$$\frac{dP/dt}{P} = k$$

로 이것을 **상대 증가율**(relative growth rate: 개체군 크기로 증가율을 나눈 것, 3.8절 참조)이라 부른다. 그런데 식 $\boxed{2}$는 상대 증가율이 상수인 개체군은 반드시 지수적으로 증가한다는 것을 말하고 있다.

식 $\boxed{1}$을 수정함으로써 개체군으로부터 이주(또는'수확')를 설명할 수 있다. 다시 말해, 이주율이 상수 m이라면 개체군의 변화율은 미분방정식으로 다음과 같은 모델로 나타낼 수 있다.

$$\boxed{3} \qquad \frac{dP}{dt} = kP - m$$

식 $\boxed{3}$의 풀이와 결과를 구하기 위해서 연습문제 17을 참조하기 바란다.

■ 로지스틱 모델

9.1절에서 논의했듯이, 개체수는 종종 초기에는 지수적으로 증가하지만 마지막에는 평평하게 되고 제한된 자원 때문에 수용한계에 도달하게 된다. 만약 $P(t)$를 시각 t에서 개체수라 하면,

$$\frac{dP}{dt} \approx kP, \qquad P\text{가 작을 경우}$$

라 가정한다. 이것은 초기의 증가율은 개체군의 크기 M에 비례한다는 것을 말한다. 즉, 개체수가 작을 때 상대 증가율은 거의 상수에 가깝다. 그러나 개체수 P가 증가함에 따라 상대 증가율은 감소하고 P가 **수용한계**(carrying capacity) M(어떤 환경이 오랫동안 유지될 수 있는 최대 개체수)을 초과하면 음수가 된다는 사실을 반영하고 싶다. 이런 가정들을 결합한 상대 증가율에 대한 가장 간단한 표현식은

$$\frac{dP/dt}{P} = k\left(1 - \frac{P}{M}\right)$$

이다. 양변에 P를 곱하면, **로지스틱 방정식**(logistic equation)으로 알려진 개체수 증가에 대한 모델을 얻을 수 있다.

$$\boxed{\frac{dP}{dt} = kP\left(1 - \frac{P}{M}\right)} \tag{4}$$

방정식 4 로부터 P가 M과 비교하여 작으면 P/M는 0에 가깝게 되어 $dP/dt \approx kP$임을 주목하자. 그러나 만약 $P \to M$이면 (개체수가 수용한계에 접근하면) $P/M \to 1$, 따라서 $dP/dt \to 0$이다. 방정식 4 로부터 직접 해가 증가하는지 또는 감소하는지에 관한 정보를 추론할 수 있다. 개체수 P가 0과 M 사이에 있으면 방정식의 우변이 양수이므로, $dP/dt > 0$이고 인구는 증가한다. 그러나 개체수가 수용한계를 넘으면($P > M$), $1 - P/M < 0$이므로 $dP/dt < 0$이고 개체수는 감소한다.

방향장을 살펴봄으로써 로지스틱 미분방정식을 좀 더 자세하게 설명하고자 한다.

예제 1 $k = 0.08$이고 수용한계가 $M = 1000$인 로지스틱 방정식에 관하여 방향장을 그려라. 해에 관하여 어떤 것을 추론할 수 있는가?

풀이 이 경우 로지스틱 방정식은

$$\frac{dP}{dt} = 0.08P\left(1 - \frac{P}{1000}\right)$$

이다. 이 방정식에 대한 방향장은 그림 1에 나타나 있다. 음의 개체수는 의미가 없고 시간 $t = 0$ 이후에 일어난 것에 관심이 있기 때문에 1사분면만 살펴보면 된다.

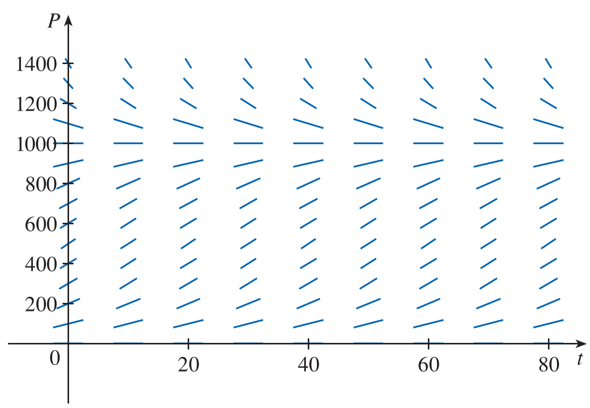


그림 1
예제 1에서의 로지스틱 방정식에 대한 방향장

로지스틱 방정식은 자율적이다(dP/dt는 t가 아닌 P에만 의존한다). 따라서 그 기울기는 수평선을 따라 같다. 예상한 바와 같이 기울기는 $0 < P < 1000$에서 양수이고 $P > 1000$에서 음수이다.

그 기울기는 P가 0 또는 1000(수용한계)에 가까우면 작다. 해는 평형해 $P = 0$으로부터 멀어지면서 평형해 $P = 1000$으로 가까이 이동한다는 것을 주목하여라.

그림 2에서 방향장을 이용하여 초기 개체수 $P(0) = 100$, $P(0) = 400$, 그리고 $P(0) = 1300$을 가지는 해곡선의 그래프를 그렸다. 해곡선은 $P = 1000$보다 작은 곳에서 시

작하면 증가하고 큰 곳에서 시작하면 감소한다는 것을 주목하여라. 기울기는 $P \approx 500$에서 가장 크므로 $P = 500$보다 작은 곳에서 시작하는 해곡선은 $P \approx 500$에서 변곡점을 가진다. 실제로 우리는 $P = 500$보다 작은 곳에서 시작하는 모든 해곡선은 P가 정확히 500일 때 변곡점을 갖는다는 것을 증명할 수 있다(연습문제 13 참조).

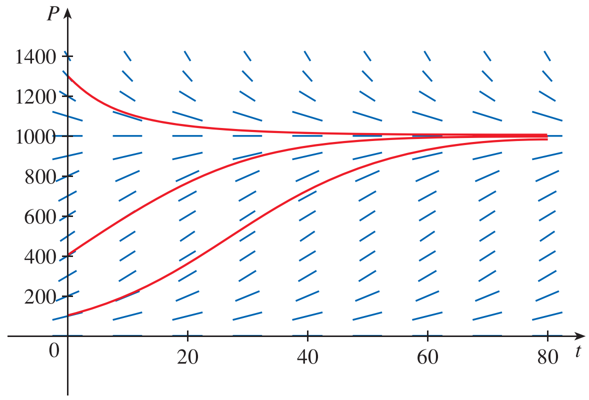


그림 2
예제 1에서의 로지스틱 방정식에 대한 해곡선

로지스틱 방정식 **4**는 변수분리형이며, 9.3절의 방법을 사용하여 명확하게 풀 수 있다.

$$\frac{dP}{dt} = kP\left(1 - \frac{P}{M}\right)$$

이므로

5 $$\int \frac{dP}{P(1 - P/M)} = \int k\,dt$$

를 얻을 수 있다. 좌변의 피적분 함수는

$$\frac{1}{P(1 - P/M)} = \frac{M}{P(M - P)}$$

으로 쓸 수 있다. 부분분수(7.4절 참조)를 사용하여

$$\frac{M}{P(M - P)} = \frac{1}{P} + \frac{1}{M - P}$$

을 얻을 수 있다. 이것을 이용하여 방정식 **5**를 다시 쓸 수 있다.

$$\int \left(\frac{1}{P} + \frac{1}{M - P}\right) dP = \int k\,dt$$

$$\ln|P| - \ln|M - P| = kt + C$$

$$\ln\left|\frac{M - P}{P}\right| = -kt - C$$

$$\left|\frac{M - P}{P}\right| = e^{-kt-C} = e^{-C}e^{-kt}$$

$$\boxed{6} \qquad \frac{M-P}{P} = Ae^{-kt}$$

여기서 $A = \pm e^{-C}$이다. 식 $\boxed{6}$을 P에 대하여 풀면,

$$\frac{M}{P} - 1 = Ae^{-kt} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{P}{M} = \frac{1}{1 + Ae^{-kt}}$$

을 얻고, 따라서

$$P = \frac{M}{1 + Ae^{-kt}}$$

이다. 식 $\boxed{6}$에 $t = 0$을 대입하여 A의 값을 구할 수 있다. 만약 $t = 0$이면, $P = P_0$ (초기 개체수)이므로,

$$\frac{M - P_0}{P_0} = Ae^0 = A$$

이다. 따라서 로지스틱 방정식은

$$\boxed{7} \qquad \boxed{P(t) = \frac{M}{1 + Ae^{-kt}} \qquad \text{여기서 } A = \frac{M - P_0}{P_0}}$$

이다. 식 $\boxed{7}$의 $P(t)$에 대한 식을 이용하면, 예상한 대로 다음을 얻을 수 있다.

$$\lim_{t \to \infty} P(t) = M$$

예제 2 초깃값문제

$$\frac{dP}{dt} = 0.08P\left(1 - \frac{P}{1000}\right) \qquad P(0) = 100$$

의 해를 구하고 이것을 이용하여 개체수 $P(40)$과 $P(80)$을 구하여라. 언제 개체수가 900에 도달하겠는가?

풀이 이 미분방정식은 $k = 0.08$, 수용한계 $M = 1000$과 초기 개체수 $P_0 = 100$인 로지스틱 방정식이다. 식 $\boxed{7}$로부터 시각 t에서의 개체수는

$$P(t) = \frac{1000}{1 + Ae^{-0.08t}}, \qquad \text{여기서 } A = \frac{1000 - 100}{100} = 9$$

이다. 따라서

$$P(t) = \frac{1000}{1 + 9e^{-0.08t}}$$

$t = 40$과 $t = 80$에서의 개체군의 크기는

$$P(40) = \frac{1000}{1 + 9e^{-3.2}} \approx 731.6 \qquad P(80) = \frac{1000}{1 + 9e^{-6.4}} \approx 985.3$$

이다. 개체수가 900에 도달하려면

$$\frac{1000}{1 + 9e^{-0.08t}} = 900$$

을 만족해야 한다. 이 방정식을 t에 관하여 풀면,

$$1 + 9e^{-0.08t} = \tfrac{10}{9}$$
$$e^{-0.08t} = \tfrac{1}{81}$$
$$-0.08t = \ln \tfrac{1}{81} = -\ln 81$$
$$t = \frac{\ln 81}{0.08} \approx 54.9$$

를 얻는다. 따라서 t가 약 55일 때 개체수 900이 된다. 이 작업을 점검해보려면 그림 3에 개체수의 그래프를 그리고 $P = 900$ 선과 만나는 곳을 관찰하면 된다. 커서는 $t \approx 55$를 가리킨다. ■

그림 3의 해곡선과 그림 2에서 방향장으로부터 그리는 가장 작은 해곡선과 비교해보아라.

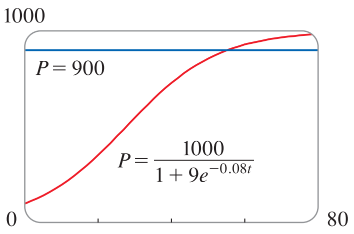


그림 3

■ 자연적 증가와 로지스틱 모델의 비교

1930년대의 생물학자 가우스(G. F. Gause)는 원생동물인 짚신벌레로 실험을 하고 그의 데이터를 모델링하는 데 로지스틱 방정식을 이용했다. 다음 표는 매일 원생동물의 개체수를 헤아린 것을 적은 것이다. 그는 초기의 상대적 증가율은 0.7944로 하고, 수용한계는 64로 추정하였다.

t(일)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
P(관찰된 개체수)	2	3	22	16	39	52	54	47	50	76	69	51	57	70	53	59	57

예제 3 가우스 데이터에 대하여 지수적인 모델과 로지스틱 모델을 구하여라. 예상되는 값과 관찰값을 비교하고 적합한지 논하여라.

풀이 상대적 증가율 $k = 0.7944$와 초기 개체수 $P_0 = 2$가 주어진 상태에서 지수적인 모델은

$$P(t) = P_0 e^{kt} = 2e^{0.7944t}$$

이다. 가우스는 똑같은 값 k를 로지스틱 모델에도 적용했다. [이것은 $P_0 = 2$가 수용한계 $M = 64$에 비해 작기 때문에 의미가 있다. 방정식

$$\left.\frac{1}{P_0}\frac{dP}{dt}\right|_{t=0} = k\left(1 - \frac{2}{64}\right) \approx k$$

는 로지스틱 모델에 대한 k의 값이 지수적인 모델과 매우 근접함을 보여준다.]

식 $\boxed{7}$의 로지스틱 방정식의 해는

$$P(t) = \frac{M}{1 + Ae^{-kt}} = \frac{64}{1 + Ae^{-0.7944t}}$$

이다. 여기서
$$A = \frac{M - P_0}{P_0} = \frac{64 - 2}{2} = 31$$

이고, 따라서
$$P(t) = \frac{64}{1 + 31e^{-0.7944t}}$$

이다. 이 방정식을 사용하여 예측값(가장 가까운 정수값으로 반올림함)을 계산하고 이것을 표에 주어진 값들과 비교한다.

t(일)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
P(관찰된 개체수)	2	3	22	16	39	52	54	47	50	76	69	51	57	70	53	59	57
P(로지스틱 모델)	2	4	9	17	28	40	51	57	61	62	63	64	64	64	64	64	64
P(지수적 모델)	2	4	10	22	48	106	. . .										

표와 그림 4의 그래프로부터 처음 3~4일 동안은 지수적 모델도 복잡한 로지스틱 모델의 결과와 비슷한 결과를 보여준다. 그러나 $t \geqslant 5$에 대해서는 지수적 모델은 실망스럽도록 부정확한 반면, 로지스틱 모델은 관측과 잘 들어맞는다.

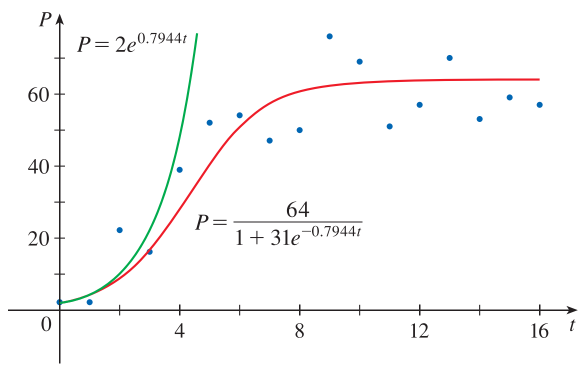


그림 4
짚신벌레 데이터에 대한
지수 및 로지스틱 모델

연도	인구 (천 명)
1960	94,092
1965	98,883
1970	104,345
1975	111,573
1980	116,807
1985	120,754
1990	123,537
1995	125,327
2000	126,776
2005	127,715
2010	127,579
2015	126,920

Source: U.S. Census Bureau / International Programs / International Data Base. Revised Sept. 18, 2018. Version data 18.0822. Code 12.0321.

지수적 성장을 이전에 경험했던 많은 나라를 보면 현재 자신들의 인구 증가율이 감소하고 있고 로지스틱 모델이 더 나은 모델이라는 사실을 말해주고 있다. 옆의 표는 1960년부터 2015년까지 각 연도의 중간쯤의 일본 인구를 천 단위로 보여준다. 그림 5는 1960년을 $t = 0$으로 나타내어 이러한 자료를 점으로 찍은 것과 이동된 로지스틱 함수(회귀를 통해 자료 점에 로지스틱 함수를 맞추는 기능, 연습문제 15 참조)를 보여준다. 처음에는 자료 점이 지수 곡선을 따르는 것처럼 보이지만 전반적으로 로지스틱 함수가 훨씬 더 정확한 모델을 제공한다.

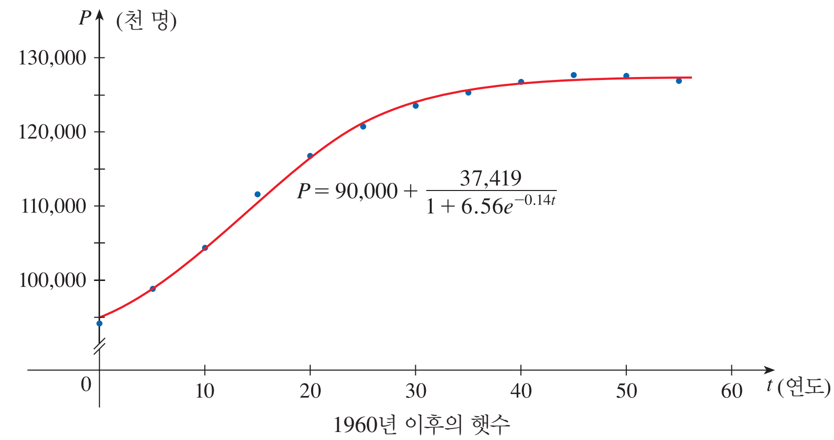


그림 5
일본의 인구 증가에
대한 로지스틱 모델

■ 개체수 증가의 다른 모델

자연증가의 법칙과 로지스틱 방정식이 개체군 증가 모델의 유일한 방정식은 아니다. 연습문제 22에서 곰페츠(Gompertz) 성장 함수를 살펴보고 연습문제 23과 24에서 계절적인 성장 모델을 조사할 것이다.

다음 두 모델은 로지스틱 모델을 개량한 것이다. 미분방정식

$$\frac{dP}{dt} = kP\left(1 - \frac{P}{M}\right) - c$$

는 한두 종류의 수확(harvesting)에 의해 지배되는 개체수의 모델을 만드는 데 사용되었다(일정한 비율로 잡히는 물고기의 개체수를 생각해보아라). 이 방정식은 연습문제 19와 20에서 탐구한다.

어떤 종에 대해서는 개체수가 어떤 수준 이하로 떨어지면 멸종하게 되는 최소 개체수 수준 m이 있다(성충이 적당한 짝을 만나지 못할 수도 있다). 이러한 개체군은 미분방정식

$$\frac{dP}{dt} = kP\left(1 - \frac{P}{M}\right)\left(1 - \frac{m}{P}\right)$$

로 모델링된다. 여기서 추가 요소 $1 - m/P$는 희소 개체수의 결과를 고려한 것이다(연습문제 21 참조).

9.4 연습문제

1-2 인구는 주어진 로지스틱 방정식에 따라 커지며 여기서 t는 주 단위로 측정된다.
(a) 수용한계는 얼마인가? k의 값은 얼마인가?
(b) 방정식의 해를 써라.
(c) 10주 후에 인구는 얼마인가?

1. $\dfrac{dP}{dt} = 0.04P\left(1 - \dfrac{P}{1200}\right), \quad P(0) = 60$

2. $\dfrac{dP}{dt} = 0.02P - 0.0004P^2, \quad P(0) = 40$

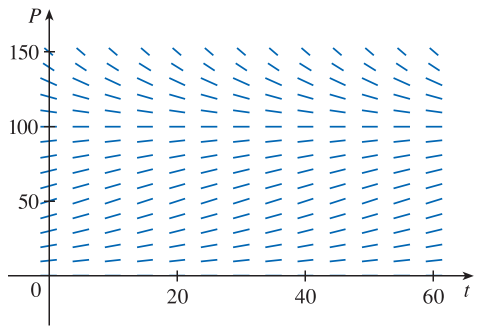
3. 개체수가 아래의 로지스틱 모델을 따른다고 가정하자.

$$\frac{dP}{dt} = 0.05P - 0.0005P^2$$

여기서 t는 주(week) 단위로 계산된다.

(a) 수용한계는 얼마인가? k의 값은 얼마인가?

(b) 이 방정식의 방향장은 아래와 같다. 기울기가 0에 가까운 곳은 어디인가? 기울기가 가장 큰 곳은 어디인가? 어떤 해가 증가하는가? 어떤 해가 감소하는가?



(c) 방향장을 이용하여 초기 개체수 20, 40, 60, 80, 120, 140에 대한 해를 그려라. 이 해들의 공통점은 무엇인가? 어떻게 다른가? 어떤 해가 변곡점을 가지는가? 변곡점에서의 개체수는 얼마인가?

(d) 평형해는 무엇인가? 이 해와 관계가 있는 다른 해는 어떠한가?

T **4.** 개체군이 수용한계가 6000이고 $k = 0.0015$/년인 로지스틱 모델에 따라 성장한다고 가정하자.

(a) 이 데이터에 대한 로지스틱 미분방정식을 기술하여라.

(b) 방향장을 (직접 손으로 또는 컴퓨터로) 그려라. 이것은 해곡선에 대하여 무엇을 말하고 있는가?

(c) 방향장을 이용하여 초기 개체수 1000, 2000, 4000, 8000에 대한 해 곡선을 그려라.

(d) 초기 개체수가 1000일 때 50년 후 개체수를 추정하기 위하여 단계 크기 $h = 1$로 오일러 방법을 사용할 수 있는 계산기나 컴퓨터 프로그램을 작성하여라.

(e) 초기 인구가 1000일 때 t년 후의 개체수에 대한 공식을 쓰라. 이것을 이용하여 50년 후의 개체수를 구하고 (d)의 추정값과 비교하여라.

(f) 문제 (e)의 해를 그래프로 그리고 문제 (c)에서 그린 해 곡선과 비교하여라.

5. 태평양의 넙치 어장은 다음과 같은 미분방정식으로 모델링된다.

$$\frac{dy}{dt} = ky\left(1 - \frac{y}{M}\right)$$

여기서 $y(t)$는 시각 t(년)에서의 kg으로 나타나는 생물량(개체군 구성원 전체의 질량)이고, 수용한계는 $M = 8 \times 10^7$kg으로 추정되고, k 는 연당 0.71이다.

(a) $y(0) = 2 \times 10^7$kg이라면 1년 후의 생물량을 구하여라.

(b) 생물량이 4×10^7kg이 될 때까지는 얼마나 오랜 시간이 걸릴 것인가?

6. 인구 $P(t)$가

$$\frac{dP}{dt} = 0.4P - 0.001P^2 \qquad P(0) = 50$$

을 만족한다. 이때 t는 연(year) 수를 나타낸다.

(a) 수용한계는 얼마인가?

(b) $P'(0)$는 얼마인가?

(c) 인구가 수용한계의 50%에 도달할 때는 언제인가?

7. 인구가 로지스틱 모델에 따라 성장하고 초기 인구가 1000, 수용한계가 10,000이라 하자. 인구가 1년 후에 2500으로 증가하면 그로부터 3년 후에 인구는 얼마가 될 것인가?

8. 다음 표는 새로운 배양기에서의 효모 세포 수를 나타내는 것이다.

시간(시)	효모 수	시간(시)	효모 수
0	18	10	509
2	39	12	597
4	80	14	640
6	171	16	664
8	336	18	672

(a) 데이터를 그래프로 그리고 이것을 이용하여 효모군의 개체수에 대한 수용한계를 추정하여라.

(b) 데이터를 이용하여 상대 성장률을 추정하여라.

(c) 데이터에 대하여 지수적 모델과 로지스틱 모델을 구하여라.

(d) 표와 그래프로 예측값과 관측값을 비교하여라. 주어진 데이터에 어떤 모델이 더 잘 맞는지 설명하여라.

(e) 로지스틱 모델을 이용하여 7시간 후의 효모 수를 추정하여라.

9. 2000년 세계 인구는 61억이었다. 당시 출생률은 1년에 3천 500만에서 4천만에 이르고 사망률은 1년에 1천 500만에서 2천만에 이른다. 세계 인구에 대한 수용한계가 200억이라고 하자.

(a) 이 데이터에 대한 로지스틱 미분방정식을 써라. (수용한계와 비교하여 초기 인구가 작기 때문에 k로 초기 상대 증가율의 추정치를 쓸 수 있다.)

(b) 로지스틱 모델을 이용하여 2010년의 인구를 예측하고 실제 인구 69억과 비교하여라.

(c) 로지스틱 모델을 이용하여 2100년과 2500년의 세계 인구를 예측하여라.

10. (a) 미국 인구의 수용한계가 8억이라고 하자. 2000년에 미국 인구가 2억 8천 2백만이었던 사실을 이용하여 미국 인구에 대한 로지스틱 모델을 만들어라.

(b) 2010년의 인구가 3억 9백만이라는 사실을 이용하여 모델에서 k의 값을 결정하여라.

(c) 이 모델을 이용하여 2100년과 2200년의 미국 인구를 예측하여라.
(d) 모델을 이용하여 미국 인구가 5억이 넘는 해를 예측하여라.

11. 소문의 전파에 대한 한 가지 모델은 전파율이 전체 사람 중 소문을 들은 사람 수 y명과 전체 중 소문을 듣지 않은 사람 수의 곱에 비례한다는 것이다.
(a) y가 만족되는 미분방정식을 써라.
(b) 미분방정식을 풀어라.
(c) 1000명이 사는 작은 마을이 있다. 오전 8시에 80명이 어떤 소문을 들었다. 정오에는 마을의 반이 그 소문을 들었다. 인구의 90%가 그 소문을 들으려면 얼마나 걸리겠는가?

12. 생물학자가 호수에 400마리의 물고기를 방류했다. 그 호수의 수용한계(그 호수에서 그 종의 물고기 최대 개체수)가 10,000으로 추정된다. 1년 후 물고기 수는 3배로 증가했다.
(a) 물고기 개체군의 크기가 로지스틱 모델을 만족한다고 할 때 t년 후의 물고기 개체군의 크기를 나타내는 식을 구하여라.
(b) 5000마리까지 증가하는 데 얼마나 걸리겠는가?

13. (a) P가 로지스틱 방정식 $\boxed{4}$를 만족한다면,

$$\frac{d^2P}{dt^2} = k^2P\left(1 - \frac{P}{M}\right)\left(1 - \frac{2P}{M}\right)$$

임을 보여라.
(b) 개체수는 수용한계의 절반에 이르렀을 때 가장 빨리 증가함을 추론하여라.

14. 고정된 M, 예를 들면 $M = 10$에 대하여 식 $\boxed{7}$에 주어진 로지스틱 함수들은 초깃값 P_0와 비례상수 k에 의존한다. 이들 중 몇 개를 그려라. P_0가 변하면 그래프는 어떻게 되는가? k가 변하면 어떻게 되겠는가?

15. 이동된 로지스틱 모델 다음 표는 1970~2015년까지 트리니다드 토바고의 인구(단위 천 명)를 나타내고 있다.

연도	인구수 (천 명)	연도	인구수 (천 명)
1970	955	1995	1264
1975	1007	2000	1252
1980	1091	2005	1237
1985	1189	2010	1227
1990	1255	2015	1222

Source: US Census Bureau / International Programs / International Data Base. Revised Sept. 18, 2018. Version data 18.0822. Code 12.0321.

(a) 이 데이터의 산점도를 만들어라. 1970년을 $t = 0$으로 맞춘다.
(b) 산점도에서 먼저 자료 점들을 아래쪽으로 이동하면(초기 P 값이 0에 더 가깝도록) 로지스틱 모델이 적절할 수 있는 것으로 보인다. P의 각 값에서 900을 뺀 다음 계산기나 컴퓨터를 사용하여 이동된 데이터에 대한 로지스틱 모델을 얻어라.
(c) (b)의 모델에 900을 더하여 원래 데이터에 대한 이동된 로지스틱 모델을 얻으라. (a)의 자료 점으로 모델을 그래프로 표시하고 모델의 정확도에 대해 설명하여라.
(d) 모델이 정확하다면 트리니다드 토바고의 미래 인구에 대해 어떻게 예측할 수 있나?

16. 표는 2010년부터 2016년까지 반기별로 전 세계의 활성 트위터 사용자 수를 보여준다.

2010년 1월 1일 이후 연도	트위터 사용자 (백만)	2010년 1월 1일 이후 연도	트위터 사용자 (백만)
0	30	3.5	232
0.5	49	4.0	255
1.0	68	4.5	284
1.5	101	5.0	302
2.0	138	5.5	307
2.5	167	6.0	310
3.0	204	6.5	317

Source: www.statistica.com/statistics/282087/number-of-monthly-active-twitter-users/. Accessed March 9, 2019.

계산기나 컴퓨터를 사용하여 지수 함수와 로지스틱 함수를 이 데이터에 맞추라. 자료 점들과 두 함수를 모두 그래프로 표시하고 모델의 정확성에 대해 설명하여라.

17. 상수인 상대 출생률과 사망률이 각각 α, β이고, 상수의 이민율 m을 가지는 집단의 인구 $P = P(t)$를 생각하자(단, 여기서 α, β와 m은 양수임). $\alpha > \beta$라 가정할 때 시점 t에서 개체수의 변화율은 다음 미분방정식으로 모델링된다.

$$\frac{dP}{dt} = kP - m, \qquad \text{여기서 } k = \alpha - \beta$$

(a) 초기조건이 $P(0) = P_0$를 만족하는 이 미분방정식의 해를 구하여라.
(b) 인구의 지수적인 팽창을 가져오는 m의 조건은 무엇인가?
(c) 인구가 정체되는 m의 조건은? 또 인구가 감소하는 조건은 무엇인가?
(d) 1847년 아일랜드의 인구는 800만이었고 상대 출생률과 사망률의 차이는 1.6%이다. 1840년대와 1850년대의 감자의 기근으로 인해 연간 210,000명의 거주민이 이민을 갔다. 그때에 인구는 증가했겠는가 아니면 감소했겠는가?

18. c를 양수라 하자. 다음과 같은 형의 미분방정식

$$\frac{dy}{dt} = ky^{1+c}$$

은 **종말 방정식**(Doomsday Equation)이라 부른다. 여기서 k는 양의 상수이다. 왜냐하면, 식 ky^{1+c}의 지수가 자연 성장(ky)보다 크기 때문이다.

(a) 초기조건 $y(0) = y_0$을 만족하는 해를 구하여라.

(b) $\lim_{t \to T} y(t) = \infty$가 되는 유한 시각 $t = T$가 존재함을 보여라.

(c) 특별히 다산하는 어떤 종의 토끼는 성장률 $ky^{1.01}$을 가진다. 만약 처음에 이 토끼 2마리가 서식지에서 3달후 16마리가 되었다면, 종말일은 언제인가?

T **19.** 예제 1의 로지스틱 미분방정식을 다음과 같이 변형하자.

$$\frac{dP}{dt} = 0.08P\left(1 - \frac{P}{1000}\right) - 15$$

(a) $P(t)$를 시각 t에서 물고기의 개체수라고 가정하자. 여기서 t는 주(week) 단위로 한다. 항 '-15'의 의미를 설명하여라.

(b) 이 미분방정식에 대한 방향장을 그려라.

(c) 평형해는 무엇인가?

(d) 방향장을 이용하여 몇 개의 해곡선의 개형을 그려라. 여러 가지의 초기 개체수에 대하여 물고기 개체수가 어떻게 증가하는지 설명하여라.

(e) 부분분수나 컴퓨터를 이용하여 이 미분방정식을 구체적으로 풀어라. 초기 개체수가 200과 300일 때 해곡선을 그리고 (d)의 개형과 비교하여라.

T **20.** 물고기 개체수에 대한 모델로 다음 미분방정식을 생각하자.

$$\frac{dP}{dt} = 0.08P\left(1 - \frac{P}{1000}\right) - c$$

여기서 t를 주 단위로 하고 c는 상수이다.

(a) 다양한 값 c에 대하여 방향장을 그려라.

(b) 문제 (a)의 방향장으로부터 평형해가 존재하는 적어도 하나의 c를 결정하여라. 어떤 c에 대하여 물고기 개체수가 멸종되겠는가?

(c) 미분방정식을 이용하여 문제 (b)에서 그래프에 의해 발견한 것을 증명하여라.

(d) 매주 잡아들일 수 있는 물고기의 개체수를 얼마로 제한하면 되겠는가?

21. 어떤 종에 대해서 개체수의 크기가 m보다 작아지면 멸종하는 최소의 개체수 m이 있다는 학설을 뒷받침하는 명백한 증거가 있다. 이 조건은 로지스틱 방정식에 $(1 - m/P)$가 결합된다. 따라서 수정된 로지스틱 모델은 미분방정식이

$$\frac{dP}{dt} = kP\left(1 - \frac{P}{M}\right)\left(1 - \frac{m}{P}\right)$$

이 된다.

(a) 이 미분방정식을 이용하여 $m < P < M$이면 해는 증가하고, $0 < P < m$이면 감소함을 보여라.

(b) $k = 0.08$, $M = 1000$과 $m = 200$인 경우 방향장을 그려보고 이것을 이용하여 몇 개의 해곡선을 그려라. 여러 가지 초기 개체수에 대하여 개체군에 어떤 일이 일어나는가?

(c) 이 미분방정식을 부분분수 분해법이나 컴퓨터를 이용하여 풀어라. 초기 개체수 P_0를 이용하여라.

(d) 문제 (c)의 해를 이용하여 $P_0 < m$이면 이 종은 멸종됨을 보여라. (**힌트**: 어떤 t에 대하여 $P(t)$가 0이 됨을 보여라.)

22. 제한된 개체수에 대한 성장 함수에 관한 또 다른 모델로는 **곰페츠 함수**(Gompertz Function)가 있으며 이것은 다음 미분방정식의 해이다.

$$\frac{dP}{dt} = c \ln\left(\frac{M}{P}\right)P$$

여기서 c는 상수이고 M은 수용한계이다.

(a) 이 미분방정식을 풀어라.

(b) $\lim_{t \to \infty} P(t)$를 계산하여라.

(c) $M = 1000$, $P_0 = 100$과 $c = 0.05$에 대하여 곰페츠 성장 함수를 그리고 예제 2의 로지스틱 함수와 비교하여라. 유사점과 차이점은 각각 무엇인가?

(d) 연습문제 13으로부터 로지스틱 함수는 $P = M/2$일 때 가장 빨리 증가함을 알고 있다. 곰페츠 미분방정식을 이용하여 곰페츠 함수는 $P = M/e$일 때 가장 빨리 성장함을 보여라.

23. **계절적인 성장모델**에서는 시간에 대한 주기함수가 성장율의 계절적인 변화를 고려하기 위해서 제안되었다. 이러한 변화는 예를 들면, 먹이의 가용량의 계절적인 바뀜에 의하여 일어날 수 있다.

(a) 계절적인 성장모델

$$\frac{dP}{dt} = kP\cos(rt - \phi) \qquad P(0) = P_0$$

의 해를 구하여라. 단, k, r, ϕ는 양의 상수이다.

(b) 여러 가지 k, r, ϕ값에 대하여 해의 그래프를 그려서 k, r, ϕ가 해에 어떤 영향을 미치는지 설명하여라. $\lim_{t \to \infty} P(t)$에 대하여 무엇을 말할 수 있는가?

24. 연습문제 23의 미분방정식을 다음과 같이 바꾼다고 가정하자.

$$\frac{dP}{dt} = kP\cos^2(rt - \phi) \qquad P(0) = P_0$$

(a) 적분표나 컴퓨터를 이용하여 이 미분방정식을 풀어라.

(b) 여러 가지 k, r, ϕ 값에 대하여 해의 그래프를 그려서 k, r, ϕ가 해에 어떤 영향을 미치는지를 설명하여라. 이 경우 $\lim_{t \to \infty} P(t)$에 대하여 무엇을 말할 수 있는가?

25. 로지스틱 함수(그림 2와 3)의 그래프는 쌍곡선탄젠트함수(3.11절의 그림 3)의 그래프와 비슷해 보인다. 방정식 7에서 주어진 로지스틱 함수는 $c = (\ln A)/k$일 때

$$P(t) = \tfrac{1}{2}M\left[1 + \tanh\left(\tfrac{1}{2}k(t - c)\right)\right]$$

임을 보여서 유사점을 설명하여라. 그러므로 로지스틱 함수는 실제로 단지 쌍곡선탄젠트를 변화시킨 것이다.

9.5 선형방정식

9.3절에서 변수분리형 1계 미분방정식을 푸는 방법을 배웠다. 이 절에서는 반드시 변수분리형이 아닌 미분방정식의 부류를 푸는 방법을 조사한다.

■ 선형미분방정식

1계 **선형미분방정식**(linear differential equation)은 다음과 같은 형식으로 표현될 수 있다.

$$\boxed{1} \qquad \frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$$

여기서 P와 Q는 주어진 구간에서 연속인 함수이다. 이런 형태의 방정식은 여러 과학 분야에서 자주 볼 수 있다.

선형방정식의 예로 $xy' + y = 2x$이다. $x \neq 0$인 경우

$$\boxed{2} \qquad y' + \frac{1}{x}y = 2$$

이 방정식은 변수분리형이 아니지만 곱의 법칙을 이용하여 해를 구할 수 있다.

$$xy' + y = (xy)'$$

위 방정식은 $(xy)' = 2x$로 쓸 수 있다.
양변을 적분하면

$$xy = x^2 + C \qquad \text{혹은} \qquad y = x + \frac{C}{x}$$

이다. 만일 방정식 $\boxed{2}$의 형태인 미분방정식을 갖는다면 양변에 x를 곱한 후 이전 단계를 거쳐 해를 구할 수 있다.

적분인자라고 호칭하는 적절한 함수 $I(x)$를 방정식 $\boxed{1}$의 양변에 곱하여 위와 같은 비슷한 형태로 1계 선형 미분방정식의 해를 구할 수 있다. 방정식 $\boxed{1}$의 좌측에 $I(x)$를 곱한 후 $I(x)y$를 미분하면

$$\boxed{3} \qquad I(x)\big(y' + P(x)y\big) = \big(I(x)y\big)'$$

이 된다. 만일 위 식을 만족하는 함수 I를 찾기 위하여

$$\big(I(x)y\big)' = I(x)\,Q(x)$$

라 놓고 양변을 적분하면

$$I(x)y = \int I(x)\,Q(x)\,dx + C$$

이며, 다음과 같은 해를 갖는다.

$$\boxed{4} \qquad y(x) = \frac{1}{I(x)}\left[\int I(x)\,Q(x)\,dx + C\right]$$

함수 I를 찾기 위하여 방정식 $\boxed{3}$을 정리하면 다음과 같다.

$$I(x)y' + I(x)P(x)y = (I(x)y)' = I'(x)y + I(x)y'$$
$$I(x)P(x) = I'(x)$$

이것은 I에 관한 변수분리형 미분방정식이 되며 다음과 같이 해를 구할 수 있다.

$$\int \frac{dI}{I} = \int P(x)\,dx$$
$$\ln|I| = \int P(x)\,dx$$
$$I = Ae^{\int P(x)\,dx}$$

여기서 $A = \pm e^C$이다. 일반적이 아닌 특별한 경우의 적분인자를 갖기 위해 여기서 $A = 1$을 선택하여 다음을 이용한다.

$$\boxed{5} \qquad I(x) = e^{\int P(x)\,dx}$$

그러므로 방정식 $\boxed{1}$에 대한 일반해에 관한 공식은 식 $\boxed{4}$가 제공하는데 I는 식 $\boxed{5}$에 주어져 있다. 하지만 이 공식을 기억하기 위하여 우리는 단지 적분인자만을 기억하면 된다.

> 미분방정식 $y' + P(x)y = Q(x)$의 해를 구하기 위해서 양변에 **적분인자**(integrating factor) $I(x) = e^{\int P(x)\,dx}$를 곱한 후 양변을 적분한다.

그림 1은 예제 1의 해집합의 몇 개의 원소의 그래프이다. $x \to 3$일 때 모두 2에 접근함에 주목하여라.

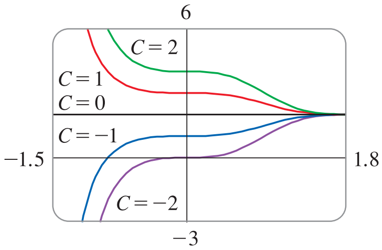


그림 1

예제 1 미분방정식 $\dfrac{dy}{dx} + 3x^2y = 6x^2$의 해를 구하여라.

풀이 주어진 방정식은 $P(x) = 3x^2$과 $Q(x) = 6x^2$을 갖는 방정식 $\boxed{1}$ 형태의 선형방정식이다. 적분인자는

$$I(x) = e^{\int 3x^2\,dx} = e^{x^3}$$

미분방정식의 양변에 e^{x^3}을 곱하면 다음을 얻는다.

$$e^{x^3}\frac{dy}{dx} + 3x^2e^{x^3}y = 6x^2e^{x^3}$$

즉 $$\frac{d}{dx}(e^{x^3}y) = 6x^2e^{x^3} \qquad \text{(곱 법칙)}$$

양변을 적분하면

$$e^{x^3}y = \int 6x^2e^{x^3}\,dx = 2e^{x^3} + C$$
$$y = 2 + Ce^{-x^3}$$
■

예제 2 다음 초깃값문제

$$x^2y' + xy = 1 \qquad x > 0 \qquad y(1) = 2$$

의 해를 구하여라.

풀이 식 $\boxed{1}$의 표준형으로 만들기 위하여 y'의 계수로 양변을 나누면

$$\boxed{6} \qquad y' + \frac{1}{x}y = \frac{1}{x^2} \qquad x > 0$$

적분인자는

$$I(x) = e^{\int (1/x)\,dx} = e^{\ln x} = x$$

식 $\boxed{6}$의 미분방정식의 양변에 x를 곱하면

$$xy' + y = \frac{1}{x} \qquad 즉 \qquad (xy)' = \frac{1}{x}$$

을 얻는다.

$$xy = \int \frac{1}{x}\,dx = \ln x + C$$

$$y = \frac{\ln x + C}{x}$$

예제 2의 초깃값문제의 해가 그림 2이다.

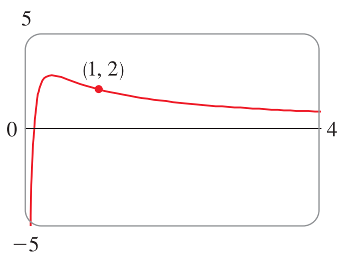


그림 2

$y(1) = 2$이므로

$$2 = \frac{\ln 1 + C}{1} = C$$

그러므로 이 방정식의 해는

$$y = \frac{\ln x + 2}{x}$$

이다. ■

예제 3 $y' + 2xy = 1$의 해를 구하여라.

풀이 주어진 문제는 표준 선형미분방정식이므로 적분인자

$$e^{\int 2x\,dx} = e^{x^2}$$

를 양변에 곱하면

비록 예제 3의 미분방정식의 해가 적분으로 표현되었지만 컴퓨터로 그래프를 그릴 수 있다(그림 3 참조).

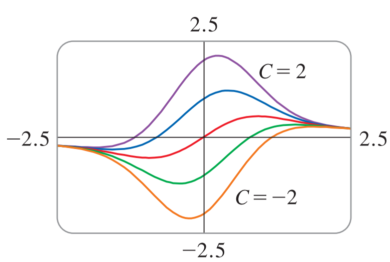


그림 3

$$e^{x^2}y' + 2xe^{x^2}y = e^{x^2}$$

을 갖는다. 혹은

$$\left(e^{x^2}y\right)' = e^{x^2}$$

그러므로

$$e^{x^2}y = \int e^{x^2}\,dx + C$$

7.5절에서 $\int e^{x^2}dx$는 초등함수로 표현될 수 없다는 것을 알았다. 그럼에도 불구하고 이것은 완벽한 함수이고 다음과 같이 답할 수 있다.

$$y = e^{-x^2} \int e^{x^2}\,dx + Ce^{-x^2}$$

이 해의 다른 표현은 다음과 같다.

$$y = e^{-x^2} \int_0^x e^{t^2}\,dt + Ce^{-x^2}$$

(적분의 하한에 관하여 어떤 수든 선택할 수 있다.) ■

■ 전기회로

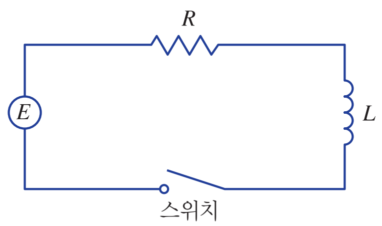


그림 4

9.2절에서 그림 4의 간단한 전기회로를 생각해 보았다. 전기적인 힘(보통 배터리 혹은 발전기의 힘)은 t 시각에서 $E(t)$볼트(V)의 전압과 $I(t)$암페어(A)의 전류를 생성한다. 또한 이 회로는 R옴(Ω)을 가지는 저항기와 L헨리(H)의 인덕턴스를 가지는 인덕터를 포함하고 있다.

옴의 법칙에 의하여 전압은 저항기를 지나며서 RI만큼 전압이 떨어진다. 인덕터를 지나면서 떨어지는 전압은 $L(dI/dt)$이다. 키르히호프의 법칙 중의 하나는 떨어지는 전압의 합은 공급되는 전압 $E(t)$와 같다는 것을 말해준다. 다시 말해

$$\boxed{7} \qquad L\frac{dI}{dt} + RI = E(t)$$

를 얻는데, 이것이 시각 t에서의 전류 I를 모형으로 만드는 1계 선형미분방정식이다.

예제 4 단순회로 그림 4에서 저항 $R = 12\Omega$이고 인덕턴스 L은 4H라고 하자. 만일 배터리가 일정한 전압 60V를 갖고 전류 $I(0) = 0$으로 시작되도록 $t = 0$일 때 스위치가 닫혔을 때 (a) $I(t)$, (b) 1초 후의 전류, (c) 전류의 극한값을 구하여라.

예제 4의 미분방정식은 선형이고 변수분리형이므로 변수분리형(9.3절의 예제 4)으로 이것을 풀었다. 하지만 발전기에서 배터리를 충전한다면(예제 5) 변수분리형이 아닌 선형방정식을 얻는다.

풀이

(a) 방정식 $\boxed{7}$에서 $L = 4$, $R = 12$, $E(t) = 60$이므로 초깃값문제

$$4\frac{dI}{dt} + 12I = 60 \qquad I(0) = 0$$

즉

$$\frac{dI}{dt} + 3I = 15 \qquad I(0) = 0$$

을 갖는다. 적분인자 $e^{\int 3\,dt} = e^{3t}$를 곱하면

그림 5는 예제 4에서 극한값이 어떻게 접근하는지 보여준다.

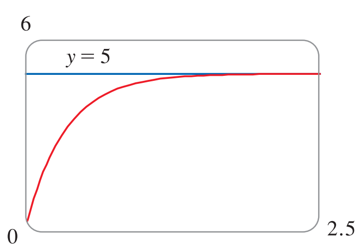


그림 5

$$e^{3t}\frac{dI}{dt} + 3e^{3t}I = 15e^{3t}$$

$$\frac{d}{dt}(e^{3t}I) = 15e^{3t}$$

$$e^{3t}I = \int 15e^{3t}\,dt = 5e^{3t} + C$$

$$I(t) = 5 + Ce^{-3t}$$

를 얻는다. $I(0) = 0$이므로 $5 + C = 0$이고 $C = -5$를 갖는다.

$$I(t) = 5(1 - e^{-3t})$$

(b) 1초후 전류는 다음과 같다.

$$I(1) = 5(1 - e^{-3}) \approx 4.75 \text{ A}$$

(c) 전류의 극한값은 다음과 같이 주어진다.

$$\lim_{t\to\infty} I(t) = \lim_{t\to\infty} 5(1 - e^{-3t}) = 5 - 5\lim_{t\to\infty} e^{-3t} = 5 - 0 = 5$$ ■

그림 6은 발전기로부터 배터리가 충전되었을 때의 그래프이다.

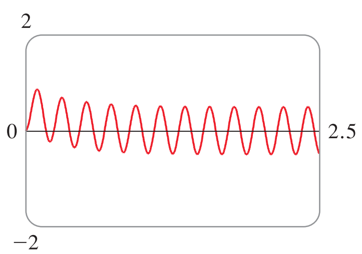


그림 6

예제 5 저항과 인덕턴스는 예제 4와 같고 배터리 대신 발전기가 교류 전압 $E(t) = 60 \sin 30t$ 볼트를 생성한다고 하자. 이때 $I(t)$를 구하여라.

풀이 이번에는 미분방정식이 다음과 같다.

$$4\frac{dI}{dt} + 12I = 60\sin 30t \qquad \text{즉} \qquad \frac{dI}{dt} + 3I = 15\sin 30t$$

적분인자 e^{3t}를 곱하여

$$\frac{d}{dt}(e^{3t}I) = e^{3t}\frac{dI}{dt} + 3e^{3t}I = 15e^{3t}\sin 30t$$

적분표 98번(또는 컴퓨터)을 이용하여 다음을 얻는다.

$$e^{3t}I = \int 15e^{3t}\sin 30t\,dt = 15\frac{e^{3t}}{909}(3\sin 30t - 30\cos 30t) + C$$

$$I = \tfrac{5}{101}(\sin 30t - 10\cos 30t) + Ce^{-3t}$$

$I(0) = 0$이므로

$$-\tfrac{50}{101} + C = 0$$

이다. 따라서

$$I(t) = \tfrac{5}{101}(\sin 30t - 10\cos 30t) + \tfrac{50}{101}e^{-3t}$$ ■

9.5 연습문제

1-4 다음 미분방정식이 선형인지 아닌지를 결정하여라. 선형이라면 식 $\boxed{1}$의 형식으로 쓰라.

1. $y' + x\sqrt{y} = x^2$

2. $y' - x = y\tan x$

3. $ue^t = t + \sqrt{t}\,\dfrac{du}{dt}$

4. $\dfrac{dR}{dt} + t\cos R = e^{-t}$

5-16 다음 미분방정식을 풀어라.

5. $y' + y = 1$

6. $y' - y = e^x$

7. $y' = x - y$

8. $4x^3y + x^4y' = \sin^3 x$

9. $xy' + y = \sqrt{x}$

10. $2xy' + y = 2\sqrt{x}$

11. $xy' - 2y = x^2, \quad x > 0$

12. $y' - 3x^2y = x^2$

13. $t^2\dfrac{dy}{dt} + 3ty = \sqrt{1 + t^2}, \quad t > 0$

14. $t\ln t\,\dfrac{dr}{dt} + r = te^t$

15. $y' + y\cos x = x$

16. $y' + 2xy = x^3e^{x^2}$

17-24 다음 초깃값문제를 풀어라.

17. $xy' + y = 3x^2, \quad y(1) = 4$

18. $xy' - 2y = 2x, \quad y(2) = 0$

19. $x^2y' + 2xy = \ln x, \quad y(1) = 2$

20. $t^3 \dfrac{dy}{dt} + 3t^2y = \cos t, \quad y(\pi) = 0$

21. $t \dfrac{du}{dt} = t^2 + 3u, \quad t > 0, \quad u(2) = 4$

22. $xy' + y = x \ln x, \quad y(1) = 0$

23. $xy' = y + x^2 \sin x, \quad y(\pi) = 0$

24. $(x^2 + 1) \dfrac{dy}{dx} + 3x(y - 1) = 0, \quad y(0) = 2$

25-26 다음 미분방정식을 풀고 해군의 그래프를 몇 개 그려라. 상수 C가 변함에 따라 해곡선이 어떻게 변하는가?

25. $xy' + 2y = e^x$

26. $xy' = x^2 + 2y$

27-29 **베르누이 미분방정식**은 다음과 같은 형식이다.

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)y^n$$

27. $n = 0$ 또는 $n = 1$인 경우를 살펴보면 베르누이 방정식은 선형이다. 다른 n값에 대하여 $u = y^{1-n}$을 베르누이 방정식에 대입하면 다음 선형미분방정식이 됨을 보여라.

$$\frac{du}{dx} + (1 - n)P(x)u = (1 - n)Q(x)$$

28. 다음 미분방정식의 해를 구하여라.

$$xy' + y = -xy^2$$

29. 다음 미분방정식의 해를 구하여라.

$$y' + \frac{2}{x}y = \frac{y^3}{x^2}$$

30. $u = y'$을 치환하여 2계 미분방정식 $xy'' + 2y' = 12x^2$을 풀어라.

31. 그림 4의 단순회로에서 배터리 전압이 40V, 인덕턴스는 2H, 저항은 10Ω, 전류는 $I(0) = 0$일 때 다음을 구하여라.
(a) $I(t)$를 구하여라.
(b) 0.1초 후의 전류는 얼마인가?

32. 그림 4의 단순회로에서 발전기에서 공급되는 전압이 $E(t) = 40 \sin 60t$볼트, 인덕턴스는 $L = 1$H, 저항은 20Ω, 전류는 $I(0) = 1$A이다.
(a) $I(t)$를 구하여라.
(b) 0.1초 후의 전류는 얼마인가?
(c) 전류함수의 그래프를 그려라.

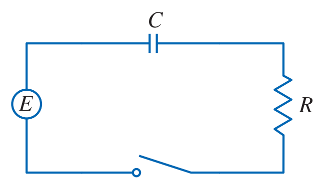
33. 다음 그림은 기전의 힘과 C패럿(F) 전기용량을 갖는 축전지와 R옴(Ω)의 저항을 갖는 저항기를 포함한 회로를 보여준다. 축전지를 가로지르면서 감소되는 전압은 Q/C이고, 이때 Q는 충전량(쿨롬 단위)이며, 이 경우 키르히호프의 법칙에 의하면

$$RI + \frac{Q}{C} = E(t)$$

이다. $I = dQ/dt$(3.7절의 예제 3 참조)이므로

$$R\frac{dQ}{dt} + \frac{1}{C}Q = E(t)$$

를 얻는다. 저항이 5Ω, 전기용량이 0.05F이고, 배터리는 정전압 60V로 주어지며, 초기 충전량은 $Q(0) = 0$C라고 가정하자. 시간 t에서 충전량과 전류를 구하여라.



34. 연습문제 33의 회로에서, $R = 2$Ω, $C = 0.01$F, $Q(0) = 0$, $E(t) = 10 \sin 60t$이다. 시각 t에서 충전량과 전류를 구하여라.

35. $P(t)$를 훈련 시간 t의 함수로서 한 사람이 기술을 학습하는 능률 정도라고 하자. P의 그래프는 **학습 곡선**이라고 불린다. 9.1절의 연습문제 27에서 학습에 대한 합리적인 모델로서 미분방정식을

$$\frac{dP}{dt} = k[M - P(t)]$$

로 제안한 바 있으며, 이때 k는 양의 상수이다. 선형미분방정식으로 식을 풀고, 학습 곡선을 그리는 데 그 해답을 사용하여라.

36. 두 명의 새로운 근로자가 조립 라인에 고용되었다. 짐은 처음 한 시간 동안 25개를, 다음 한 시간 동안에는 45개를 처리했다. 마크는 처음 한 시간 동안 35개를, 다음 한 시간 동안 50개를 처리했다. 연습문제 35의 모델을 이용하고 $P(0) = 0$으로 가정하여, 각각의 근로자가 처리할 수 있는 시간당 최대 개수를 추정하여라.

37. 9.3절에서 유체의 부피가 일정하게 유지되는 혼합물 문제들을 보았는데, 그 문제들에서 방정식이 분리됨을 확인했다. (9.3절 예제 6 참조) 시스템 안팎으로 유동률이 다르면, 부피는 일정하지 않고 그 결과인 미분방정식은 선형이지만 분리되지 않는다.

물탱크는 100L의 물을 포함한다. 0.4kg/L의 소금 농도를 갖는 용액이 5L/min의 속도로 추가된다. 용액은 혼합된 채 유지되며, 3L/min의 속도로 물탱크에서 빠져나간다. $y(t)$가 t분 이후의 소금량(kg 단위)일 경우, y가 미분방정식

$$\frac{dy}{dt} = 2 - \frac{3y}{100 + 2t}$$

를 만족시킴을 보여라. 이 방정식을 풀고 20분 후의 농도를 구하여라.

38. 400L의 용량을 갖는 물탱크는 리터당 0.05g의 염소 농도로 물과 염소가 혼합되어 가득 차 있다. 염소의 농도를 줄이기 위해 담수를 4L/s의 속도로 물탱크에 들여보낸다. 혼합물은 뒤섞인 채 유지되고 10L/s의 속도로 밖으로 나간다. 시간의 함수로 물탱크의 염소량을 구하여라.

39. 질량 m을 갖는 물체가 받침대에서 낙하하고, 공기저항은 물체의 속도에 비례한다고 가정하여라. $s(t)$가 t초 후 낙하한 거리이면, 속도는 $v = s'(t)$, 가속도는 $a = v'(t)$이다. g가 중력에 의한 가속도라면, 물체에 작용하는 하향력은 $mg - cv$이며, 이때 c는 양의 상수이고, 뉴턴의 제2법칙은

$$m\frac{dv}{dt} = mg - cv$$

로 주어진다.

(a) 이를 선형방정식으로 풀어

$$v = \frac{mg}{c}(1 - e^{-ct/m})$$

임을 보여라.

(b) 제한 속도는 얼마인가?

(c) t초 후 물체가 낙하한 거리를 구하여라.

40. 공기저항을 무시한다면, 무거운 물체가 가벼운 물체보다 빨리 낙하하지 않는다는 결론을 내릴 수 있다. 그러나 공기저항을 고려한다면 결론은 바뀐다. 연습문제 39(a)에서 낙하하는 물체의 속도에 대한 표현을 이용하여 dv/dm을 구하고, 무거운 물체가 가벼운 물체보다 빠르게 낙하함을 보여라.

41. (a) 로지스틱 방정식 $P' = kP(1 - P/M)$은 $z = 1/P$로 치환하면 선형미분방정식

$$z' + kz = \frac{k}{M}$$

가 됨을 보여라.

(b) (a)의 선형미분방정식을 풀고 $P(t)$를 구하여라. 그리고 그 결과를 9.4절의 방정식 $\boxed{7}$과 비교하여라.

42. 계절에 따라 변화하는 양을 계산하는 로지스틱 미분방정식은 다음과 같다. 여기서 k, M은 시간에 따른 함수이다.

$$\frac{dP}{dt} = k(t)P\left(1 - \frac{P}{M(t)}\right)$$

(a) $z = 1/P$로 치환하면 위의 방정식은 선형방정식

$$\frac{dz}{dt} + k(t)z = \frac{k(t)}{M(t)}$$

가 되는 것을 보여라.

(b) (a)의 선형방정식의 해를 구하고, 그 해를 이용하여 수용한계 M이 상수일 때,

$$P(t) = \frac{M}{1 + CMe^{-\int k(t)\,dt}}$$

이 됨을 보여라. $\int_0^\infty k(t)\,dt = \infty$일 때 $\lim_{t\to\infty} P(t) = M$임을 추측하여라. [$k(t) = k_0 + a\cos bt$, $k_0 > 0$일 때, 이 명제는 사실이다. 이것은 주기적으로 계절에 따라 변화하는 양이 양의 고유 성장률을 나타내고 있다.]

(c) k가 상수이고, M이 변할 때

$$z(t) = e^{-kt}\int_0^t \frac{ke^{ks}}{M(s)}\,ds + Ce^{-kt}$$

임을 보이고, 로피탈 정리를 이용하여 $\lim_{t\to\infty} M(t)$가 수렴하면 $P(t)$가 같은 값으로 수렴한다는 것을 추측하여라.

응용 프로젝트 | 어느 것이 더 빠른가? 상승인가, 하강인가?

공기저항에 따른 힘을 모형화할 때 공의 물리적 특성과 속도에 따라 여러 가지 함수가 이용된다. 여기서 선형 모형 $-pv$를 이용한다. 그러나 2차 모형(상승 시 $-pv^2$, 하강 시 pv^2)은 더 빠른 속도에 대한 다른 가능성이다(9.3절의 연습문제 52 참조). 골프 공에 대해서는 실험에 의하면 좋은 모형은 상승 시 $-pv^{1.3}$이고 하강 시 $p|v|^{1.3}$이다. 그러나 어떤 힘 함수 $-f(v)$가 사용되든 ($v > 0$일 때 $f(v) > 0$이고 $v < 0$일 때 $f(v) < 0$) 질문에 대한 답은 똑같다.

공중에 공을 던진다고 가정하자. 공이 최고 높이에 도달하는 시간과 최고 높이에서 지구로 떨어지는 시간 중 어느 것이 더 걸린다고 생각하는가? 여기서 이 문제를 풀 것이지만, 먼저 이 상황을 생각하고 물리적인 직관에 근거하여 추측하여라.

1. 질량이 m인 공을 지구 표면에서 초기속도 v_0로 위로 수직으로 던진다. 공에 작용하는 힘은 중력의 힘으로, 공기저항의 방해 힘은 운동의 반대 방향으로 작용하고, p가 양의 상수이고 $v(t)$가 시작 t에서의 공의 속도일 때, $p|v(t)|$로 가정한다. 상승과 하강에서 공에 작용하는 총 힘은 $-pv - mg$이다. (상승 시에는 $v(t)$가 양이고 저항은 아래로 작용한다. 하강 시에는 $v(t)$는 음수이고 저항은 위로 작용한다.) 따라서 뉴턴의 제2법칙에 의해 운동방정식은

$$mv' = -pv - mg$$

이다. 이 미분방정식을 풀어 속도가

$$v(t) = \left(v_0 + \frac{mg}{p}\right)e^{-pt/m} - \frac{mg}{p}$$

임을 보여라. (이 미분방정식도 변수분리형이다.)

2. 공이 땅에 다시 떨어질 때까지의 공의 높이는

$$y(t) = \left(v_0 + \frac{mg}{p}\right)\frac{m}{p}(1 - e^{-pt/m}) - \frac{mgt}{p}$$

임을 보여라.

3. t_1을 공이 최고 높이에 도달하는 시간이라 하자.

$$t_1 = \frac{m}{p}\ \ln\left(\frac{mg + pv_0}{mg}\right)$$

임을 보여라. 질량이 1kg이고 초기속도가 20m/s인 공에 대해 이 시간을 구하여라. 공기저항은 속력의 $\frac{1}{10}$이라 가정한다.

4. t_2를 공이 지구에 다시 떨어지는 시간이라 하자. 문제 3의 특정한 공에 대해 높이 함수 $y(t)$의 그래프를 이용해 t_2를 계산하여라. 어느 것이 더 빠른가? 상승인가, 하강인가?

5. 일반적으로 t_2를 구하기는 쉽지 않은데 이는 방정식 $y(t) = 0$을 구체적으로 풀기가 불가능하기 때문이다. 그러나 상승 또는 하강의 어느 것이 더 빠른지를 결정하기 위해 간접적인 방법을 사용할 수 있다. $y(2t_1)$이 양인지 음인지를 결정한다. $x = e^{pt_1/m}$일 때,

$$y(2t_1) = \frac{m^2g}{p^2}\left(x - \frac{1}{x} - 2\ln x\right)$$

임을 보여라. 그리고 $x > 1$임과 함수

$$f(x) = x - \frac{1}{x} - 2\ln x$$

가 $x > 1$일 때 상승함을 보여라. 이 결과를 이용해 $y(2t_1)$이 양인지 음인지 결정하여라. 결론은 무엇인가? 상승이 빠른가, 하강이 빠른가?

9.6 포식자–피식자 체계

어떤 환경에서 혼자 사는 단일 종의 증가에 대하여 여러 모델들을 조사하였다. 이 절에서는 같은 서식지에서 두 종의 상호작용을 고려한 좀더 실제적인 모델을 생각해본다. 이러한 모델들은 두 개의 연립미분방정식 형태로 나타나는 것을 알게 될 것이다.

먼저 먹이 공급원이 되는 **피식자**(prey)라 불리는 한 종과 이 종을 먹이로 삼는 **포식자**(predator)라 부르는 다른 종이 있는 상황을 생각하자. 피식자와 포식자의 예로는 고립된 숲 속에 있는 토끼와 늑대, (먹이) 물고기와 상어, 진딧물과 무당벌레, 그리고 박테리아와 아메바 등을 들 수 있다. 이 모델은 두 개의 종속변수를 가지며 둘 다 시간에 관한 함수이다. $R(t)$를 시각 t에서의 피식자(토끼를 R로 나타내자)의 수라 두고 $W(t)$를 포식자(늑대를 W로 나타내자)의 수라 두자.

포식자가 없는 상태에서, 충분한 먹이거리의 공급은 피식자의 지수적인 증가로 이루어진다. 즉,

$$\frac{dR}{dt} = kR, \qquad \text{여기서 } k\text{는 양의 상수}$$

피식자가 없는 경우, 포식자 수는 자신들의 수에 비례하여 감소한다는 것을 가정한다. 즉,

$$\frac{dW}{dt} = -rW, \qquad \text{여기서 } r\text{은 양의 상수}$$

그러나 이 두 종이 있는 상황에서 피식자의 주된 죽음의 원인은 포식자에게 먹히는 것이고, 포식자의 탄생과 생존율은 피식자라고 불리는 이용 가능한 식량의 공급에 종속된다고 가정하자. 또한 두 종은 두 개체수에 비례하는 비율로 서로가 자주 마주치고 이것은 곱 RW에 비례한다고 가정하자. (어느 쪽이든 개체수가 많으면 많을수록 더 많이 만날 것이다.) 이러한 가정을 결합한 두 미분방정식은 다음과 같다.

W 포식자
R 피식자

$$\boxed{1} \qquad \frac{dR}{dt} = kR - aRW \qquad \frac{dW}{dt} = -rW + bRW$$

여기서 k, r, a, b는 양의 상수이다.'$-aRW$'항은 피식자의 자연적인 증가율을 감소시키고 'bRW'항은 포식자의 자연적인 감가율을 증가시키게 함을 주목하여라.

로트카–볼테라 방정식은 이탈리아 수학자 비토 볼테라(1860~1940)가 아드리아 바다에서 상어와 상어의 먹이인 어류의 개체수의 변화를 설명하기 위하여 제안했던 모델이다.

방정식 $\boxed{1}$은 **포식자–피식자 방정식**(predator-prey equation) 혹은 **로트카–볼테라 방정식**(Lotka-Volterra equation)으로 알려져 있다. 이 연립방정식의 해는 시간의 함수로서 피식자와 포식자의 개체수를 나타내는 함수의 쌍 $R(t)$와 $W(t)$이다. 방정식이 연립방정식이므로(R과 W가 두 방정식 모두에 나타난다) 한 방정식을 풀고 다음 방정식을 풀 수 없다. 동시에 두 방정식을 풀어야 한다. 불행하게도 t의 함수로서 명시적인 R과 W의 함수를 찾는 것은 일반적으로 불가능하다. 그러나 이 방정식을 해석하는 데 그래프적인 방법을 사용할 수 있다.

예제 1 토끼와 늑대의 개체수가 $k = 0.08$, $a = 0.001$, $r = 0.02$, $b = 0.00002$인 로트카–볼테라 방정식 $\boxed{1}$로 표현된다고 가정하자. 시간 t는 개월 수를 나타낸다.

kochanowski / Shutterstock.com

(a) 상수해(**평형해**라 부름)를 찾고 그 답을 설명하여라.

(b) 연립미분방정식을 이용하여 dW/dR에 대한 식을 구하여라.

(c) RW평면에 미분방정식의 대한 방향장을 그려라. 그 방향장을 이용하여 몇 개의 해곡선을 그려라.

(d) 어떤 시각에 1000마리의 토끼와 40마리의 늑대가 있다고 가정하자. 대응되는 해곡선을 그려보고 이것을 이용하여 양쪽 개체수 변화를 설명하여라.

(e) (d)를 이용하여 t의 함수로서 R과 W의 그림을 그려라.

풀이

(a) k, a, r, b에 주어진 값을 대입하면, 로트카−볼테라 방정식은

$$\frac{dR}{dt} = 0.08R - 0.001RW$$

$$\frac{dW}{dt} = -0.02W + 0.00002RW$$

가 된다. 두 도함수가 0이면, R과 W는 상수이다. 즉,

$$R' = R(0.08 - 0.001W) = 0$$

$$W' = W(-0.02 + 0.00002R) = 0$$

한 해는 $R = 0$과 $W = 0$으로 주어진다. (이것은 토끼와 늑대가 없는 경우에는 개체수가 증가하지 않을 것이 분명함을 의미한다.) 다른 상수해는

$$W = \frac{0.08}{0.001} = 80$$

$$R = \frac{0.02}{0.00002} = 1000$$

이다. 따라서 평형 개체수는 늑대 80마리와 토끼 1000마리이다. 이것은 1000마리의 토끼가 80마리의 늑대를 유지시키기에 충분함을 의미한다. (결과적으로 토끼 수를 감소시키는) 늑대 수가 너무 많지도 (토끼 수를 증가시키는) 늑대 수가 너무 적지도 않다는 것이다.

(b) 연쇄법칙을 이용하여 t를 소거한다.

$$\frac{dW}{dt} = \frac{dW}{dR}\frac{dR}{dt}$$

따라서

$$\frac{dW}{dR} = \frac{\frac{dW}{dt}}{\frac{dR}{dt}} = \frac{-0.02W + 0.00002RW}{0.08R - 0.001RW}$$

(c) W를 R의 함수로 보면, 미분방정식

$$\frac{dW}{dR} = \frac{-0.02W + 0.00002RW}{0.08R - 0.001RW}$$

를 얻을 수 있다. 그림 1에서 이 미분방정식에 대한 방향장을 그려보고 이것을 이용하여 그림 2에서 몇 개의 해곡선을 그릴 수 있다. 해곡선을 따라 이동하면 시각에 따라 R과 W의 관계가 어떠한지를 관찰할 수 있다. 곡선을 따라 움직이면 같은 위치에 되돌아오는 폐곡선임을 주목하자. 점 (1000, 80)은 모든 해곡선의 안쪽에 있음을 주목하자. 이 점은 평형해 $R = 1000$, $W = 80$에 대응되기 때문에 **평형점**(equilibrium point)이라 부른다.

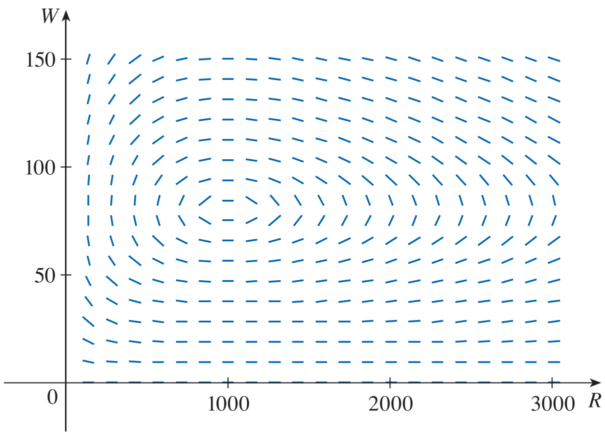


그림 1 포식자–피식자 체계에 대한 방향장

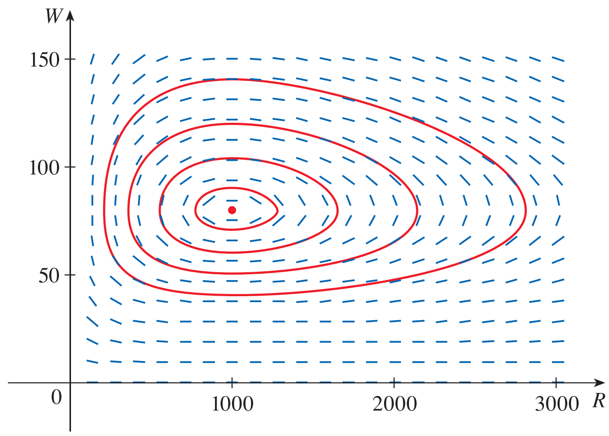


그림 2 체계의 위상도

그림 2와 같이 연립미분방정식의 해를 나타낼 때, RW평면을 **위상 평면**(phase plane)이라 하고, 해곡선을 **위상 자취**(phase trajectories)라 부른다. 따라서 위상 자취는 시간에 따라 해 (R, W)에 의하여 나타나는 경로이다. **위상도**(phase portrait)는 평형해와 그림 2에서 보여진 전형적인 위상 자취로 구성된다.

(d) 1000마리의 토끼와 40마리의 늑대로부터 시작은 점 $P_0(1000, 40)$을 통과하는 해곡선을 그리는 것에 해당된다. 그림 3은 방향장을 제거한 위상 자취를 보여준다. 시간 $t = 0$일 때 점 P_0에서 시작하여 t를 증가시키면 위상 자취를 따라 시계 또는 반시계 방향 어느 쪽으로 움직일까? 만약 첫째 미분방정식에서 $R = 1000$, $W = 40$으로 두면,

$$\frac{dR}{dt} = 0.08(1000) - 0.001(1000)(40) = 80 - 40 = 40$$

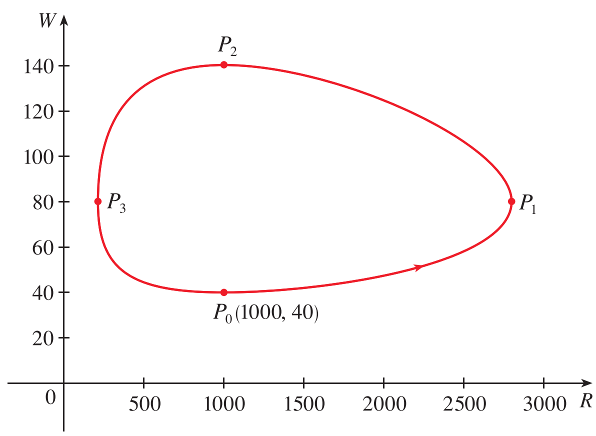


그림 3
(1000, 40)을 통과하는 위상 자취

을 얻을 수 있다. $dR/dt > 0$이므로, P_0에서 R이 증가한다고 결론지을 수 있고, 따라서 위상 자취를 따라 반시계 방향으로 움직인다.

P_0에서 개체군 사이에 균형을 유지하기에 충분한 만큼 늑대가 존재하지 않으므로 토끼의 개체수가 증가함을 알 수 있다. 이것은 결과적으로 늑대 수가 더 많아지게 되고 종국에는 토끼들이 늑대를 피하기에 어려울 만큼 많은 늑대가 있게 될 것이다. 따라서 토끼 수는 P_1(P_1에서 R은 최고의 개체수 약 2800에 이르리라고 추정된다)에서 감소하기 시작한다. 이것은 얼마 후 늑대 수가 P_2(P_2에서 $R = 1000$이고 $W \approx 140$이다)에서 떨어지기 시작함을 의미한다. 그러나 이것은 토끼에게 이로워 그 후에 토끼 수가 P_3(P_3에서 $W = 80$이고 $R \approx 210$이다)에서 증가하기 시작한다. 결과적으로 늑대 수는 결국 전과 마찬가지로 증가하기 시작한다. 이런 일은 개체수가 그들의 초깃값 $R = 1000$, $W = 40$으로 되돌아왔을 때 일어나고 그리고 완전한 주기가 다시 시작된다.

(e) 토끼와 늑대의 개체수가 어떻게 많아지고 적어지는지에 대한 (d)의 설명으로부터 $R(t)$와 $W(t)$의 그래프를 그릴 수 있다. 그림 3에서 시각 t_1, t_2, t_3일 때 점 P_1, P_2, P_3에 도달한다고 가정하자. 그러면 그림 4와 같이 R과 W에 대한 그래프를 그릴 수 있다.

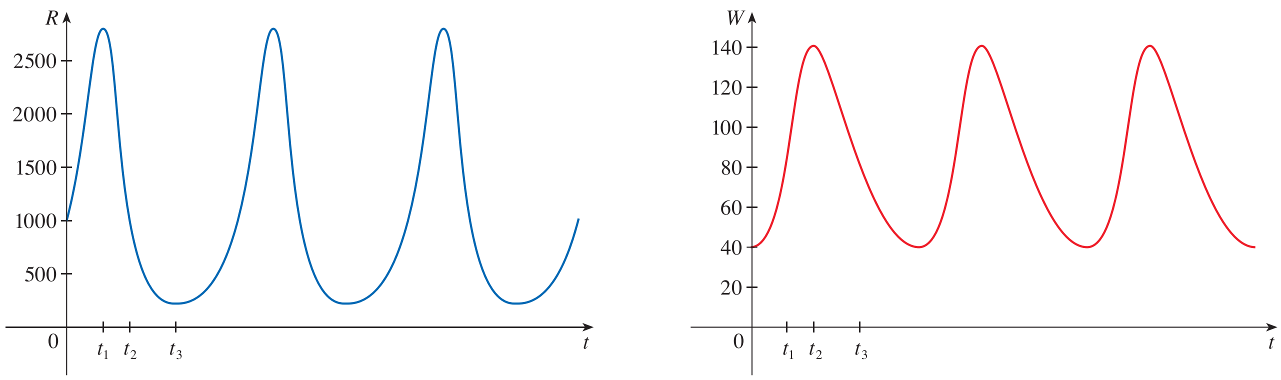


그림 4 시간에 대한 함수로서 토끼와 늑대 수의 그래프

이 그래프를 비교하기 쉽게 하기 위하여 그림 5와 같이 같은 축에 R과 W에 대한 그래프를 그려보자. 토끼는 늑대보다 약 1/4 주기 앞에서 최고 개체수를 가짐을 주목하여라.

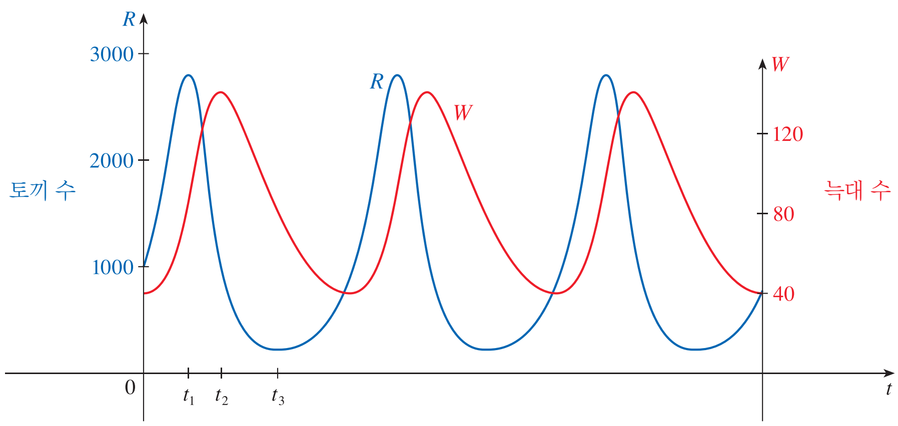


그림 5
토끼와 늑대 수의 비교

Thomas Kitchin & Victoria Hurst / All Canada Photos

모델을 만드는 과정의 중요한 부분은 1.2절에서 논의했듯이 수학적인 결론을 실제 세계에 예측으로 해석하는 것이고 실제 데이터에 대하여 예측을 검증해보는 것이다. 1670년부터 캐나다에서 동물의 모피를 교역한 허드슨 베이 사는 1840년대부터의 기록을 보유하고 있다. 그림 6은 90년 이상 그 회사에서 교역한 산토끼의 모피와 이것의 포식자, 캐나다 스라소니의 모피 수를 나타내는 그래프를 보여준다. 로트카–볼테라 모델에 대하여 예견되는 산토끼와 스라소니의 개체수에 대한 두 개의 진동이 실제로 일어나고 있고 그 순환주기의 간격은 약 10년임을 알 수 있다.

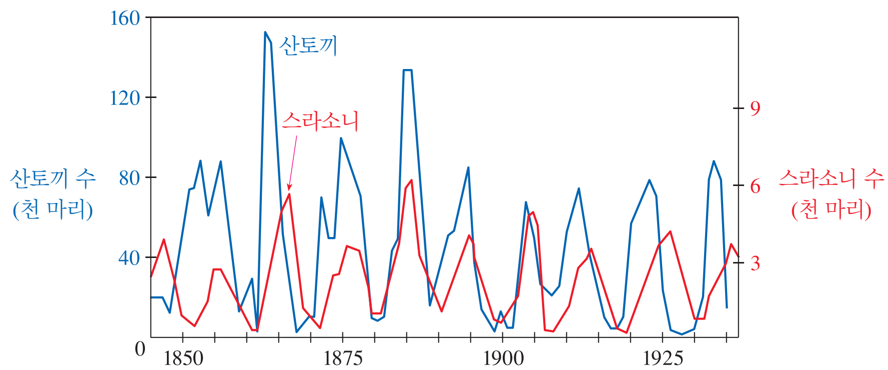


그림 6
허드슨 베이 사의 기록에 나타난 산토끼와 스라소니의 상대적 관계

비록 상대적으로 단순한 로트카–볼테라 모델로 두 개의 개체군을 설명하고 예언하는 데 어느 정도 성공은 했지만, 더 복잡한 모델이 있다. 로트카–볼테라 방정식을 수정하는 한 가지 방법은 포식자가 없는 상태에서 피식자는 수용한계 M을 갖는 로지스틱 모델에 따라 증가한다고 가정하는 것이다. 그러면 로트카–볼테라 방정식 $\boxed{1}$은 다음 연립미분방정식으로 바뀐다.

$$\frac{dR}{dt} = kR\left(1 - \frac{R}{M}\right) - aRW \qquad \frac{dW}{dt} = -rW + bRW$$

이 모델은 연습문제 11과 12에서 다룬다.

같은 자원에 대하여 경쟁하거나 서로 공생하는 두 종족의 개체군의 발달 단계를 묘사하고 예측하는 모델도 제안되어 있는데, 이 모델은 연습문제 2~4에서 다루고자 한다.

9.6 연습문제

1. 각 피식자–포식자 체계에 대하여 x, y 중 어떤 변수가 피식자의 개체수를 나타내고 어떤 변수가 포식자의 개체수를 나타내는지 결정하여라. 피식자의 증가는 단지 포식자에 의해 제한되는가? 아니면 다른 요소가 있는가? 포식자는 오직 피식자만을 먹는가? 아니면 그들은 추가적으로 다른 먹을 자원을 갖고 있는가? 설명하여라.

(a) $\dfrac{dx}{dt} = -0.05x + 0.0001xy$

$\dfrac{dy}{dt} = 0.1y - 0.005xy$

(b) $\dfrac{dx}{dt} = 0.2x - 0.0002x^2 - 0.006xy$

$\dfrac{dy}{dt} = -0.015y + 0.00008xy$

2. 다음 연립미분방정식은 같은 자원을 두고 서로 경쟁하거나 공생하는(예를 들어, 꽃 식물과 화분 매개곤충) 두 종족에 대한

모델이다. 각 계가 경쟁하는지 공생하는지 결정하고 이것이 왜 타당한 모델인지 설명하여라. (한 종족의 증가는 다른 종족의 증가율에 어떤 영향을 미치는지 자문하여라.)

(a) $\dfrac{dx}{dt} = 0.12x - 0.0006x^2 + 0.00001xy$

$\dfrac{dy}{dt} = 0.08x + 0.00004xy$

(b) $\dfrac{dx}{dt} = 0.15x - 0.0002x^2 - 0.0006xy$

$\dfrac{dy}{dt} = 0.2y - 0.00008y^2 - 0.0002xy$

3. 다음 연립미분방정식은 두 종족의 개체수의 모델을 나타내는 것이다.

$$\frac{dx}{dt} = 0.5x - 0.004x^2 - 0.001xy$$

$$\frac{dy}{dt} = 0.4y - 0.001y^2 - 0.002xy$$

(a) 이 모델은 공생하거나, 경쟁 또는 육식동물과의 먹이관계를 나타내는 데 타당한가?

(b) 평형해를 찾고 그것의 의미를 설명하여라.

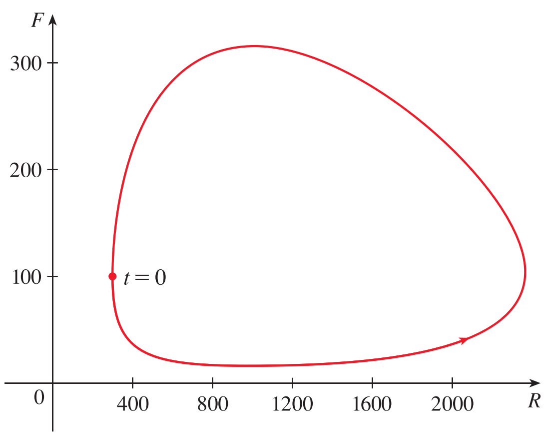
4. 스라소니는 눈신토끼를 먹고 눈신토끼는 버드나무와 같은 목본 식물(woody plants)을 먹는다. 토끼가 없을 때, 버드나무 수는 기하급수적으로 증가하고 스라소니 수는 기하급수적으로 감소할 것이라고 가정한다. 스라소니와 버드나무가 없으면 토끼 수가 기하급수적으로 감소한다. 시각 t에서 스라소니, 눈신토끼, 버드나무의 개체수를 각각 $L(t)$, $H(t)$, $W(t)$로 나타내어 역학 관계 모델로서 미분방정식 시스템을 작성하라. 만약 이 방정식에서 상수가 모두 양수라면, +, − 기호를 사용하는 이유를 설명하여라.

5-6 토끼(R)와 여우(F)의 개체수에 대한 위상 자취가 아래와 같이 나타나 있다.

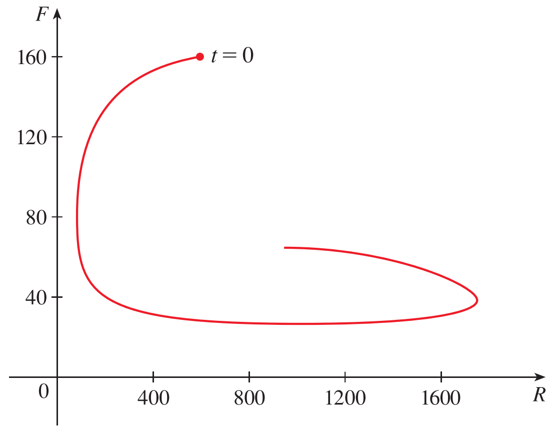
(a) 시간이 지남에 따라 각 개체수의 변화를 설명하여라.

(b) 그 설명을 바탕으로 시간의 함수로서 R과 F의 그래프의 개형을 그려라.

5.

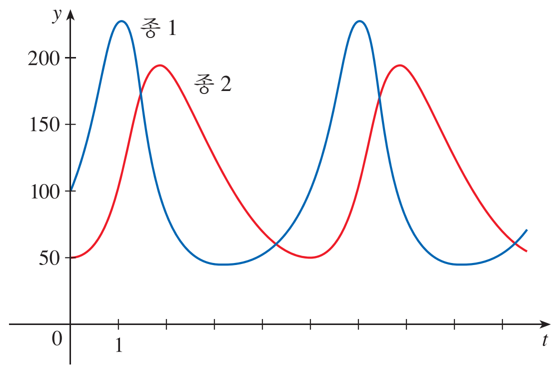


6.

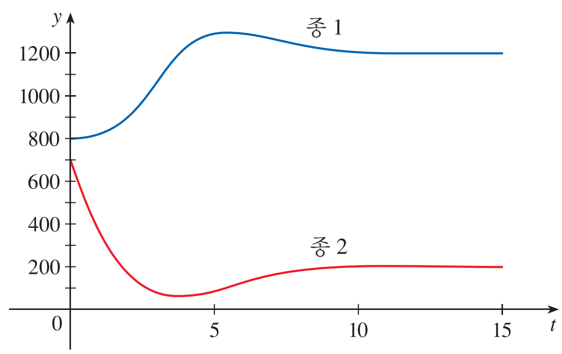


7-8 두 종의 개체군의 개체수의 그래프가 아래와 같다. 이것을 이용하여 여기에 대응하는 위상 자취의 개형을 그려라.

7.



8.



9. 예제 1(b)에서 토끼와 늑대의 개체수는 다음 미분방정식을 만족한다.

$$\frac{dW}{dR} = \frac{-0.02W + 0.00002RW}{0.08R - 0.001RW}$$

(a) 이 변수분리형 미분방정식을 풀어서 다음을 보여라.

$$\frac{R^{0.02}W^{0.08}}{e^{0.00002R}e^{0.001W}} = C$$

여기서 C는 상수이다.

(b) 이 방정식은 W를 R의 함수(또는 그 반대로)로 푸는 것은 불가능하다. 컴퓨터를 이용하여 (1000, 40)을 지나는 음함수로 정의된 해곡선을 그리고 그림 3과 비교하여라.

10. 진딧물과 무당벌레의 개체수는 다음 연립미분방정식으로 모델링된다.

$$\frac{dA}{dt} = 2A - 0.01AL$$

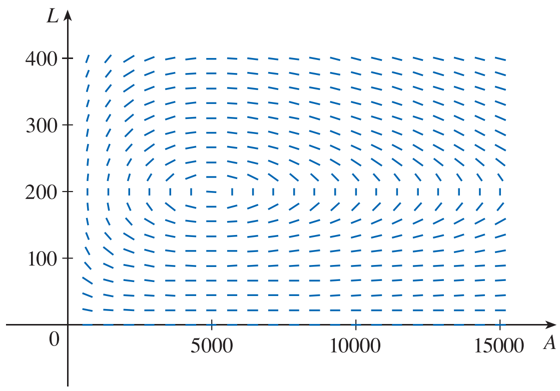
$$\frac{dL}{dt} = -0.5L + 0.0001AL$$

여기서 A는 진딧물의 개체수, L은 무당벌레의 개체수이다.

(a) 평형해를 구하고 그 의미를 설명하여라.

(b) dL/dA의 식을 구하여라.

(c) (b)의 미분방정식에 대한 방향장이 아래와 같다. 이것을 이용하여 위상도를 그려라. 위상 자취의 공통점은 무엇인가?



(d) 시각 $t = 0$에서 1000마리의 진딧물과 200마리의 무당벌레가 있다고 가정하자. 대응되는 위상 자취와 이것을 이용하여 두 개체 간의 개체수 변화를 묘사하여라.

(e) (d)를 이용하여 시간 t의 함수로서 진딧물과 무당벌레의 개체수의 개형을 그려라. 서로 어떻게 관련이 되는가?

11. 예제 1에서 로트카–볼테라 모델을 이용하여 토끼와 여우의 개체수를 모델링했다. 이 모델을 다음과 같이 변형하자.

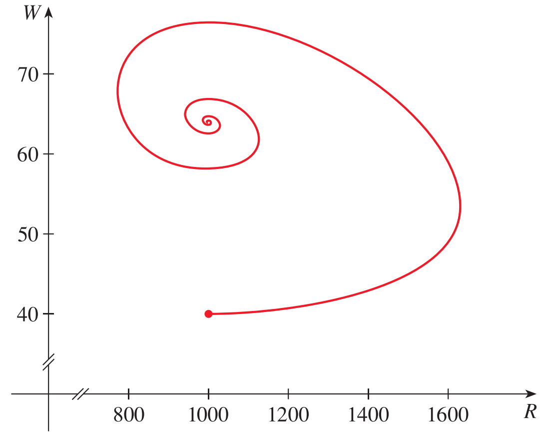
$$\frac{dR}{dt} = 0.08R(1 - 0.0002R) - 0.001RW$$

$$\frac{dW}{dt} = -0.02W + 0.00002RW$$

(a) 이 방정식에 따르면 늑대가 없을 때 토끼의 개체수는 어떻게 되겠는가?

(b) 모든 평형해를 구하고 그 의미를 설명하여라.

(c) 점 (1000, 40)에서 시작하는 위상 자취의 그림이다. 토끼와 여우의 개체수는 결국 어떻게 되겠는가?



(d) 시간 t의 함수로 토끼와 여우의 개체수의 그래프를 그려라.

T 12. 연습문제 10에서 진딧물과 무당벌레의 개체수를 로트카–볼테라 체계로 모델링했다. 이 방정식을 다음과 같이 변형한다고 가정하자.

$$\frac{dA}{dt} = 2A(1 - 0.0001A) - 0.01AL$$

$$\frac{dL}{dt} = -0.5L + 0.0001AL$$

(a) 무당벌레가 없으면 이 모델은 진딧물에 대하여 어떤 것을 예측할 수 있는가?

(b) 평형해를 구하여라.

(c) dL/dA에 대한 식을 구하여라.

(d) 컴퓨터를 이용하여 (c)에 대한 미분방정식의 방향장을 그려라. 위상 자취는 어떤 공통점을 가지는가?

(e) 시각 $t = 0$에서 1000마리의 진딧물과 200마리의 무당벌레가 있다고 가정하자. 대응되는 위상 자취와 이것을 이용하여 두 개체 간의 개체수 변화를 묘사하여라.

(f) (e)를 이용하여 시간 t의 함수로서 진딧물과 무당벌레의 개체수의 개형을 그려라. 서로 어떻게 관련되는가?