이를 2계 선형 미분방정식 (2.14)에 대입하면 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$(a\,r^2 + b\,r + c)y = 0$$

따라서 미분방정식이 $y(x) = 0$ 이외의 해를 가지기 위해서는 다음의 방정식이 해를 가져야 한다.

$$a\,r^2 + b\,r + c = 0 \tag{2.15}$$

이때 식 (2.15)를 식 (2.14)의 보조방정식(**auxiliary equation**) 또는 특성방정식(**characteristic equation**)이라고 한다. 이 보조방정식은 판별식 $b^2 - 4ac$의 부호에 따라 실근, 중근, 허근의 해를 가지게 되며, 미분방정식도 그에 따라 다른 종류의 일반해를 가지게 된다.

경우 **I.** $b^2 - 4ac > 0$ 인 경우, 보조방정식은 두 개의 실근

$$r_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \quad r_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

를 가지며, 미분방정식 (2.14)의 일반해는 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$y = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x}$$

예제 2.10

미분방정식 $y'' + y' - 2y = 0$ 의 해를 구하시오.

풀이: 미분방정식의 보조방정식은

$$r^2 + r - 2 = (r + \overset{2}{\cancel{1}})(r - \overset{1}{\cancel{2}}) = 0$$

이 되며, 그 해는 $r = \overset{-2,\,1}{\cancel{2, -1}}$ 이다. 그러므로 미분방정식의 일반해는

$$\cancel{y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-x}} \qquad y = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{x}$$

으로 구해진다. ♦

경우 **II.** $b^2 - 4ac = 0$ 인 경우, 보조방정식은 $r = -\dfrac{b}{2a}$ 을 중근으로 가지며, 미분방정식 (2.14)의 일반해는 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$y = c_1 e^{rx} + c_2 x e^{rx} \tag{2.16}$$

여기에서 $y_1 = e^{rx}$가 식 (2.14)의 해가 됨은 쉽게 확인할 수 있고, $y_2 = xe^{rx}$도 식 (2.14)의 또 다른 해가 될 수 있음을 다음과 같이 확인할 수 있다.

$$\begin{aligned} ay_2'' + by_2' + cy_2 &= a(2re^{rx} + r^2 xe^{rx}) + b(e^{rx} + rxe^{rx}) + cxe^{rx} \\ &= (2ar + b)e^{rx} + (ar^2 + br + c)xe^{rx} \end{aligned}$$

가설 $H_0 : \mu = 600$, $\ H_1 : \mu > 600$에 대한 유의수준 $\alpha = 0.05$의 기각역은 $T \geq t_{0.05}(9) = 1.833$이다. 그런데 관측된 값은

$$T = \frac{\overline{X} - \mu_0}{s/\sqrt{n}} = \frac{608 - 600}{10.5725/\sqrt{10}} = 2.393$$

이므로 기각역에 속해서 H_0를 기각한다. 즉, 유의수준 5%에서 소비자단체의 주장이 타당하다고 할 수 있다. ♦

- 임의의 모집단의 모평균에 대한 가설 검정 **(**표본이 충분히 큰 경우**)**

평균이 μ, 분산이 σ^2인 모집단이 정규분포는 아니지만 표본의 크기 n이 충분히 경우(일반적으로 $n \geq 30$)에는 앞에서 살펴본 구간 추정 방법을 반영하여 가설 검정의 통계량을 다음과 같이 정한다.

(1) σ^2을 알 때 : $Z = \dfrac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$

(2) σ^2을 모를 때 : $Z = \dfrac{\overline{X} - \mu_0}{s/\sqrt{n}}$ (s는 표본의 표준편차)

예제 3.32

어느 지역 고등학교 남학생의 키가 5년 전 조사결과에서 평균 168cm였다. 올해 100명을 임의로 추출하여 조사한 결과 평균 $\overline{X} = 169.3$cm, 표준편차 $s = 7$cm로 나타났다. 이 지역 고등학교 남학생의 평균 키가 5년 ~~전과 달라~~졌는지를 유의수준 5%에서 검정하시오.

보다 커

풀이: 가설 $H_0 : \mu = 168$, $\ H_1 : \mu \neq 168$에 대한 유의수준 $\alpha = 0.05$의 기각역은 $|Z| \geq z_{0.05} = 1.645$이다. 그런데 관측된 값은

$$Z = \frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{169.3 - 168}{7/\sqrt{100}} = 1.857$$

이므로 기각역에 속하여 H_0를 기각한다. 즉, 유의수준 5%에서 이 지역 고등학교 남학생의 평균 키가 5년 전과 달라졌다고 할 수 있다. ♦

연습문제 3.5

1. 모집단이 평균 20, 표준편차 5인 정규분포를 따른다고 할 때, 표본의 크기가 6인 무작위 표본의 평균 $\overline{X}$과 분산 s^2에 대하여 다음을 구하시오.

(1) $E\left(\overline{X}\right)$ (2) $sd\left(\overline{X}\right)$ (3) $\overline{X}$의 분포 (4) $P\left(15 \leq \overline{X} \leq 22\right)$ (5) $E(s^2)$

연습문제 2.4

1. (1) $3xy' + 2(1+y) = 0 \;\Rightarrow\; y' + \dfrac{2}{3x}y = -\dfrac{2}{3x}$

$I(x) = e^{\int (2/3x)dx} = e^{(2/3)\ln x} = x^{2/3}$

$[Iy]' = [x^{2/3}y]' = x^{2/3}y' + \dfrac{2}{3}x^{-1/3}y = x^{2/3}\left(-\dfrac{2}{3x}\right) = -\dfrac{2}{3}x^{-1/3}$

$x^{2/3}y = \displaystyle\int \frac{2}{3}x^{-1/3}dx \;\Rightarrow\; y = -x^{-2/3}(x^{2/3} + C) = Cx^{-2/3} + 1$

(2) $x^2y' - 2xy = \dfrac{1}{x} \;\Rightarrow\; y' = -\dfrac{2}{x}y = \dfrac{1}{x^3}\; I = e^{-\int (2/x)dx} = e^{-2\ln x} = x^{-2}$

$[Iy]' = [x^{-2}y]' = x^{-2}(y' - 2x^{-1}y) = x^{-5}$

$x^{-2}y = \displaystyle\int x^{-5}dx = -\frac{1}{4}x^{-4} + C \;\Rightarrow\; y = \frac{1}{4}x^{-2} + Cx^2$

(3) $y + xy' = -2x \;\Rightarrow\; I(x) = e^{\int xdx} = e^{x^2/2}$

$[Iy]' = \left[e^{x^2/2}y\right]' = e^{x^2/2}(y' + xy) = e^{x^2/2}(-2x)$

$e^{x^2/2}y = -\displaystyle\int 2xe^{x^2/2}dx = -\int te^t dt(t = x^2/2)$

$= -(t-1)e^t + C = (1 - \dfrac{x^2}{2})e^{x^2/2} + C$

$\therefore\; y = 1 - \dfrac{x^2}{2} + Ce^{-x^2/2}$

$e^{\int 1dx}$

(4) $y' + y = e^x \;\Rightarrow\; I(x) = e^{\int dx} = e^x$

$[Iy]' = \left[e^x y\right]' = e^x(y' + y) = e^{2x}$

$e^x y = \displaystyle\int e^{2x}dx = \frac{1}{2}e^{2x} + C \;\Rightarrow\; y = \frac{1}{2}e^x + C^{-x}$

$e^{\int \frac{1}{x}dx}$

(5) $xy' + y = x\ln x \;\Rightarrow\; y' + \dfrac{1}{x}y = \ln x \;\Rightarrow\; I(x) = e^{\in(1/x)dx} = e^{\ln x} = x$

$[Iy] = [xy]' = x(y' + \dfrac{1}{x}y) = x\ln x$

$xy = \displaystyle\int x\ln x dx = \frac{x^2}{2}\ln x - \int \frac{1}{2}dx = \frac{1}{2}(x^2\ln x - x) + C$

$\therefore\; y = \dfrac{1}{2}(x\ln x - 1 + C)$

$e^{-\int 1dx}$

(6) $y' - y = x \;\Rightarrow\; I(x) = e^{-\int dx} = e^{-x}$

$[Iy]' = \left[e^{-x}y\right]' = e^{-x}(y' - y) = xe^{-x}$

$e^{-x}y = \displaystyle\int xe^{-x}dx = -xe^{-x} + \int e^{-x}dx = -(x+1)e^{-x} + C \therefore\; y = -x - 1 + Ce^x$

(7) $y' = 1 - x + y - xy \;\Rightarrow\; y' + (x-1)y = 1 - x \;\Rightarrow\; I(x) = e^{\int (x-1)dx} = e^{x^2/2 - x}$

$[Iy]' = \left[e^{x^2/2-x}y\right]' = e^{x^2/2-x}(y' + (x-1)y) = (1-x)e^{x^2/2-x}$

$e^{x^2/2-x}y = \displaystyle\int (1-x)e^{x^2/2-x}dx = -\int te^t dt = (1-t)e^t + C(t = x^2/2 - x)$

$y = 1 - t + Ce^{-t} = 1 + x - \dfrac{x^2}{2} + Ce^{-x^2/2+x}$