제2장 보충문제

보충문제 (2.1)

1. 실수 전체의 집합 $\mathbb{R}$ 에서 두 실수 a, b에 대하여 다음이 성립한다.

$$(1-a)+(1-b) = 1-(a+b-1),$$
$$(1-a)(1-b) = 1-(a+b-ab)$$

이 사실을 이용하여 다음이 성립함을 밝혀라.

(1) 집합 $\mathbb{R}$는 다음과 같이 정의된 연산 $\oplus$에 관하여 Abel군을 이룬다.

$$a \oplus b = a+b-1$$

(2) $G = \mathbb{R}-\{1\}$는 다음과 같이 정의된 연산 $\circ$ 에 관하여 Abel 군을 이룬다.

$$a \circ b = a+b-ab$$

2. 실수 전체의 집합 $\mathbb{R}$ 에서 두 실수 a, b에 대하여 다음이 성립한다.

$$(1+a)+(1+b) = 1+(a+b+1),$$
$$(1+a)(1+b) = 1+(a+b+ab)$$

이 사실을 이용하여 다음이 성립함을 증명하여라.

(1) 집합 $\mathbb{R}$는 다음과 같이 정의된 연산 $\oplus$에 관하여 Abel군을 이룬다.

$$a \oplus b = a+b+1$$

(2) $G = \mathbb{R}-\{-1\}$는 다음과 같이 정의된 연산 $*$에 관하여 Abel군을 이룬다.

$$a * b = a+b+ab$$

3. 집합 $G = \{(a, b) \mid a \in \mathbb{R}^*, b \in \mathbb{R}\}$ 위에 연산 $\cdot$ 을 다음과 같이 정의하자.

$$(a, b)\cdot(c, d) = (ac, ad+b)$$

이 때, 다음이 성립함을 밝혀라.

(1) G는 연산 $\cdot$ 에 관하여 군을 이룬다.

(2) 군 $(G, \cdot)$는 Abel 군이 아니다. .

4. 구간 I ($I \subseteq \mathbb{R}$) 위에서 정의된 함수 $f: I \to \mathbb{R}$ 전체로 이루어진 집합을 $F(I)$ 로 나타내고, 또 임의의 $f, g \in F(I)$ 에 대하여 $f+g$ 를 다음과 같이 정의된 함수라고 하자.

$$f+g: I \to \mathbb{R}, \ (f+g)(x) = f(x) + g(x)$$

이 때, 집합 $F(I)$ 는 덧셈 $+$ 에 관하여 덧셈군을 이룸을 밝혀라.

5. 반군 $(G, \circ)$ 에서 임의의 원소 $a, b \in G$ 에 대하여 등식

$$y \circ a = b$$

를 만족시키는 원소 $y \in G$ 가 단 하나 존재하더라도 $(G, \circ)$ 는 군이 아닐 수 있음을 밝혀라.

6. 집합 S $(\neq \varnothing)$ 위에 연산 $\circ$ 를 다음과 같이 정의하자.

$$a \circ b = b$$

이 때, $(S, \circ)$ 는 반군임을 밝히고, 또 다음이 성립하는지를 판정하여라.

(1) 임의의 원소 $a, b, c \in S$ 에 대하여 $a \circ b = a \circ c$ 이면 $b = c$ 이다.

(2) 임의의 두 원소 $a, b \in S$ 에 대하여 등식

$$a \circ x = b$$

를 만족시키는 원소 $x \in S$ 가 단 하나 존재한다.

(3) $(S, \circ)$ 는 군이다.

7. 집합 S $(\neq \varnothing)$ 위에 연산 $*$ 를 다음과 같이 정의하자.

$$a * b = a$$

이 때, $(S, *)$ 는 반군임을 밝히고, 또 다음이 성립하는지를 판정하여라.

(1) 임의의 원소 $a, b, c \in S$ 에 대하여 $b * a = c * a$ 이면 $b = c$ 이다.

(2) 임의의 두 원소 $a, b \in S$ 에 대하여 등식

$$x * a = b$$

를 만족시키는 원소 $x \in S$ 가 단 하나 존재한다.

(3) $(S, \circ)$ 는 군이다.

8. 다음 명제가 참인지를 판정하여라.

(1) 반군 $(S, \circ)$에서 임의의 두 원소 $a, b \in S$에 대하여 등식

$$a \circ x = b$$

를 만족시키는 원소 $x \in S$가 단 하나 존재하면 $(S, \circ)$는 군이다.

(2) 반군 $(S, *)$에서 임의의 두 원소 $a, b \in S$에 대하여 등식

$$x * a = b$$

를 만족시키는 원소 $x \in S$가 단 하나 존재하면 $(S, \circ)$는 군이다.

(3) 반군 $(S, \cdot)$에서 임의의 두 원소 $a, b \in S$에 대하여 등식

$$a \cdot x = b, \qquad y \cdot a = b$$

를 만족시키는 원소 $x, y \in S$가 존재하면 $(S, \cdot)$는 군이다.

9. 두 원소로 이루어진 집합 $G = \{a, b\}$ 위에 정의될 수 있는 이항연산 전체의 개수를 말하여라.

그리고, 집합 $G = \{a, b\}$ 위에 정의되는 이항연산 중에서 G에 군의 구조를 부여해 주는 이항연산 전체의 개수를 말하여라.

10. 세 원소로 이루어진 집합 $G = \{a, b, c\}$ 위에 정의될 수 있는 이항연산 전체의 개수를 말하여라.

그리고, 집합 $G = \{a, b, c\}$ 위에 정의되는 이항연산 중에서 G에 군의 구조를 부여해 주는 이항연산 전체의 개수를 말하여라.

11. 군 G에서 원소 $a, b, g \in G$와 양의 정수 n에 대하여 다음이 성립함을 밝혀라.

(1) $(gag^{-1})(gbg^{-1}) = g(ab)g^{-1}, \quad (g^{-1}ag)(g^{-1}bg) = g^{-1}(ab)g$

(2) $(gag^{-1})^{-1} = ga^{-1}g^{-1}, \quad (g^{-1}ag)^{-1} = g^{-1}a^{-1}g$

보충문제 (2.2)

1. 다음 집합은 곱셈군 $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} - \{0\}$ 의 부분군을 이루는지를 판정하여라.

 (1) $\mathbb{Q}^- = \{ r \in \mathbb{Q} \mid r < 0 \}$ (2) $\mathbb{R}^- = \{ x \in \mathbb{R} \mid x < 0 \}$

2. 집합 $G = \{e, a, b, c\}$ 위에 연산 $\circ$ 과 연산 $*$ 가 아래 표와 같이 정의되어 있을 때, $(G, \circ)$ 와 $(G, *)$ 는 군이다.

$\circ$	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	e	c	b
b	b	c	e	a
c	c	b	a	e

$*$	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	b	c	e
b	b	c	e	a
c	c	e	a	b

 (1) 군 $(G, \circ)$ 의 부분군을 모두 구하고, 이들 부분군에 대한 Hasse 다이어그램을 그려라.

 그리고, 등식 $x^2 = e$ 를 만족시키는 원소 $x \in G$ 를 모두 구하여라.

 (2) 군 $(G, *)$ 의 부분군을 모두 구하고, 이들 부분군에 대한 Hasse 다이어그램을 그려라.

 그리고, 등식 $x^2 = e$ 를 만족시키는 원소 $x \in G$ 를 모두 구하여라.

3. 덧셈군 A 의 부분집합 $B\ (\neq \varnothing)$ 에 대하여 다음 명제는 거짓이다.

 이 두 명제에 대한 반례를 덧셈군 $\mathbb{Z}$ 에서 들어라.

 (1) 임의의 $a, b \in B$ 에 대하여 $a + b \in B$ 이면, B 는 A 의 부분군이다.

 (2) 임의의 $a \in B$ 에 대하여 $-a \in B$ 이면, B 는 A 의 부분군이다.

4. 실수체 $\mathbb{R}$ 위의 2 차의 특수선형군

$$\mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) = \{ A \in \mathrm{Mat}_2(\mathbb{R}) \mid \det A = 1 \}$$

 는 무한군이고 또 Abel 군이 아님을 밝혀라.

5. 다음 집합은 일반선형군 $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ 의 부분군을 이룸을 밝혀라.

(1) $G_1 = \{ \begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \mid a \in \mathbb{R} \}$ (2) $G_2 = \{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{bmatrix} \mid a \in \mathbb{R} \}$

(3) $H = \{ \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix} \mid a \in \mathbb{R}^* \}$ (4) $K = \{ \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix} \mid a \in \mathbb{Q}^* \}$

6. 다음 집합이 일반선형군 $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ 의 부분군을 이룸을 확인하여라.

$$G = \{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \},$$

$$H = \{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \}$$

7. 다음 집합은 일반선형군 $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ 의 부분군을 이루는지를 판정하여라.

(1) $G = \{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R}) \mid ad - bc = -1 \}$

(2) $G = \{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R}) \mid a + c = b + d = 1 \}$

8. 구간 I 위에서 정의된 함수 $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ 전체로 이루어진 덧셈군 $F(I)$ 에서 연속함수 $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ 전체로 이루어진 집합 $C(I)$ 는 $F(I)$ 의 부분군을 이룸을 밝혀라.

9. 구간 I 위에서 정의된 연속함수 $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ 전체로 이루어진 덧셈군 $C(I)$ 에서, 임의의 원소 $c \in I$ 에 대하여

$$H_c = \{ f \in C(I) \mid f(c) = 1 \},$$
$$K_c = \{ f \in C(I) \mid f(c) = -1 \}$$

이라고 할 때, H_c 와 K_c 는 $C(I)$ 의 부분군이 아님을 밝혀라.

10. 덧셈군 $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ 와 양의 정수 n 에 대하여 다음 등식이 성립하는지를 판정하여라.

(1) $n\mathbb{Z} = \mathbb{Z}$ (2) $n\mathbb{Q} = \mathbb{Q}$ (3) $n\mathbb{R} = \mathbb{R}$

11. 군 G 에서 한 원소 $x \in G$ 에 대하여

$$G_x = \{ g \in G \mid gx = xg \}$$

이라고 할 때, G_x 는 G 의 부분군임을 밝혀라.

12. 문제 2.1.4 에서 논한 유클리드 변환군

$$\mathcal{A} = \{ T_{a,b} \mid a \in \mathbb{R}^*,\ b \in \mathbb{R} \}$$

에서

$$\mathcal{D} = \{ T_{a,0} \mid a \in \mathbb{R}^* \}, \qquad \mathcal{T} = \{ T_{1,b} \mid b \in \mathbb{R} \}$$

는 $\mathcal{A}$ 의 부분군이고 또 $\mathcal{A} = \mathcal{T} \circ \mathcal{D}$, $\mathcal{T} \cap \mathcal{D} = \{ T_{1,0} \}$ 임을 밝혀라.

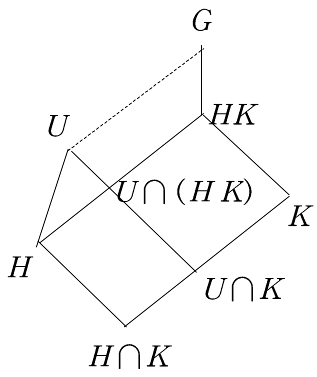
13. (Dedekind 의 보조정리) 군 G 의 두 부분군 H, K 에 대하여 $HK = KH$ 일 때, G 의 부분군 U 에 대하여 다음이 성립함을 증명하여라

(1) $H \subseteq U$ 일 때,

$$U \cap (HK) = H(U \cap K)$$

(2) $H \subseteq U \subseteq HK$ 일 때,

$$U = H(U \cap K)$$



14. 군 G 의 세 부분군 H_1, H_2, K 에 대하여

$$H_1 \subseteq H_2,\ \ H_1K = KH_1,\ \ H_1K = H_2K,\ \ H_1 \cap K = H_2 \cap K$$

일 때, $H_1 = H_2$ 임을 증명하여라.

보충문제 (2.3)

1. 다음 곱셈군은 순환군이 아님을 밝혀라.

(1) $\mathbb{Q}^* = \mathbb{Q} - \{0\}$ (2) $\mathbb{Q}^+ = \{ u \in \mathbb{Q} \mid u > 0 \}$.

2. 덧셈군 $\mathbb{R}$ 는 순환군이 아님을 밝혀라.
그리고, 덧셈군 $\mathbb{C}$ 는 순환군이 아님을 밝혀라.

3. 다음 곱셈군은 순환군이 아님을 밝혀라.

(1) $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} - \{0\}$ (2) $\mathbb{R}^+ = \{ x \in \mathbb{R} \mid x > 0 \}$.

(3) $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} - \{0\}$

4. 군 G 에서 원소 $a \in G$ 에 대하여 다음 명제가 참인지를 판정하여라.

(1) 素數 p 에 대하여 $a^p = e$ 이면, $a = e$ 이거나 또는 a 의 위수는 p 이다.

(2) 순환부분군 $\langle a \rangle$ 의 위수가 n 이면, a 의 위수는 n 이다.

5. 덧셈군 $\mathbb{Z}^2 = \{ (x, y) \mid x, y \in \mathbb{Z} \}$ 에서 양의 정수 m, n 에 대하여 다음과 같은 부분군이 순환부분군인지를 판정하여라.

(1) $B_1 = \{ (mk, 0) \mid k \in \mathbb{Z} \}$ (2) $B_2 = \{ (0, nk) \mid k \in \mathbb{Z} \}$

(3) $B_3 = \{ (2k, 3k) \mid k \in \mathbb{Z} \}$ (4) $B_4 = \{ (ms, nt) \mid s, t \in \mathbb{Z} \}$

6. 위수 36 인 순환군 $G = \langle a \rangle$ 에서 부분군 $\langle a^{32} \rangle$ 을 결정하여라.

7. 위수 40 인 순환군 $G = \langle a \rangle = \{ e, a, , \cdots, a^{39} \}$ 의 부분군을 모두 구하고, 이들 부분군 전체에 대한 Hasse 다이어그램을 그려라.
또, 다음 각 경우에 대하여 부분군 HK 와 부분군 $H \cap K$ 를 구하여라.

(1) $H = \langle a^2 \rangle,\ K = \langle a^5 \rangle$ (2) $H = \langle a^4 \rangle,\ K = \langle a^5 \rangle$

(3) $H = \langle a^4 \rangle,\ K = \langle a^{10} \rangle$ (4) $H = \langle a^8 \rangle,\ K = \langle a^5 \rangle$

8. 위수 42 인 순환군 $G = \langle a \rangle$ 에 대하여 다음 물음에 답하여라.

(1) G 의 부분군을 모두 구하고, 이들 부분군 전체에 대한 Hasse 다이어그램을 그려라.

(2) $G = \langle a \rangle$ 의 부분군

$$\langle a \rangle, \langle a^2 \rangle, \langle a^3 \rangle, \cdots, \langle a^{40} \rangle, \langle a^{41} \rangle$$

중에서 $\langle a^7 \rangle$ 과 동일한 부분군을 모두 구하여라.

(3) G 의 원소 중에서 위수 6 인 원소를 모두 구하여라.

9. $\xi = \cos \frac{\pi}{5} + i \sin \frac{\pi}{5}$ 이라고 할 때, 순환군 $G = \langle \xi \rangle$ 의 부분군을 모두 구하고 이들 부분군 전체에 대한 Hasse 다이어그램을 그려라.

그리고, 이 순한군의 생성원을 모두 구하여라.

10. 일반선형군 $GL_2(\mathbb{R})$ 에서 다음 원소에 의하여 생성된 순환부분군을 구하고, 또 그 특성을 말하여라.

(1) $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ (2) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ (3) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

11. 순환군 $G = \langle a \rangle$ 의 위수 p^n (p 는 素數) 일 때, 각 정수 i $(1 \le i \le n)$ 에 대하여 위수가 p^i 인 원소의 개수를 구하여라.

12. 군 G 가 위수 n 인 Abel 군이고 또 m 이 n 과 서로 소인 정수일 때, 각 원소 $a \in G$ 에 대하여 $b^m = a$ 인 원소 $b \in G$ 가 단 하나 존재함을 밝혀라.

13. 군 G 가 Abel 군일 때, 다음이 성립함을 증명하여라.

(1) G 의 원소 중에서 위수 2 인 원소 전체와 항등원 e 로 이루어진 집합을 H 이라고 하면, H 는 G 의 부분군을 이룬다.

(2) G 의 원소 중에서 위수 3 인 원소 전체와 항등원 e 로 이루어진 집합을 K 이라고 하면, K 는 G 의 부분군이다.

14. 다음 명제가 참인지를 판정하여라.

(1) 위수 4 인 유한군은 모두 순환군이다.

(2) 군 $G\ (\neq \{e\})$ 의 진부분군이 모두 순환군이면, G 는 순환군이다.

(3) 위수 5 인 순환군 $G = \{e, a, a^2, a^3, a^4\}$ 에서 양의 정수 i 에 대하여 $G = \langle a^i \rangle$ 이면 i 는 素數이다.

(4) 위수 10 인 순환군 $G = \{e, a, a^2, a^3, \cdots, a^9\}$ 에서 양의 정수 i 에 대하여 $G = \langle a^i \rangle$ 이면 i 는 素數이다.

(5) 임의의 素數 p 에 대하여 군

$$G = \langle a \rangle = \{e, a, \cdots, a^{p-1}\}$$

가 위수 p 인 순환군일 때, 항등원 e 를 제외한 G 의 원소는 모두 군 G 의 생성원이다.

15. 다음 명제가 참인지를 판정하여라.

(1) 군 G 에서 $H = \{x \in G \mid x^4 = e\}$ 이라고 하면, H 는 G 의 원소 중에서 위수 4 인 원소 전체와 항등원 e 로 이루어진 집합이다.

(2) 군 G 의 원소 중에서 위수 4 인 원소 전체와 항등원 e 로 이루어진 집합을 H 이라고 하면, H 는 G 의 부분군을 이룬다.

(3) 유한군 G 가 위수 n 인 순환군일 때, $n \geq 3$ 이면 G 에는 적어도 두 개의 생성원이 존재한다.

16. 위수 n 인 순환군 $G = \langle a \rangle$ 에서 n 이 6 의 배수일 때, G 의 원소 중에서 위수 6 인 원소 전체의 개수를 구하여라.

17. 덧셈군 $\mathbb{Z}_9 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ 의 부부군을 모두 구하고, 또 이들 부분군 전체에 대한 Hasse 다이어그램을 그려라.

18. 덧셈군 $\mathbb{Z}_{24} = \{0, 1, 2, \cdots, 23\}$ 의 부분군을 모두 구하고, 또 이들 부분군 전체에 대한 Hasse 다이어그램을 그려라.

19. 덧셈군 $\mathbb{Z}_{36} = \{0, 1, 2, \cdots, 35\}$ 에서 부분군 $\langle 28 \rangle$ 을 결정하여라.

20. 덧셈군 $\mathbb{Z}_{18} = \{0, 1, 2, \cdots, 17\}$ 에 대하여 다음 물음에 답하여라.

(1) 덧셈군 $\mathbb{Z}_{18}$ 의 부부군을 모두 구하고, 또 이들 부분군 전체에 대한 Hasse 다이어그램을 그려라.

(2) $B = \langle 2 \rangle$, $C = \langle 9 \rangle$ 일 때, $B + C$ 와 $B \cap C$ 를 구하여라.

(3) $B = \langle 6 \rangle$, $C = \langle 9 \rangle$ 일 때, $B + C$ 와 $B \cap C$ 를 구하여라.

(4) $\mathbb{Z}_{18}$ 의 생성원을 모두 구하여라.

21. 곱셈군 $\mathbb{Z}_9{}^* = \{1, 2, 4, 5, 7, 8\}$ 에 대하여 다음 물음에 답하여라.

(1) 곱셈군 $\mathbb{Z}_9{}^*$ 는 위수 6 인 순환군임을 밝히고, 순환군 $\mathbb{Z}_9{}^*$ 의 생성원을 모두 구하여라.

(2) 곱셈군 $\mathbb{Z}_9{}^*$ 의 부부군을 모두 구하고, 이들 부분군 전체에 대한 Hasse 다이어그램을 그려라.

22. 곱셈군 $\mathbb{Z}_{18}{}^* = \{1, 5, 7, 11, 13, 17\}$ 에 대하여 다음 물음에 답하여라.

(1) 곱셈군 $\mathbb{Z}_{18}{}^*$ 는 위수 6 인 순환군임을 밝히고, 순환군 $\mathbb{Z}_{18}{}^*$ 의 생성원을 모두 구하여라.

(2) 곱셈군 $\mathbb{Z}_{18}{}^*$ 의 부부군을 모두 구하고, 또 이들 부분군 전체에 대한 Hasse 다이어그램을 그려라.

23. 곱셈군 $\mathbb{Z}_{12}{}^* = \{1, 5, 7, 11\}$ 에 대하여 다음 물음에 답하여라.

(1) 곱셈군 $\mathbb{Z}_{12}{}^*$ 는 순환군이 아님을 밝혀라.

(2) 곱셈군 $\mathbb{Z}_{12}{}^*$ 의 부부군을 모두 구하고, 또 이들 부분군 전체에 대한 Hasse 다이어그램을 그려라.

보충문제 (2.4)

1. 대칭군 S_4 에서 두 치환

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

에 대하여 σ^2, σ^3, σ^4, σ^{-1}, $\sigma \circ \tau$, $\sigma^2 \circ \tau$, $\sigma^3 \circ \tau$, $\tau \circ \sigma$ 를 구하여라.

2. 대칭군 S_n 에서 서로 다른 문자 i, j, k 에 대하여 다음이 성립함을 확인하여라.

(1) $(i\ \ k) \circ (i\ \ j) = (i\ \ j\ \ k)$, $(i\ \ j) \circ (i\ \ k) = (i\ \ k\ \ j)$

(2) $(1\ \ 2) \circ (1\ \ 2\ \ k) \circ (1\ \ 2)^{-1} = (2\ \ 1\ \ k) = (1\ \ k\ \ 2)$

(3) $(1\ \ i) \circ (1\ \ j\ \ k) \circ (1\ \ i)^{-1} = (i\ \ j\ \ k)$

3. 다음 치환의 위수를 구하여라.

(1) $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 6 & 4 & 1 & 5 & 7 & 2 \end{pmatrix}$ (2) $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 4 & 1 & 5 & 2 & 7 & 6 \end{pmatrix}$

4. 치환군 S_8 에서 다음을 구하여라.

(1) $(2\ 3\ 4\ 6\ 7\ 8)^{12}$ (2) $((2\ 3\ 4) \circ (1\ 2\ 3\ 5\ 8))^{15}$

(3) $(1\ 3) \circ (1\ 2\ 3) \circ (1\ 3)^{-1}$ (4) $(2\ 3) \circ (1\ 2\ 3\ 4) \circ (2\ 3)^{-1}$

5. 치환군 S_7 에서 두 치환

$$\sigma = (1\ 2) \circ (3\ 4\ 5\ 6), \quad \tau = (3\ \ 4) \circ (5\ \ 6\ \ 7)$$

에 대하여 치환 σ^{22}, τ^{63} 을 구하여라.

6. 치환군 S_6 에서 두 치환 $\sigma = (1\ \ 2\ \ 3\ \ 4\ \ 5\ \ 6)$, $\tau = (1\ \ 2\ \ 3) \circ (4\ \ 5\ \ 6)$ 에 대하여 다음 물음에 답하여라.

(1) 순환부분군 $\langle \sigma \rangle$ 의 모든 원소를 결정하여라.

(2) 순환부분군 $\langle \sigma^2 \rangle$ 와 $\langle \sigma^3 \rangle$ 의 모든 원소를 결정하여라.

(3) 순환부분군 $\langle \tau \rangle$ 의 모든 원소를 결정하여라.

7. 대칭군 S_4 에서 다음 치환을 호환 $(1\ 2), (1\ 3), (1\ 4)$ 의 곱으로 나타내어라.

(1) $(2\ 4\ 3)$ (2) $(1\ 2) \circ (3\ 4)$ (3) $(2\ 4\ 1\ 3)$

8. 대칭군 S_5 에서 다음 치환을 호환 $(1\ 2), (1\ 3), (1\ 4), (1\ 5)$ 의 곱으로 나타내어라.

(1) $(1\ 5\ 3\ 4)$ (2) $(2\ 5) \circ (3\ 4)$ (3) $(2\ 4\ 1\ 3\ 5)$

9. 대칭군 S_5 에서 다음 치환을 호환 $(1\ 2), (2\ 3), (3\ 4), (4\ 5)$ 의 곱으로 나타내어라.

(1) $(1\ 4\ 3)$ (2) $(2\ 4) \circ (3\ 5)$ (3) $(2\ 3\ 1\ 5)$

10. 대칭군 S_6 에서 다음 치환을 호환 $(1\ 2), (2\ 3), (3\ 4), (4\ 5), (5\ 6)$ 의 곱으로 나타내어라.

(1) $(3\ 5\ 6)$ (2) $(3\ 4) \circ (5\ 6)$ (3) $(5\ 6\ 1\ 2\ 4)$

11. 대칭군 S_n 에서 다음이 성립하는지를 확인하여라.

(1) $r \geq 2$ 일 때, $(i_1\ i_2\ i_3\ \cdots\ i_r) = (i_1\ i_r) \circ \cdots \circ (i_1\ i_3) \circ (i_1\ i_2)$

(2) $i \neq j,\ i \neq 1,\ j \neq 1$ 일 때, $(i\ j) = (1\ i) \circ (1\ j) \circ (1\ i)$ 이다.

(3) $i \geq 3$ 일 때,

$$(1\ i) = (1\ 2) \circ (2\ 3) \circ \cdots \circ (i-1\ i) \circ (i-2\ i-1) \circ \cdots \circ (2\ 3) \circ (1\ 2)$$

(4) $\tau \circ (i_1\ i_2\ \cdots\ i_r) \circ \tau^{-1} = (\tau(i_1)\ \tau(i_2)\ \cdots\ \tau(i_r))$

12. 군 G 에 대한 다음 명제 중에서 참인 명제를 찾아라.

(1) G 의 원소 중에서 위수 2 인 원소 전체와 항등원으로 이루어진 집합은 G 의 부분군이다.

(2) G 에서 $H = \{x \in G \mid x^2 = e\}$ 는 G 의 부분군이다.

(3) G 가 Abel 군일 때, $H = \{x \in G \mid x^2 = e\}$ 는 G 의 부분군이다.

보충문제 (2.5)

1. 위수 6인 순환군 $G = \langle a \rangle = \{e, a, a^2, a^3, a^4, a^5\}$ 에서 다음 부분군의 잉여류 전체를 결정하여라.

   (1) $H = \langle a^2 \rangle$ (2) $K = \langle a^3 \rangle$

2. 덧셈군 $\mathbb{Z}$ 에서 다음 부부군의 잉여류 전체를 결정하여라.

   (1) $3\mathbb{Z}$ (2) $4\mathbb{Z}$

3. 서로 다른 두 素數 p, q 에 대하여 유한군 G 의 위수가 pq 일 때, G 를 제외한 G 의 부분군은 모두 순환부분군임을 밝혀라.

4. 서로 다른 두 素數 p, q 에 대하여 Abel 군 G 의 위수가 pq 일 때, 군 G 는 순환군임을 밝혀라.

5. 유한군 G 의 위수가 짝수일 때, G 에는 위수 2인 원소가 적어도 하나 존재한다. 특히, n 이 홀수일 때, 위수 $2n$ 인 Abel 군 G 에는 위수 2인 원소가 단 하나 존재함을 밝혀라.

6. 군 G 에서 H, K 가 유한 지수를 가진 부분군일 때, 정리 2.5.9 를 이용하여 다음이 성립함을 증명하여라.

   (1) $H \cap K$ 는 유한 지수를 가지며, 다음이 성립한다.

   $$|G : H \cap K| \leq |G : H||G : K|$$

   (2) $G = HK \Longleftrightarrow |G : H \cap K| = |G : H||G : K|$

7. 유한군 G 의 부분군 $H_1, H_2, \cdots, H_n$ 에 대하여

   $$|G : H_1 \cap H_2 \cap \cdots \cap H_n| \leq |G : H_1||G : H_2| \cdots |G : H_n|$$

   임을 증명하여라.

8. 유한군 G 의 두 부분군 H, K 에 대하여 $|G : H|$ 와 $|G : K|$ 가 서로 소이면, $G = HK$ 임을 증명하여라.

9. 다음 명제 중에서 참인 명제를 찾아라.

(1) 군 G의 진부분군이 모두 Abel 군이면, G도 Abel 군이다.

(2) 유한군 G에 위수 n인 원소가 존재하면, n은 $|G|$의 약수이다.

(3) 군 G에서 모든 원소 $x \in G$에 대하여 $x^4 = e$이면, G는 Abel군 이다.

보충문제 (2.6)

1. 덧셈군 $\mathbb{Z}$과 덧셈군 $\mathbb{R}$에 대하여 다음과 같이 정의된 사상이 준동형사상인지를 판정하여라.

   (1) $f: \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(n) = n$ (2) $f: \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(n) = 3^n$

   (3) $f: \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$, $f(x) = 2x$ (4) $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{Z}$, $f(x) = [x]$

2. 덧셈군 $\mathbb{R}$와 곱셈군 $\mathbb{R}^*$, $\mathbb{R}^+$ 에 대하여 다음과 같이 정의된 사상 이 준동형사상인지를 판정하여라.

   (1) $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^*$, $f(x) = 3^x$ (2) $f: \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R}^*$, $f(x) = 3x$

   (3) $f: \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R}^*$, $f(x) = x^4$ (4) $f: \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \log_e x$

3. 덧셈군 $\mathbb{Z}$ 에서 곱셈군 G 로의 준동형사상을 모두 결정하여라.

4. 덧셈군 $\mathbb{Z}$ 에서 덧셈군 A 로의 준동형사상을 모두 결정하여라.

5. 준동형사상 $f: \mathbb{Z} \rightarrow S_6$ 에 대하여 $f(1) = (1\ 3) \circ (2\ 4\ 6)$ 일 때, 다음 물음에 답하여라.

   (1) $f(9)$ 를 구하여라.

   (2) $f(i) = 1$ 인 정수 i 를 구하여라.

6. 두 곱셈군 $\mathbb{R}^*$, $U = \{\alpha \in \mathbb{C}^* \mid |\alpha| = 1\}$ 에 대하여 다음이 성립함을 증명하여라.

   (1) 사상 $f: U \longrightarrow \mathbb{R}$ 가 곱셈군 U에서 덧셈군 $\mathbb{R}$ 로의 준동형사상이면, f 는 일대일 사상이 아니다.

   (2) 곱셈군 U와 덧셈군 $\mathbb{R}$ 과 동형이 아니다.

   (3) 사상 $f: U \longrightarrow \mathbb{R}^*$ 가 곱셈군 U에서 곱셈군 $\mathbb{R}^*$ 로의 군 준동형사상이면, f 는 일대일 사상이 아니다.

   (4), 곱셈군 U와 곱셈군 $\mathbb{R}^*$ 와 동형이 아니다.

7. 곱셈군 $\mathbb{R}^*$, $U = \{\alpha \in \mathbb{C}^* \,\big|\, |\alpha| = 1\}$ 에 대하여 다음이 성립함을 밝혀라.

(1) 곱셈군 $\mathbb{R}^*$ 는 덧셈군 $\mathbb{Z}$ 와 동형이 아니고, 따라서 $\mathbb{R}^*$ 는 순환군이 아니다.

(2) 곱셈군 U 는 덧셈군 $\mathbb{Z}$ 와 동형이 아니고, 따라서 U 는 순환군이 아니다.

8. 위수가 각각 m, n 인 순환군

$$G = \langle a \rangle = \{e, a, \cdots, a^{m-1}\}, \quad H = \langle b \rangle = \{e', b, \cdots, b^{n-1}\}$$

에 대하여 G 에서 H 로의 군 준형사상을 결정하여라.

9. 두 집합

$$G = \{ \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \},$$

$$G^* = \{ \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R},\ a^2 + b^2 \neq 0 \}$$

에 대하여 다음이 성립함을 증명하여라.

(1) G 는 덧셈군 $\mathrm{Mat}_2(\mathbb{R})$ 의 부분군을 이루고, G 는 덧셈군 $\mathbb{C}$ 와 동형이다.

(2) G^* 는 곱셈군 $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ 의 부분군을 이루고, $G^* \cong \mathbb{C}^*$ 이다.

10. 집합 $G\ (\neq \emptyset)$ 가 연산 $\circ$ 에 관하여 군을 이룰 때, G 위에 연산 $*$ 를

$$a * b = b \circ a$$

으로 정의할 때, 다음이 성립함을 밝혀라.

(1) G 는 연산 $*$ 에 관하여 군을 이룬다.

(2) 군 $(G, *)$ 와 군 $(G, \circ)$ 는 서로 동형이다.

11. 군 G 의 한 원소 $a \in G$ 에 의하여 정의된 사상

$$\phi_a : G \to G, \ \phi_a(x) = ax$$

가 일대일 대응임을 밝혀라.

그리고, ϕ_a 가 준동형사상이기 위한 필요충분조건을 말하여라.

12. 군 G의 한 원소 $a \in G$에 의하여 정의된 사상

$$\psi_a : G \longrightarrow G, \ \psi_a(x) = xa$$

가 일대일 대응임을 밝혀라. 그리고, ψ_a가 준동형사상이기 위한 필요충분조건을 말하여라.

13. 군 G가 Abel 군이면, 사상

$$f : G \longrightarrow G, \ f(x) = x^{-1}$$

는 동형사상임을 밝혀라.

14. 군 G에서 사상

$$f : G \longrightarrow G, \ f(x) = x^{-1}$$

가 준동형사상이면, G는 Abel 군이고 또 f는 동형사상임을 밝혀라.

15. 순환군 $G = \langle a \rangle$ 의 위수가 n일 때, 군 H의 한 원소 b에 대하여 사상

$$\phi_b : G \longrightarrow H, \ \phi_b(a^i) = b^i$$

가 준동형사상이기 위한 필요충분조건을 구하여라.

16, 군 준동형사상 $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}_9$ 에 대하여 $f(1) = 4$ 일 때, $f(6)$ 을 구하여라.

17. 군 준동형사상 $f : \mathbb{Z}_{10} \rightarrow \mathbb{Z}_9$ 에 대하여 $f(1) = 4$ 일 때, $f(6)$ 을 구하여라.

18. 군 준동형사상 $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}_9{}^*$ 에 대하여 $f(1) = 4$ 일 때, $f(6)$ 을 구하여라.

19. 덧셈군 $\mathbb{Z}_6 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ 에서 $\mathbb{Z}_6$ 으로의 준동형사상을 모두 결정하고, 또 동형사상을 모두 결정하여라.

20 군 준동형사상 $f : \mathbb{Z}_{20} \longrightarrow S_6$ 에 대하여 $f(1) = (1\ 2) \circ (1\ 4\ 5\ 6)$ 일 때, 다음 물음에 답하여라.

(1) $f(15)$ 를 구하여라.

(2) $\{ i \in \mathbb{Z} \mid f(i) = 1 \}$ 를 구하여라.

21. 다음 명제 중에서 참인 명제와 거짓인 명제를 찾아라.

(1) 두 유한군 G, H가 서로 동형이면, $|G| = |H|$ 이다.

(2) 덧셈군 $\mathbb{Q}$와 덧셈군 $\mathbb{Z}$는 동형이다.

22. 곱셈군 ${\mathbb{Z}_{18}}^*$ 와 곱셈군 ${\mathbb{Z}_9}^*$는 서로 동형임을 밝혀라.

23. 곱셈군 ${\mathbb{Z}_{30}}^*$ 와 곱셈군 ${\mathbb{Z}_{15}}^*$는 서로 동형임을 밝혀라.

24. 곱셈군 $\mathbb{R}^*$ 와 곱셈군 $\mathbb{C}^*$ 에 대하여 다음이 성립함을 밝혀라.

(1) 군 동형사상 $f: \mathbb{R}^* \to \mathbb{C}^*$ 는 존재하지 않고 따라서 곱셈군 $\mathbb{R}^*$ 와 곱셈군 $\mathbb{C}^*$ 는 동형이 아니다.

(2) 군 동형사상 $f: \mathbb{C}^* \to \mathbb{R}^*$ 는 존재하지 않고 따라서 곱셈군 $\mathbb{R}^*$ 와 곱셈군 $\mathbb{C}^*$ 는 동형이 아니다.

보충문제 (2.7)

1. 위수 20 인 순환군 $G = \{e, a, \cdots, a^{19}\}$ 의 부분군 $H = \langle a^{16} \rangle$ 과 잉여군 G/H 를 결정하여라.

2. 덧셈군 $\mathbb{Z}_{36} = \{0, 1, 2, \cdots, 35\}$ 의 부분군 $H = \langle 20 \rangle$ 과 잉여군 $\mathbb{Z}_{36}/H$ 를 결정하여라.

3. 덧셈군 $\mathbb{Z}_8 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ 의 부분군을 모두 구하고, 또 이들 부분군에 의한 잉여군을 결정하여라.

4. 덧셈군 $\mathbb{Z}_{12} = \{0, 1, 2, \cdots, 11\}$ 의 부분군을 모두 구하고, 이들 부분군에 의한 잉여군을 결정하여라.

5. 실수체 $\mathbb{R}$ 위의 2 차의 특수선형군

$$\mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) = \{A \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R}) \mid \det A = 1\}$$

에 대하여 다음 물음에 답하여라(보기 2.2.3 참조).

(1) $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ 의 중심은 $\{I_2, -I_2\}$ 이다. 즉, $Z(\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})) = \{I_2, -I_2\}$

(2) 다음 두 집합은 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ 의 부분군이지만 정규부분군은 아니다.

$$H = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \mid a \in \mathbb{R} \right\}, \quad K = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{bmatrix} \mid a \in \mathbb{R} \right\}$$

6. 군 G 에서 $N \lhd G$ 일 때, G 의 부분군 H 에 대하여 $(H \cap N) \lhd H$ 임을 밝혀라.

7. Abel 군이 아닌 유한군 G 의 위수가 서로 다른 두 素數 p, q 의 곱일 때, 즉 $|G| = pq$ 일 때, $Z(G) = \{e\}$ 임을 증명하여라.

8. 군 G 의 부분군 H 에 대하여 $N_G(H) = \{g \in G \mid gHg^{-1} = H\}$ 이라고 할 때, $|G : H|$ 가 素數이면 $N_G(H) = H$ 또는 $H \lhd G$ 임을 밝혀라.

9. 대칭군 S_3 에서 다음 부분군의 정규화부분군을 구하여라.

$$N = \{1, (1\ 2\ 3), (1\ 3\ 2)\},$$
$$H_1 = \{1, (2\ \ 3)\}, \quad H_2 = \{1, (1\ \ 3)\}, \quad H_3 = \{1, (1\ 2)\}$$

10. 군 G에 대한 다음 명제 중에서 참은 명제를 찾아라.

(1) G가 유한군이면, G의 부분군은 모두 유한군이다.

(2) G가 유한군이면, G의 정규부분군과 잉여군은 모두 유한군이다.

(3) G의 한 정규부분군 N에 대하여 N과 G/N이 모두 유한군이면, G는 유한군이다.

(4) G가 무한군이면, G의 부분군과 잉여군은 모두 무한군이다.

(5) G의 한 부분군이 무한군이면, G는 무한군이다.

(6) G의 한 잉여군이 무한군이면, G는 무한군이다.

(7) G가 Abel 군이면, G의 부분군과 잉여군은 모두 Abel 군이다.

(8) G의 한 정규부분군 N과 잉여군 G/N이 모두 Abel 군이면, G는 Abel 군이다.

(9) G가 순환군이면, G의 부분군과 잉여군은 모두 순환군이다.

(10) G의 한 정규부분군 N에 대하여 N과 G/N이 모두 순환군이면, G는 순환군이다.

11. 군 G의 모든 원소가 유한 위수를 가질 때, G를 **비틀린 군**(torsion group) 이라고 한다. 군 G에 대하여 다음이 성립함을 증명하여라.

(1) G가 유한군이면, G는 torsion 군이다.

(2) G가 torsion 군이면, G의 부분군과 잉여군은 모두 torsion 군이다.

(3) G의 한 정규부분군 N과 잉여군 G/N이 모두 torsion 군이면, G는 torsion 군이다.

12. 군 G가 Abel 군일 때, G의 원소 중에서 유한 위수를 가진 원소의 전체의 집합을 $\mathrm{tor}(G)$ 라고 할 때, 다음이 성립함을 증명하여라.

(1) $\mathrm{tor}(G)$ 는 G의 부분군이다.

(2) 잉여군 $G/\mathrm{tor}(G)$ 에서 유한 위수를 가진 원소는 항등원뿐이다.

부분군 $\mathrm{tor}(G)$ 를 G의 **비틀린 부분군**(torsion subgroup)이라고 한다.

13. 곱셈군 $\mathbb{C}^*$ 에서 유한 위수를 가진 원소 전체의 집합을 구하여라.
그리고, 곱셈군 $\mathbb{R}^*$ 에서 유한 위수를 가진 원소 전체의 집합을 구하여라.

14. 덧셈군 $\mathbb{R}$ 의 부분군 $\mathbb{Z}$ 에 의한 잉여군 $\mathbb{R}/\mathbb{Z} = \{x+\mathbb{Z} \mid x \in \mathbb{R}\}$ 에 대하여 다음이 성립함을 증명하여라.

(1) 임의의 원소 $\xi \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ 는 다음과 같은 꼴로 나타내어진다.

$$\xi = a + \mathbb{Z}, \qquad 0 \le a < 1$$

즉, $\mathbb{R}/\mathbb{Z} = \{a+\mathbb{Z} \mid 0 \le a < 1\}$ 이다.

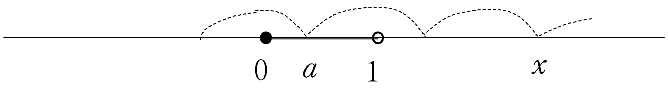
(2) 덧셈군 $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ 에서 유한 위수를 가진 원소 전체로 이루어진 부분군은 $\mathbb{Q}/\mathbb{Z} = \{u+\mathbb{Z} \mid u \in \mathbb{Q}\}$ 이다.

(3) 양의 정수 n 에 대하여 위수 n 인 원소 $\xi \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ 는 순환부분군

$$\left\langle \frac{1}{n} + \mathbb{Z} \right\rangle = \left\{0+\mathbb{Z}, \ \frac{1}{n}+\mathbb{Z}, \ \cdots, \ \frac{n-1}{n}+\mathbb{Z}\right\}$$

에 속한다.

(4) 덧셈군 $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ 의 부분군 중에서 위수 n 인 순환부분군은 $\left\langle \frac{1}{n} + \mathbb{Z} \right\rangle$ 뿐이고, 또 위수 n 인 원소의 개수는 $\varphi(n)$ 이다.



15. 덧셈군 $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ 와 $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ 에서 위수 4 인 부분군과 위수 4 인 원소를 구하여라.

보충문제 (2.8)

1. 문제 2.1.4에서 논한 유클리드 변환군

$$\mathcal{A} = \{ T_{a,b} \mid a \in \mathbb{R}^*, b \in \mathbb{R} \}$$

에서

$$\mathcal{D} = \{ T_{a,0} \mid a \in \mathbb{R}^* \}, \quad \mathcal{T} = \{ T_{1,b} \mid b \in \mathbb{R} \}$$

는 $\mathcal{A}$의 부분군이다. 이들 군에 대하여 다음이 성립함을 밝혀라.

(1) $\mathcal{A}/\mathcal{T} \cong \mathbb{R}^*$ (2) $\mathcal{D} \cong \mathbb{R}^*$ (3) $\mathcal{T} \cong \mathbb{R}$

2. 군 G가 Abel 군일 때, 양의 정수 n에 대하여 사상

$$f: G \longrightarrow G, \ f(x) = x^n$$

가 준동형사상임을 밝혀라. 그리고, 이 사실을 이용하여

$$G_n = \{x \in G \mid x^n = e\}, \quad G^{(n)} = \{x^n \mid x \in G\}$$

이라고 할 때, $G_n \lhd G$, $G/G_n \cong G^{(n)}$ 임을 밝혀라.

3. 두 곱셈군

$$\mathbb{R}^* = \mathbb{R} - \{0\}, \quad \mathbb{R}^+ = \{ x \in \mathbb{R}^* \mid x > 0 \}$$

과 양의 정수 n에 대하여 다음 두 사상은 준동형사상이다.

$$f : \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R}^*, \ f(x) = x^n$$
$$g : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+, \ g(x) = x^n$$

이 들 두 준동형사상에 대하여 다음이 성립함을 밝혀라.

(1) n이 짝수일 때, $\ker f = \{1, -1\}$, $\operatorname{im} f = \mathbb{R}^+$ 이다.

(2) n이 홀수일 때, f는 동형사상이다.

(3) 모든 양의 정수 n에 대하여 g는 동형사상이다.

4. 덧셈군 $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ 와 양의 정수 n에 대하여 다음과 같이 정의된 사상 f가 동형사상임을 밝혀라.

(1) $f : \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q}, \ f(x) = nx$ (2) $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \ f(x) = nx$

5. 덧셈군 A 에서 양의 정수 n 에 대하여 사상

$$f : A \longrightarrow A, \ f(x) = nx$$

가 준동형사상임을 밝혀라. 그리고, 이 사실을 이용하여

$$A_n = \{x \in A \mid nx = 0\}, \quad nA = \{nx \mid x \in A\}$$

이라고 할 때, $A_n \lhd A$, $A/A_n \cong nA$ 임을 밝혀라.

6. 두 군 G, H 에 대하여 사상 $f : G \longrightarrow H$ 가 군 준동형사상일 때, 다음이 성립함을 증명하여라.

(1) G 가 유한군이면, $f(G)$ 는 유한군이고 $|f(G)|$ 는 $|G|$ 의 약수이다.

(2) H 가 유한군이면, $f(G)$ 는 유한군이고 $|f(G)|$ 는 $|H|$ 의 약수이다.

(3) $\ker f$ 와 $f(G)$ 가 모두 유한군이면, G 는 유한군이다.

7. 사상 $f : G \longrightarrow \overline{G}$ 가 군 준동사상일 때, 다음 중에서 참인 명제를 찾아라.

(1) 군 $\overline{G}$ 가 유한군이면, $\ker f$ 와 $\operatorname{im} f$ 는 모두 유한군이다.

(2) 군 $G, \overline{G}$ 가 유한군이면, $\ker f$ 와 $\operatorname{im} f$ 는 모두 유한군이다.

(3) 잉여군 $G/\ker f$ 가 Abel 군이면, $\operatorname{im} f$ 는 Abel 군이다.

(4) 잉여군 $G/\ker f$ 가 순환군이면, $\operatorname{im} f$ 는 순환군이다.

(5) 상 $\operatorname{im} f$ 가 Abel 군이면, G 는 Abel 군이다.

(6) 상 $\operatorname{im} f$ 가 순환군이면, G 는 순환군이다.

8. 두 유한군 $G, \overline{G}$ 의 위수가 각각 m, n 일 때, 준동형사상 $f : G \longrightarrow \overline{G}$ 에 대하여 $|\ker f| \,\big|\, m$, $|\operatorname{im} f| \,\big|\, (m, n)$ 임을 밝혀라.

9. 위의 보충문제 8 의 결과를 이용하여 두 순환군 $G = \langle a \rangle$, $\overline{G} = \langle b \rangle$ 의 위수가 각각 $15, 6$ 일 때, G 에서 $\overline{G}$ 로의 준동형사상 전체를 결정하여라.

10. 두 군 $G, \overline{G}$ 에서 $N \lhd G$, $\overline{N} \lhd \overline{G}$ 일 때, 준동형사상 $f : G \longrightarrow \overline{G}$ 에 대하여 $f(N) = \{f(x) \mid x \in N\} \subseteq \overline{N}$ 이면 사상

$$\phi : G/N \longrightarrow \overline{G}/\overline{N}, \ \phi(xN) = f(x)\overline{N}$$

은 군 준동형사상임을 밝혀라.

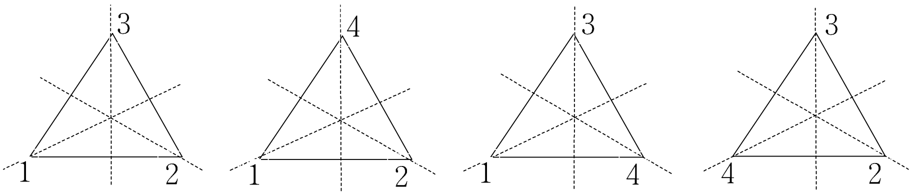
보충문제 (2.9)

1. 대칭군 S_4 에서 다음 네 부분군은 대칭군 S_3 와 동형인 부분군이다.

$$K_1 = \langle (1\ 2\ 3),\ (2\ 3) \rangle, \qquad K_2 = (3\ 4) \circ K_1 \circ (3\ 4)^{-1},$$

$$K_3 = (2\ 4) \circ K_1 \circ (2\ 4)^{-1}, \quad K_4 = (1\ 4) \circ K_1 \circ (1\ 4)^{-1}$$

부분군 $K_1,\ K_2,\ K_3,\ K_4$ 와 $K_1 \cap K_2,\ K_1 \cap K_3,\ K_1 \cap K_4$ 를 결정하여라.



2. 대칭군 S_5 에서 다음 부분군은 정이면체군 D_5 와 동형인 부분군이다.

$$K_1 = \langle (1\ 2\ 3\ 4\ 5),\ (2\ 5) \circ (3\ 4) \rangle,$$

$$K_2 = (1\ 2\ 3) \circ K_1 \circ (1\ 2\ 3)^{-1}, \quad K_3 = (1\ 3\ 2) \circ K_1 \circ (1\ 3\ 2)^{-1},$$

$$K_4 = (2\ 3) \circ K_1 \circ (2\ 3)^{-1}, \qquad K_5 = (1\ 3) \circ K_1 \circ (1\ 3)^{-1},$$

$$K_6 = (1\ 2) \circ K_1 \circ (1\ 2)^{-1}$$

여기서 $K_1 \cap K_2,\ K_1 \cap K_3$ 를 결정하여라.

3. 실수체 $\mathbb{R}$ 위의 일반선형군 $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$에서 두 정칙행렬

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

에 의하여 생선된 부분군 $\langle A, B \rangle$ 는 정이면체군 D_4 와 동형임을 밝혀라.

4. Abel 군이 아닌 군 G 가 두 원소 a, b 에 의하여 생성되고, 이들 두 원소 사이에 관계식 $a^2 = e,\ b^2 = e,\ a \neq e,\ b \neq e$ 이 성립한다고 하자.

이 때, $N = \langle a\, b \rangle$ 이라고 할 때, $N \lhd G,\ \ |G : N| = 2$ 을 증명하고 또 $|N| = n \geq 3$ 인 경우에 $G \cong D_n$ 임을 증명하여라.

5. 군 Q가 세 원소 a, b, c에 의하여 생성되고, 이들 원소 사이에 다음과 같은 관계식이 성립한다고 하자.

$$a^4 = e, \quad a^i \neq e \ (i = 1, 2, 3),$$
$$a^2 = b^2 = c^2, \ ab = c, \ bc = a, \ ca = b$$

이 때, 군 Q는 사원수군 $Q_8 = \{1, -1, i, -i, j, -j, k-k\}$과 동형임을 밝혀라.

6. 군 Q가 두 원소 a, b에 의하여 생성되고, 이들 두 원소 사이에 다음과 같은 관계식이 성립한다고 하자.

$$a^4 = e, \ a^i \neq e \ (i = 1, 2, 3),$$
$$a^2 = b^2, \ bab^{-1} = a^{-1}$$

이 때, 다음 물음에 답하여라.

(1) Q는 위수 8인 군임을 밝혀라.

(2) Q의 부분군을 모두 구하고 이들 부분군은 모두 정규부분군임을 밝혀라. 그리고, 이들 부분군 전체에 대한 Hasse 다이어그램을 그려라.

(3) Q는 사원수군 $Q_8 = \{1, -1, i, -i, j, -j, k-k\}$과 동형임을 밝혀라.

7. 군 G가 두 원소 a, b에 의하여 생성되고, 이들 두 원소 사이에 다음과 같은 관계식이 성립한다고 하자. 여기서, n은 $n \geq 3$인 정수이다.

$$a^{2^{n-1}} = e, \quad a^i \neq e \ (1 < i < 2^{n-1}),$$
$$a^{2^{n-1}} = b^2, \ bab^{-1} = a^{-1}$$

이 때, G의 위수는 2^n임을 밝히고, G는 위수 2^n인 정이면체군 $D_{2^{n-1}}$과 동형이 아님을 밝혀라.

군 G를 위수 2^{n+1}인 **일반 사원수군**(generalized quaternion group)이라고 하며 사원수군 Q_8은 $n = 3$인 경우이다.

8. 군 G에서 두 원소 a, b에 대하여 등식

$$aba^{-1} = b^{-1}, \ bab^{-1} = a^{-1}$$

가 성립할 때 $a^4 = b^4 = e$임을 증명하여라.

보충문제 (2.10)

1. 군 $A_3 \times A_4$ 에 대하여 다음 물음에 답하여라.

   (1) 군 $A_3 \times A_4$ 는 Abel 군인지 또는 순환군인지를 판정하여라.

   (2) 군 $A_3 \times A_4$ 의 원소 $((1\ 2\ 3), (1\ 2\ 3\ 4))$ 의 위수를 구하여라.

   (3) 군 $A_3 \times A_4$ 의 원소 $((1\ 2\ 3), (1\ 2\ 3))$ 의 위수를 구하여라.

2. 두 군 G_1, G_2 의 직적 $G = G_1 \times G_2$ 에 대하여 다음이 성립함을 밝혀라.

   (1) $Z(G) = Z(G_1) \times Z(G_2)$

   (2) $G/Z(G) \cong G_1/Z(G_1) \times G_2/Z(G_2)$

3. 덧셈군 $\mathbb{Z}_{18} \oplus \mathbb{Z}_{26}$ 에서 원소 $(12, 10)$ 의 위수를 구하여라.

4. 덧셈군 $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_5$ 의 부분군을 모두 구하여라.

5 다음 중에서 참인 것을 찾아라.

   (1) $\mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_5 \cong \mathbb{Z}_{20}$ (2) $\mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_6 \cong \mathbb{Z}_{24}$ (3) $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_5 \cong \mathbb{Z}_{30}$

6. 덧셈군 $\mathbb{Z}_{60} = \{0, 1, 2, \cdots, 59\}$ 을 두 부분군의 직합으로 나타내어라.

7. 덧셈군 $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ 의 부분군

$$B = \{(3a, 2b) \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$$

   에 대하여 $(\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z})/B \cong \mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_2$ 을 밝혀라.

8. 준동형사상 $f: \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$ 에 대하여

$$f(1,0) = 5, \quad f(0,1) = -2$$

   일 때, 임의의 원소 $(m, n) \in \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ 에 대하여 $f(m, n)$ 을 구하여라.

9. 덧셈군 $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ 에서 덧셈군 $\mathbb{Z}$ 으로의 사상

$$f: \ \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}, \ f(m,n) = 3m + 2n$$

는 준동형사상이고 또 $\operatorname{im} f = \mathbb{Z}$ 임을 밝혀라.

10. 군 G 의 두 원소 $a, b \in G$ 에 대하여 $ab = ba$ 일 때 그리고 이때에만

$$f: \ \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \longrightarrow G, \ f(m, n) = a^m b^n$$

는 준동형사상임을 밝혀라.

11. 곱셈군 G 가 Abel 군인 경우에 덧셈군 $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ 에서 G 로의 준동형사상을 결정하여라.

12. 덧셈군 $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ 에서 덧셈군 A 로의 준동형사상을 결정하여라.

13. 덧셈군 $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} = \{(x, y, z) \mid x, y, z \in \mathbb{Z}\}$ 에서 부분군

$$B = \langle (1,1,1) \rangle = \{k(1,1,1) \mid k \in \mathbb{Z}\}$$

에 대하여 $(\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z})/B \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ 임을 증명하여라.

14. 덧셈군 $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ 의 부분군

$$B = \langle (10, 15) \rangle = \{k(10,15) \mid k \in \mathbb{Z}\}$$

에 대하여 $(\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z})/B \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_5$ 임을 밝혀라.

15. 덧셈군 $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} = \{(x, y, z) \mid x, y, z \in \mathbb{Z}\}$ 에서 두 부분군

$$B = \langle (0,3,0) \rangle = \{(0,3k,0) \mid k \in \mathbb{Z}\},$$

에 대하여 $(\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z})/B \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}$ 임을 밝혀라.

16. 다음 두 덧셈군이 서로 동형임을 밝혀라.

(1) $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_{12}$, $\quad \mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_6$

(2) $\mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_{18} \oplus \mathbb{Z}_{15}$, $\quad \mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_{36} \oplus \mathbb{Z}_{10}$

보충문제 (2.11)

1. 위수 8인 군 $G = \{1, a, a^2, a^3, b, ab, a^2b, a^3b\}$ 에서 두 원소 a, b 사이에 다음과 같은 관계식이 성립한다고 하자.

$$a^4 = 1, \quad a^i \neq 1 \ (i = 1, 2, 3),$$
$$a^2 = b^2, \quad bab^{-1} = a^{-1}$$

이 때, 다음 물음에 답하여라.

(1) $C_G(a)$ 와 $|G : C_G(a)|$ 를 구하고, a 를 포함하는 켤레류를 구하여라.

(2) $C_G(a^2)$ 을 구하고, a^2 을 포함하는 켤레류를 구하여라.

(3) $C_G(b)$ 와 $|G : C_G(b)|$ 를 구하고, b 를 포함하는 켤레류를 구하여라.

2. 위수 8인 군 $G = \{1, x, x^2, x^3, y, xy, x^2y, x^3y\}$ 에서 두 원소 x, y 사이에 다음 관계식이 성립한다고 하자.

$$x^4 = 1, \quad x^i \neq 1 \ (1 \leq i \leq 3),$$
$$y^2 = 1, \quad y \neq 1, \quad yxy^{-1} = x^{-1}$$

이 때, 다음 물음에 답하여라.

(1) $C_G(x)$ 와 $|G : C_G(x)|$ 를 구하고, x 를 포함하는 켤레류를 구하여라.

(2) $C_G(x^2)$ 을 구하고, x^2 을 포함하는 켤레류를 구하여라.

(3) $C_G(y)$ 와 $|G : C_G(y)|$ 를 구하고, y 를 포함하는 켤레류를 구하여라.

3. 정이면체군 $G = D_6 = \{1, \sigma, \cdots, \sigma^5, \tau, \sigma\circ\tau, \cdots, \sigma^5\circ\tau\}$ 에서 $C_G(\tau)$ 를 구하고 또 τ 를 포함하는 켤레류 $\mathscr{C}_\tau$ 를 구하여라.

4. 유한군 G 에서 사상 $\sigma : G \longrightarrow G$ 가 G 의 동형사상일 때, G 의 원소 x 를 포함하는 켤레류 $\mathscr{C}_x = \{x^g \mid g \in G\}$ 에 대하여

$$\sigma(\mathscr{C}_x) = \{\sigma(y) \mid y \in \mathscr{C}_x\}$$

이라고 하면 $\sigma(\mathscr{C}_x)$ 는 원소 $\sigma(x)$ 를 포함하는 켤레류임을 증명하여라.

5. 군 G에서 원소 x의 위수가 2일 때, $N_G(\langle x \rangle) = C_G(x)$ 임을 밝혀라.

6. 군 G의 부분군 H에 대하여 다음이 성립함을 증명하여라.

(1) $Z(G) \subseteq N_G(H)$

(2) $H \lhd G$일 때 그리고 이때에만 $N_G(H) = G$이다.

(3) G의 부분군 K에 대하여 $H \lhd K$이면 $K \subseteq N_G(H)$ 이다.