제 7 장 보충문제

보충문제 (7.1)

1. 군 G가 작용

$$G \times X \longrightarrow X, \quad (g, x) \longmapsto g \cdot x$$

를 통하여 X에 작용할 때, 다음 명제 중에서 참인 명제를 찾아라.

(1) 모든 원소 $x \in X$에 대하여 $e \cdot x = x$이다.

(2) 원소 $x, y \in X$와 $g \in G$에 대하여 $g \cdot x = g \cdot y$이면, $x = y$이다.

(3) 한 원소 $x \in X$에 대하여 $g \cdot x = x$이면, $g = e$이다.

(4) 원소 $x \in X$와 $g, h \in G$에 대하여 $g \cdot x = h \cdot x$이면, $g = h$이다.

2. 군 G가 작용

$$G \times X \longrightarrow X, \quad (g, x) \longmapsto g \cdot x$$

를 통하여 집합 X에 작용할 때, 한 원소 $x \in X$에 대하여 다음 두 조건은 서로 동치임을 밝혀라.

(1) 원소 $g \in G$에 대하여 $g \cdot x = x$이면, $g = e$이다.

(2) 두 원소 $g, h \in G$에 대하여 $g \cdot x = h \cdot x$이면, $g = h$이다.

3. 군 G가 작용

$$G \times X \longrightarrow X, \quad (g, x) \longmapsto g \cdot x$$

를 통하여 X에 작용할 때, X의 임의의 부분집합 $Y\,(\neq \varnothing)$에 대하여

$$H = \{g \in G \mid \text{모든 } y \in Y\text{에 대하여 } g \cdot y = y\}$$

이라고 하면 H는 G의 부분군임을 밝혀라.

4. 서로 소인 두 집합 X, Y에 대하여 군 G가 작용

$$G \times X \longrightarrow X, \quad (g, x) \longmapsto g \cdot x$$

$$G \times Y \longrightarrow Y, \quad (g, y) \longmapsto g * y$$

를 통하여 X, Y에 작용할 때, $Z = X \cup Y$에 G의 작용을 정의하여라.

5. 군 G가 작용

$$G \times X \longrightarrow X, \quad (g,\, x) \longmapsto g \cdot x$$

를 통하여 집합 X에 작용할 때, Y가 한 G-궤도이면 작용

$$G \times Y \longrightarrow Y, \quad (g,\, y) \longmapsto g \cdot y$$

를 통하여 G는 Y에 추이적으로 작용함을 밝혀라.

6. 군 G에서 G의 부분군 H에 대하여 $X = \{xH \mid x \in G\}$이라고 할 때,

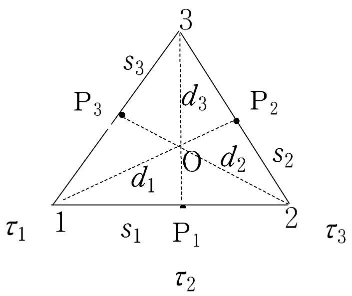
$$G \times X \longrightarrow X, \quad (g,\, xH) \longmapsto g \cdot xH = gxH$$

는 군 G의 작용이다. 이 때, 원소 $eH \in X$에 대하여 eH를 포함하는 G-궤도와 G에서의 eH의 안정화 부분군 $\mathrm{Stab}_G(eH)$를 구하여라.

7. 치환군 $G = \langle (1\ 3),\, (2\ 4\ 7\ 8) \rangle$이 집합 $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$에 자연스럽게 작용할 때, G-궤도 전체를 구하여라.

8. 위수 6인 정이면체군 $D_3 = \{1, \sigma, \sigma^2,\ \tau_1,\ \tau_2,\ \tau_3\}$ 는 다음과 같이 집합 $X = \{1, 2, 3\}$에 자연스럽게 작용한다.

	1	2	3
1	1	2	3
σ	2	3	1
σ^2	3	1	2
τ_1	1	3	2
τ_2	2	1	3
τ_3	3	2	1



그리고, 위의 그림의 정삼각형에서 $1, 2, 3$과 s_1, s_2, s_3는 각각 세 꼭지점과 세 변을 나타내고 또 $\mathrm{P}_1,\ \mathrm{P}_2,\ \mathrm{P}_3$과 d_1, d_2, d_3는 각각 세 변의 중심과 세 대각선을 나타낸다고 하면, D_3는 집합

$$X_1 = \{s_1,\, s_2,\, s_3\}, \qquad X_2 = \{1,\, 2,\, 3,\, s_1,\, s_2,\, s_3\}$$

$$X_3 = \{s_1,\, s_2,\, s_3,\, \mathrm{P}_1,\, \mathrm{P}_2,\, \mathrm{P}_3\}, \quad X_4 = \{d_1,\, d_2,\, d_3\}$$

에 자연스럽게 작용한다.

아래 표를 완성하고 이들 작용이 충실한 작용인지를 판정하여라.

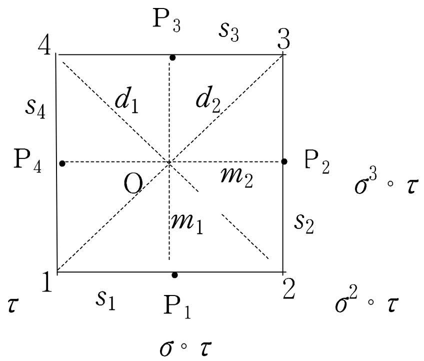
	s_1	s_2	s_3
1			
σ			
σ^2			
τ_1			
τ_2			
τ_3			

	1	2	3	s_1	s_2	s_3
1						
σ						
σ^2						
τ_1						
τ_2						
τ_3						

	s_1	s_2	s_3	P_1	P_2	P_3
1						
σ						
σ^2						
τ_1						
τ_2						
τ_3						

	d_1	d_2	d_3
1			
σ			
σ^2			
τ_1			
τ_2			
τ_3			

9. 오른쪽 그림의 정사각형에서 $1,2,3,4$ 와 $s_1, s_2,\ s_3, s_4$ 는 각각 네 꼭지점과 네 변을 나타내고 $\mathrm{P}_1, \mathrm{P}_2,\ \mathrm{P}_3,\ \mathrm{P}_4$ 는 네 변의 중점을 나타내며 $d_1,\ d_2$ 는 두 대각선을 나타내고 m_1, m_2 는 수직선과 수평선을 나타낸다고 하자.



	1	2	3	4	s_1	s_2	s_3	s_4	P_1	P_2	P_3	P_4	d_1	d_2	m_1	m_2
1	1	2	3	4	s_1	s_2	s_3	s_4	P_1	P_2	P_3	P_4	d_1	d_2	m_1	m_2
σ	2	3	4	1	s_2	s_3	s_4	s_1	P_2	P_3	P_4	P_1	d_2	d_1	m_2	m_1
σ^2	3	4	1	2	s_3	s_4	s_1	s_2	P_3	P_4	P_1	P_2	d_1	d_2	m_1	m_2
σ^3	4	1	2	3	s_4	s_1	s_2	s_3	P_4	P_1	P_2	P_3	d_2	d_1	m_2	m_1
τ	1	4	3	2	s_4	s_3	s_2	s_1	P_4	P_3	P_2	P_1	d_1	d_2	m_2	m_1
$\sigma\circ\tau$	2	1	4	3	s_1	s_4	s_3	s_2	P_1	P_4	P_3	P_2	d_2	d_1	m_1	m_2
$\sigma^2\circ\tau$	3	2	1	4	s_2	s_1	s_4	s_3	P_2	P_1	P_4	P_3	d_1	d_2	m_2	m_1
$\sigma^3\circ\tau$	4	3	2	1	s_3	s_2	s_1	s_4	P_3	P_2	P_1	P_4	d_2	d_1	m_1	m_2

이 때, 위수 8 인 정이면체군

$$D_4 = \{1, \sigma, \sigma^2, \sigma^3, \tau, \sigma\circ\tau, \sigma^2\circ\tau, \sigma^3\circ\tau\}$$

는 집합

$$X = \{1, 2, 3, 4, s_1, s_2, s_3, s_4, \mathrm{P}_1, \mathrm{P}_2, \mathrm{P}_3, \mathrm{P}_4, d_1, d_2, m_1, m_2\}$$

에 앞의 표와 같이 작용하는 경우에 다음 물음에 답하여라.

(1) 집합 X 의 D_4-궤도 전체를 구하여라.

(2) 두 집합

$$X_2 = \{s_1, s_2, s_3, s_4\}, \quad X_3 = \{\mathrm{P}_1, \mathrm{P}_2, \mathrm{P}_3, \mathrm{P}_4\}$$

에 대하여 다음 조건을 만족시키는 일대일 대응 $\theta : X_2 \longrightarrow X_3$ 가 존재함을 밝혀라.

$$\theta(g\cdot s_i) = g\cdot\theta(s_i) \qquad (g\in G,\ s_i\in X_2)$$

(3) 집합

$$X_1 = \{1, 2, 3, 4\}, X_2 = \{s_1, s_2, s_3, s_4\}$$

에 대하여 다음 조건을 만족시키는 일대일 대응 $\theta : X_1 \longrightarrow X_2$ 가 존재하지 않음을 밝혀라.

$$\theta(g\cdot i) = g\cdot\theta(i) \qquad (g\in G,\ i = 1, 2, 3, 4)$$

(4) 집합 $X_4 = \{d_1, d_2\}$, $X_5 = \{m_1, m_2\}$ 에 대하여 다음 조건을 만족시키는 일대일 대응 $\theta : X_4 \longrightarrow X_5$ 가 존재하지 않음을 밝혀라.

$$\theta(g\cdot d_i) = g\cdot\theta(d_i) \qquad (g\in G,\ i = 1, 2)$$

보충문제 (7.3)

1. 유한 p-군 G의 위수가 $|G| = p^n$ $(n \geq 1)$일 때, G가 단순군이기 위한 필요충분조건은 $|G| = p$인 것임을 밝혀라.

2. 유한 Abel G에서 $|G|$의 모든 소인수 p에 대하여 G의 Sylow p-부분군은 단 하나 존재함을 밝혀라.

3. 다음 명제 중에서 참인 명제를 찾아라.
 (1) 유한군 G의 위수가 24일 때, G의 Sylow $2-$부분군의 위수는 8이고 G의 Sylow 3-부분군의 위수는 3이다.
 (2) 유한군 G의 위수가 24일 때, G에는 Sylow $2-$부분군이 1개 또는 3개 존재한다.
 (3) 대칭군 S_4에는 Sylow $2-$부분군이 3개 존재하고 또 Sylow 3-부분군이 4개 존재한다.
 (4) 군 G가 위수 24인 Abel 군이면, G에는 Sylow $2-$부분군이 단 하나 존재하고 또 Sylow 3-부분군이 단 하나 존재한다.

4. 위수 12인 교대군 $G = A_4$에서

$$V_4 = \{1, (1\ 2)\circ(3\ 4),\ (1\ 3\circ(2\ 4), (1\ 4)\circ(2\ 3)\}$$

는 Sylow 2-부분군이고 $P = \langle (2\ 3\ 4) \rangle = \{1, (2\ 3\ 4), (2\ 4\ 3)\}$ 는 Sylow 3-부분군임을 이용하여 다음 물음에 답하여라.
 (1) $N_G(V_4)$를 구하고 또 G의 Sylow 2-부분군 전체를 구하여라.
 (2) $N_G(P)$를 구하고 또 G의 Sylow 3-부분군 전체를 구하여라.

5. 위수 12인 덧셈군 $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_3$에 대하여 다음 물음에 답하여라.
 (1) $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_3$의 Sylow 2-부분군과 Sylow 3-부분군을 구하여라.
 (2) $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_3$의 부분군 전체에 대한 Hasse 다이어그램을 구하여라.

6. 유한군 G의 위수가 30일 때, G는 단순군이 아니고 또 G에는 위수 15인 정규부분군 N이 존재함을 밝혀라.

7. 유한군 G의 위수가 36일 때, G는 단순군이 아님을 밝혀라.

8. 위수가 각각 $3 \cdot 5$, $5 \cdot 17$, $3 \cdot 17$인 유한군은 모두 순환군임을 밝혀라.

9. 유한군 G의 위수가 $160\ (= 2^5 \cdot 5)$일 때, G는 단순군이 아님을 밝혀라.

10 유한군 G에서 $O_p(G)$를 G의 Sylow p-부분군 전체의 교집합이라고 할 때, 다음이 성립함을 밝혀라.

(1) $O_p(G) \lhd G$

(2) P가 군 G의 p-부분군인 동시에 $P \lhd G$이면, P는 G의 모든 Sylow p-부분군에 포함되고 따라서 $P \subseteq O_p(G)$이다.

11. 정수 $n\ (\geq 2)$에 대하여 p가 n보다 크지 않은 素數일 때,

$$n = r_m r_{m-1} \cdots r_1 r_{0\,(p)} = r_m p^m + r_{m-1} p^{m-1} + \cdots + r_1 p + r_0$$

$$1 \leq r_m < p, \qquad 0 \leq r_i < p \quad (0 \leq i \leq m-1)$$

이라 하고

$$e = \sum_{i=1}^{m} r_i (1 + p + \cdots + p^{i-1})$$

이라고 하면, 대칭군 S_n의 Sylow p-부분군의 위수는 p^e임을 증명하여라.

12. 유한군 G에서 $|G : H| = n \geq 2$, $|G| \nmid n!$인 부분군 H가 존재하면, G는 단순군이 아님을 증명하여라(정리 7.1.10 참조).

13. 위수 36인 유한군 G에는 위수 9인 Sylow 3-부분군 P가 존재한다. 이 사실을 이용하여 위수 36인 유한군 G는 단순군이 아님을 증명하여라.

14. 유한 단순군 G에서 $|G| > 60$일 때, 군 G에는 $1 < |G : H| \leq 5$인 부분군 H가 존재하지 않음을 증명하여라.

보충문제 (7.4)

1. 위수 2^3 인 정이면체군 $D_4 = \{1, \sigma, \sigma^2, \sigma^3, \tau, \sigma \circ \tau, \sigma^2 \circ \tau, \sigma^3 \circ \tau\}$ 과 위수 2^3 인 사원수군 $Q_8 = \{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\}$ 에 대하여 다음이 성립하는지를 판정하여라.
   (1) D_4 와 Q_8 은 모두 Abel 군이 아니다.
   (2) D_4 와 Q_8 은 동형이 아니다.
   (3) $Z(D_4) = D_4{}'$, $Z(Q_4) = Q_8{}'$
   $D_4{}'' = \{1\}$, $Q_8{}'' = \{1\}$
   (4) $Z(D_4) \cong Z(Q_8)$, $D_4/Z(D_4) \cong Q_8/Z(Q_8)$

2. 두 군 G, H 의 직적 $G \times H$ 에 대하여 다음이 성립함을 밝혀라.
   (1) $(G \times H)' = G' \times H'$
   (2) $(G \times H)^{(i)} = G^{(i)} \times H^{(i)}$ $(i \geq 0)$

3. 두 군 G, H 가 모두 가해군일 때 그리고 이때에만 $G \times H$ 는 가해군임을 증명하여라.

4. 다음 군이 가해군인지를 판정하여라.
   (1) $S_3 \times S_3$ (2) $S_3 \times S_4$

5. 위수 8 인 사원수군 $Q_8 = \{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\}$ 의 조성열을 모두 구하여라.

6. 위수 8 인 정이면체군 $D_4 = \{1, \sigma, \sigma^2, \sigma^3, \tau, \sigma \circ \tau, \sigma^2 \circ \tau, \sigma^3 \circ \tau\}$ 의 조성열을 모두 구하여라.

7. 덧셈군 $\mathbb{Z}_{36} = \{0, 1, 2, 3, \cdots, 35\}$ 의 조성열을 모두 구하고 또 이들 조성열의 잉여군과 동형인 순환군을 구하여라.

8. 유한군 G의 위수가 255 $(= 3 \cdot 5 \cdot 17)$일 때, G'을 G의 교환자부분군이라 하고 P를 G의 Sylow 17-부분군이라고 하면 다음이 성립함을 밝혀라.

(1) $P \lhd G$이고 잉여군 G/P는 Abel 군이며 $G' \subseteq P$이다.

(2) $G' = \{e\}$이고 따라서 G는 Abel 군이다.

(3) G는 순환군이다.

9. 군 G에서 원소 $x, y, z \in G$에 대하여 다음이 성립함을 증명하여라.

(1) $[xy, z] = [x, z]^y [y, z]$

(2) $[x, yz] = [x, z][x, y]^z$

10. 군 G에서 원소 $x, y, z \in G$에 대하여 다음 등식이 성립함을 밝혀라.

(1) $[xy, z] = [x, z][[x, z], y][y, z]$

(2) $[x, yz] = [x, z][x, y][[x, y], z]$

11. 군 G에서 원소 $x, y, z \in G$에 대하여 다음 등식이 성립함을 밝혀라.

$$[[x, y^{-1}], z]^y [[y, z^{-1}], x]^z [[z, x^{-1}], y]^x = e$$

보충문제 (7.7)

1. 다음과 같은 유한 순환군 G의 자기동형군 $\mathrm{Aut}(G)$ 를 결정하여라.

   (1) $G = \{e, a, a^2, a^3\}$, $a^4 = e$

   (2) $G = \{e, a, a^2, a^3, a^4, a^5, a^6\}$, $a^7 = e$

2. 교대군 A_4 에 대하여 $\mathrm{Inn}(A_4) \cong A_4$ 임을 밝혀라.

3. 다음 덧셈군의 자기동형군을 결정하여라.

   (1) $\mathbb{Z}_5 = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ (2) $\mathbb{Z}_8 = \{0, 1, 2, 3, \cdots, 7\}$

4. 덧셈군 $\mathbb{R}$ 에서 임의의 0 이 아닌 실수 $a \in \mathbb{R}^*$ 에 대하여 사상

$$\sigma_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \ \sigma_a(x) = ax$$

   는 $\mathbb{R}$ 의 자기동형사상임을 밝혀라.

보충문제 (7.8)

1 위수가 다음과 같은 Abel 군 중에서 서로 동형이 아닌 군은 모두 몇 개 존재하는지 말하여라.

(1) 24 (2) 49 (3) $24 \cdot 49$

2. 세 정수 p, q, r 가 서로 다른 素數일 때, 다음과 같은 위수를 가진 Abel 군 중에서 서로 동형이 아닌 Abel 군의 개수를 구하여라.

(1) pq (2) $p^3 q^4$ (3) $(pq)^5$ (4) $p^3 q^4 r^5$

3. 다음과 같은 위수를 가진 Abel 군을 분류하여라.

(1) 12 (2) 32 (3) 720

4. 다음 두 덧셈군이 서로 동형인지를 판정하여라.

$$\mathbb{Z}_8 \oplus \mathbb{Z}_{10} \oplus \mathbb{Z}_{24}, \qquad \mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_{12} \oplus \mathbb{Z}_{40}$$

5. Abel 군 중에서 서로 동형이 아닌 위수 m 인 Abel 군의 개수와 서로 동형이 아닌 위수 n 인 Abel 군의 개수가 각각 k, t 인 경우에 m 과 n 이 서로 소일 때, Abel 군 중에서 서로 동형이 아닌 위수 mn 인 Abel 군의 개수는 kt 임을 밝혀라.

6 덧셈군 $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_9$ 에서 다음과 같은 위수를 가진 부분군을 구하여라.

(1) 8 (2) 4 (3) $8 \cdot 3$