제 4 장　해 설

§4.3　유리식의 부분분수 표현

§4.5　유한 순환군과 유한체의 곱셈군

§4.6.1 사차방정식의 근

§4.6.2 특수한 다항식의 근

§4.6.3 실근의 근사값을 구하는 방법

§4.3 유리식의 부분분수 표현

고정된 정수 b (≥ 2) 에 대하여, 모든 양의 정수 a 는 단 한 가지 방법으로 다음과 같은 꼴로 나타낼 수 있다([1] 의 정리 2.5.1 참조).

$$(*) \qquad a = r_m b^m + r_{m-1} b^{m-1} + \cdots + r_1 b + r_0$$
$$m \geq 0, \quad 1 \leq r_m < b, \quad 0 \leq r_i < b \quad (0 \leq i < m)$$

위의 (*) 를 양의 정수 a 의 b 진법에 관한 **전개식**이라 하고 b 를 밑수(base)이라고 한다. 그리고 이것을

$$a = r_m r_{m-1} \cdots r_1 r_{0\,(b)}$$

로 나타낸다.

마찬가지로, 체 F 위의 다항식에 대하여 다음 정리가 성립함을 증명할 수 있다.

정리 1 체 F 위의 고정된 다항식 $b(x) \in F[x]$, $\deg b(x) \geq 1$ 에 대하여 모든 다항식 $a(x) \in F[x]$ 는 단 한 가지 방법으로 다음과 같은 꼴로 나타내어 진다.

$$a(x) = r_m(x)\, b(x)^m + r_{m-1}(x)\, b(x)^{m-1} + \cdots r_1(x)\, b(x) + r_0(x)$$
$$m \geq 0, \ 0 \leq \deg r_m(x) < \deg b(x)$$
$$r_j(x) = 0 \text{ 또는 } \deg r_j(x) < \deg b(x) \quad (0 \leq j \leq m-1)$$

정리 2 체 F 위의 유리식 $\dfrac{g(x)}{f(x)} \in F(x)$ 에서, $f(x)$ 의 표준분해가

$$f(x) = a\, p_1(x)^{e_1} p_2(x)^{e_2} \cdots p_r(x)^{e_r} \qquad (a \in F)$$

일 때, 적당한 다항식 $a_1(x), a_2(x), \cdots, a_r(x) \in F[x]$ 에 대하여 다음이 성립한다.

$$\frac{g(x)}{f(x)} = \frac{a_1(x)}{p_1(x)^{e_1}} + \frac{a_2(x)}{p_2(x)^{e_2}} + \cdots + \frac{a_r(x)}{p_r(x)^{e_r}}$$

증 명 정리를 r 에 관한 귀납법으로 증명한다.

먼저 $r = 1$ 일 때,

$$\frac{g(x)}{f(x)} = \frac{g(x)}{a\,p_1(x)^{e_1}} = \frac{a^{-1}g(x)}{p_1(x)^{e_1}}$$

이므로 정리는 성립한다.

이제 $r \geq 2$ 일 때, 유리식의 분모가 $r-1$ 개의 기약인수를 가지는 다항식인 경우에 정리가 성립한다고 가정하자. 이 때, 정리 4.2.6 에 의하여 $p_1(x)^{e_1}$ 와 $a\,p_2(x)^{e_2}\cdots p_r(x)^{e_r}$ 는 서로 소이고, 따라서 정리 4.2.5 에 의하여

$$p_1(x)^{e_1}s(x) + a\,p_2(x)^{e_2}\cdots p_r(x)^{e_r}\,t(x) = 1$$

인 다항식 $s(x),\ t(x) \in F[x]$ 가 존재하고 이때

$$g(x) = p_1(x)^{e_1}\,s(x)\,g(x) + a\,p_2(x)^{e_2}\cdots p_r(x)^{e_r}\,t(x)\,g(x)$$

이므로

$$\begin{aligned}\frac{g(x)}{f(x)} &= \frac{p_1(x)^{e_1}\,s(x)\,g(x) + a\,p_2(x)^{e_2}\cdots p_r(x)^{e_r}\,t(x)\,g(x)}{a\,p_1(x)^{e_1}\,p_2(x)^{e_2}\cdots p_r(x)^{e_r}}\\ &= \frac{s(x)\,g(x)}{a\,p_2(x)^{e_2}\cdots p_r(x)^{e_r}} + \frac{t(x)\,g(x)}{p_1(x)^{e_1}}\end{aligned}$$

이고 따라서 $a_1(x) = t(x)\,g(x)$ 로 놓으면 다음이 성립한다.

$$\frac{g(x)}{f(x)} = \frac{a_1(x)}{p_1(x)^{e_1}} + \frac{s(x)\,g(x)}{a\,p_2(x)^{e_2}\cdots p_r(x)^{e_r}}$$

그런데, 귀납법 가정에 의하여 적당한 다항식 $a_2(x), \cdots, a_r(x) \in F[x]$ 에 대하여

$$\frac{s(x)\,g(x)}{a\,p_2(x)^{e_2}\cdots p_r(x)^{e_r}} = \frac{a_2(x)}{p_2(x)^{e_2}} + \cdots + \frac{a_r(x)}{p_r(x)^{e_r}}$$

이고, 이때

$$\frac{g(x)}{f(x)} = \frac{a_1(x)}{p_1(x)^{e_1}} + \frac{a_2(x)}{p_2(x)^{e_2}} + \cdots + \frac{a_r(x)}{p_r(x)^{e_r}}$$

이므로 정리가 성립한다.

정리 3 (유리식의 부분분수 표현) 체 F 위의 유리식 $\frac{g(x)}{f(x)} \in F(x)$ 에서 $f(x)$ 의 표준분해가

$$f(x) = a\, p_1(x)^{e_1} \cdots p_r(x)^{e_r} \qquad (a \in F)$$

와 같이 서로 다른 기약다항식 $p_1(x), \cdots, p_r(x) \in F[x]$ 의 곱으로 인수분해될 때, $\frac{g(x)}{f(x)}$ 는 체 F 위에서 다음과 같이 **부분분수**의 꼴로 나타내어진다.

$$\frac{g(x)}{f(x)} = h(x) + \sum_{i=1}^{r} \left(\frac{d_{i1}(x)}{p_i(x)} + \frac{d_{i2}(x)}{p_i(x)^2} + \cdots + \frac{d_{ie_i}(x)}{p_i(x)^{e_i}} \right)$$

여기서 $h(x),\ d_{ij}(x) \in F[x]$ 이고 다음이 성립한다.

$$d_{ij}(x) = 0 \quad \text{또는} \quad 0 \le \deg d_{ij}(x) < \deg p_i(x)$$

증 명 정리 2 에 의하여 적당한 다항식 $a_1(x), a_2(x), \cdots, a_r(x) \in F[x]$ 에 대하여 다음이 성립한다.

$$\frac{g(x)}{f(x)} = \frac{a_1(x)}{p_1(x)^{e_1}} + \frac{a_2(x)}{p_2(x)^{e_2}} + \cdots + \frac{a_r(x)}{p_k(x)^{e_r}}$$

그런데, 나눗셈 알고리즘에 의하여 각 i $(1 \le i \le k)$ 에 대하여

$$a_i(x) = p_i(x)^{e_i} h_i(x) + c_i(x),$$

(*) $$c_i(x) = 0 \quad \text{또는} \quad \deg c_i(x) < \deg p_i(x)^{e_i}$$

인 다항식 $h_i(x),\ c_i(x) \in F[x]$ 가 존재하고 또 정리 1 에 의하여 각 다항식 $c_i(x)$ 는 다음과 같은 꼴로 나타내어진다.

$$c_i(x) = r_m(x)\, p_i(x)^m + r_{m-1}(x)\, p_i(x)^{m-1} + \cdots + r_0(x)$$

$$m \ge 0,\ 0 \le \deg r_m(x) < \deg p_i(x)$$

$$r_j(x) = 0 \text{ 또는 } \deg r_j(x) < \deg p_i(x) \quad (0 \le j \le m-1)$$

그런데 (*) 에 의하여 $0 \le m \le e_i$ 이고 따라서 다음 등식이 성립한다.

$$\frac{a_i(x)}{p_i(x)^{e_i}} = h_i(x) + \frac{c_i(x)}{p_i(x)^{e_i}}$$

$$= h_i(x) + \frac{r_m(x)\, p_i(x)^m}{p_i(x)^{e_i}} + \frac{r_{m-1}(x)\, p_i(x)^{m-1}}{p_i(x)^{e_i}} + \cdots + \frac{r_0(x)}{p_i(x)^{e_i}}$$

$$= h_i(x) + \frac{r_m(x)}{p_i(x)^{e_i-m}} + \frac{r_{m-1}(x)}{p_i(x)^{e_i-m+1}} + \cdots + \frac{r_0(x)}{p_i(x)^{e_i}}$$

이제

$$h(x) = h_1(x) + \cdots + h_r(x)$$

이라고 하면, $\frac{g(x)}{f(x)}$ 는 다음과 같은 꼴로 나타내어진다.

$$\frac{g(x)}{f(x)} = h(x) + \sum_{i=1}^{r} \left(\frac{d_{i1}(x)}{p_i(x)} + \frac{d_{i2}(x)}{p_i(x)^2} + \cdots + \frac{d_{ie_i}(x)}{p_i(x)^{e_i}} \right)$$

여기서 $h(x),\, d_{ij}(x) \in F[x]$ 이고 다음이 성립한다.

$$d_{ij}(x) = 0 \quad \text{또는 } 0 \le \deg\, d_{ij}(x) < \deg\, p_i(x)$$

앞의 정리 2 와 정리 3 과 마찬가지로 정수에 대하여 다음이 성립함을 증명할 수 있다.

정리 4 정수 $a\ (\ge 2)$ 의 표준분해가

$$a = p_1^{e_1} p_2^{e_2} \cdots p_r^{e_r}$$

일 때, 양의 정수 b 에 대하여 유리수 $\frac{b}{a}$ 는 다음과 같은 꼴로 나타내어진다.

(1) $\dfrac{b}{a} = \dfrac{c_1}{p_1^{e_1}} + \dfrac{c_2}{p_2^{e_1}} + \cdots + \dfrac{c_r}{p_r^{e_r}}$

여기서, $c_1,\, c_2,\, \cdots,\, c_r$ 는 양의 정수이다.

(2) $\dfrac{b}{a} = h + \displaystyle\sum_{i=1}^{r} \left(\frac{d_{i1}}{p_i} + \frac{d_{i2}}{p_i^2} + \cdots + \frac{d_{ie_i}}{p_i^{e_i}} \right)$

여기서, $h \ge 0$ 이고 각 $i\ (1 \le i \le r)$ 에 대하여 $0 \le d_{ij} < p_i$ 이다.

정의 5 체 F 위의 다항식 $f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$ 에 대하여

$$f'(x) = \sum_{i=1}^{n} i a_i x^{i-1} = a_1 + 2a_2 x + \cdots + n a_n x^{n-1} \in F[x]$$

를 다항식 $f(x)$ 의 **형식적 미분**(formal derivative)이라고 한다.

정의에 따라 다음 정리가 성립함을 증명할 수 있다.

정리 6 체 F 위의 두 다항식 $f(x), g(x) \in F[x]$ 와 원소 $a \in F$ 에 대하여 다음이 성립한다.

(1) $(f(x)+g(x))' = f'(x) + g'(x)$,

$(a f(x))' = a f'(x)$

(2) $(f(x)\, g(x))' = f'(x)\, g(x) + f(x)\, g'(x)$

정리 7 체 F 위의 n 차의 다항식 $f(x)$ 가 서로 다른 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 에 대하여

$$f(x) = (x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_n)$$

과 같이 인수분해될 때, 다항식 $g(x) \in F[x]$, $\deg g(x) < \deg f(x)$ 에 대하여 유리식 $\frac{g(x)}{f(x)}$ 는 다음과 같이 부분분수식으로 나타내어진다.

$$\frac{g(x)}{f(x)} = \frac{g(a_1)}{f'(a_1)}\frac{1}{x-a_1} + \frac{g(a_2)}{f'(a_2)}\frac{1}{x-a_2} + \cdots + \frac{g(a_n)}{f'(a_n)}\frac{1}{x-a_n}$$

증명 정리 3 에 의하여 $\frac{g(x)}{f(x)}$ 는 적당한 원소 $A_1, A_2, \cdots, a_n \in F$ 에 대하여 다음과 같은 꼴로 나타내어진다.

$$\frac{g(x)}{f(x)} = \frac{A_1}{x-a_1} + \frac{A_2}{x-a_2} + \cdots + \frac{A_n}{x-a_n}$$

그런데,

$$f(x) = (x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_n)$$

이므로 다음 등식이 성립한다.

$$\begin{aligned} g(x) = {} & A_1(x-a_2)(x-a_3)\cdots(x-a_n) \\ & + A_2(x-a_1)(x-a_3)\cdots(x-a_n) \\ & \quad \vdots \\ & + A_n(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_{n-1}) \end{aligned}$$

한편,

$$\begin{aligned} f'(x) = {} & (x-a_2)(x-a_3)\cdots(x-a_n) \\ & + (x-a_1)(x-a_3)\cdots(x-a_n) \\ & \quad \vdots \\ & + (x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_{n-1}) \end{aligned}$$

이므로

$$\begin{aligned} g(a_1) &= A_1(a_1-a_2)(a_1-a_3)\cdots(a_1-a_n) = A_1 f'(a_1), \\ g(a_2) &= A_2(a_2-a_1)(a_2-a_3)\cdots(a_2-a_n) = A_2 f'(a_2), \\ &\ \ \vdots \\ g(a_n) &= A_n(a_n-a_1)(a_n-a_2)\cdots(a_n-a_{n-1}) = A_n f'(a_n) \end{aligned}$$

이고 따라서 다음이 성립한다.

$$A_i = \frac{g(a_i)}{f'(a_i)} \qquad (1 \le i \le n)$$

그러므로 유리식 $\frac{g(x)}{f(x)}$ 는 다음과 같이 부분분수식으로 나타내어진다.

$$\frac{g(x)}{f(x)} = \frac{g(a_1)}{f'(a_1)}\frac{1}{x-a_1} + \frac{g(a_2)}{f'(a_2)}\frac{1}{x-a_2} + \cdots + \frac{g(a_n)}{f'(a_n)}\frac{1}{x-a_n}$$

보기 1 복소수체 $\mathbb{C}$ 안에서 $f(x) = x^n - 1$ 는 서로 다른 n 개의 근

$$1,\ \zeta,\ \cdots,\ \zeta^{n-1} \qquad (\ \zeta = \cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}\ )$$

을 가지며 $f(x) = x^n - 1$ 는 다음과 같이 인수분해된다(문제 4.3.8 의 풀이).

$n = 2m\ (m \geq 2)$ 인 경우

$$x^n - 1 = (x-1)(x+1)\prod_{k=1}^{m-1}(x-\zeta^k)(x-\overline{\zeta^k})$$

$n = 2m - 1\ (m \geq 2)$ 인 경우

$$x^n - 1 = (x-1)\prod_{k=1}^{m-1}(x-\zeta^k)(x-\overline{\zeta}^k)$$

그런데, $f(x) = x^n$, $g(x) = 1$ 이라고 놓으면, $f'(x) = nx^{n-1}$ 이고 또

$$f'(1) = n, \qquad f'(-1) = n(-1)^{n-1},$$
$$f'(\zeta^k) = n\zeta^{k(n-1)}, \qquad f'(\overline{\zeta}^k) = n\overline{\zeta}^{k(n-1)}$$
$$g(1) = 1,\ g(-1) = 1,\ g(\zeta^k) = 1,\ g(\overline{\zeta}^k) = 1$$

이므로 복소수체 $\mathbb{C}$ 위에서 $\dfrac{1}{x^n-1}$ 은 다음과 같이 부분분수식으로 나타내어진다.

(1) $n = 2m\ (m \geq 2)$ 인 경우

$$\frac{1}{x^n-1} = \frac{1}{n(x-1)} + \frac{(-1)^{n-1}}{n(x+1)} + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{m-1}\left\{\frac{1}{\zeta^{k(n-1)}(x-\zeta^k)} + \frac{1}{\overline{\zeta}^{k(n-1)}(x-\overline{\zeta}^k)}\right\}$$

(2) $n = 2m - 1\ (m \geq 2)$ 인 경우

$$\frac{1}{x^n-1} = \frac{1}{n(x-1)} + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{m-1}\left\{\frac{1}{\zeta^{k(n-1)}(x-\zeta^k)} + \frac{1}{\overline{\zeta}^{k(n-1)}(x-\overline{\zeta}^k)}\right\}$$

한편,

$$\overline{\zeta}^{\,k(n-1)}\zeta^{\,k(n-1)} = (\overline{\zeta}\zeta)^{k(n-1)} = 1^{k(n-1)} = 1,$$

$$\overline{\zeta}^{\,k(n-1)} + \zeta^{\,k(n-1)} = 2\cos\frac{2k(n-1)\pi}{n},$$

$$\overline{\zeta}^{\,k(n-1)}\overline{\zeta}^{\,k} + \zeta^{\,k(n-1)}\zeta^{k} = \overline{\zeta}^{\,kn} + \zeta^{\,kn} = 2$$

이므로 다음이 성립한다.

$$\frac{1}{\zeta^{k(n-1)}(x-\zeta^k)} + \frac{1}{\overline{\zeta}^{\,k(n-1)}(x-\overline{\zeta}^{\,k})}$$

$$= \frac{\overline{\zeta}^{\,k(n-1)}(x-\overline{\zeta}^{\,k}) + \zeta^{k(n-1)}(x-\zeta^k)}{(x-\zeta^k)(x-\overline{\zeta}^{\,k})}$$

$$= \frac{2x\cos\frac{2k(n-1)\pi}{n} - 2}{x^2 - 2\cos\frac{2k\pi}{n} + 1}$$

따라서 실수체 ℝ 위에서 $\frac{1}{x^n-1}$ 는 다음과 같이 부분분수식으로 나타내어진다.

(1) $n = 2m\ (m \geq 2)$ 인 경우

$$\frac{1}{x^n-1} = \frac{1}{n(x-1)} + \frac{(-1)^{n-1}}{n(x+1)} + \frac{2}{n}\sum_{k=1}^{m-1}\frac{x\cos\frac{2k(n-1)\pi}{n} - 1}{x^2 - 2x\cos\frac{2k\pi}{n} + 1}$$

(2) $n = 2m-1\ (m \geq 2)$ 인 경우

$$\frac{1}{x^n-1} = \frac{1}{n(x-1)} + \frac{2}{n}\sum_{k=1}^{m-1}\frac{x\cos\frac{2k(n-1)\pi}{n} - 1}{x^2 - 2x\cos\frac{2k\pi}{n} + 1}$$

보기 2 복소수체 $\mathbb{C}$ 안에서 $f(x) = x^n - 1$ 는 서로 다른 n 개의 근

$$1,\ \zeta,\ \cdots,\ \zeta^{n-1} \qquad \left(\zeta = \cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n} \right)$$

을 가지며 $f(x) = x^n - 1$ 는 다음과 같이 인수분해된다(문제 4.3.8 의 풀이).

$n = 2m\ (m \geq 2)$ 인 경우

$$x^n - 1 = (x-1)(x+1)\prod_{k=1}^{m-1}(x-\zeta^k)(x-\overline{\zeta^k})$$

$n = 2m - 1\ (m \geq 2)$ 인 경우

$$x^n - 1 = (x-1)\prod_{k=1}^{m-1}(x-\zeta^k)(x-\overline{\zeta}^k)$$

그런데, $f(x) = x^n - 1$, $g(x) = x^t$ 이라고 하면, $f'(x) = nx^{n-1}$ 이고 또 다음이 성립한다.

$$f'(1) = n, \qquad f'(-1) = n(-1)^{n-1},$$
$$f'(\zeta^k) = n\zeta^{k(n-1)}, \qquad f'(\overline{\zeta}^k) = n\overline{\zeta}^{k(n-1)}$$
$$g(1) = 1, \qquad g(-1) = (-1)^t,$$
$$g(\zeta^k) = \zeta^{kt}, \quad g(\overline{\zeta}^k) = \overline{\zeta}^{kt}$$

따라서 보기 1 과 같은 방법으로 복소수체 $\mathbb{C}$ 위에서 $\dfrac{x^t}{x^n-1}$ 은 다음과 같이 부분분수식으로 나타내어짐을 밝힐 수 있다.

(1) $n = 2m\ (m \geq 2)$ 인 경우

$$\frac{x^t}{x^n-1} = \frac{1}{n(x-1)} + \frac{(-1)^{n-t-1}}{n(x+1)} + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{m-1}\left\{ \frac{\zeta^{kt}}{\zeta^{k(n-1)}(x-\zeta^k)} + \frac{\overline{\zeta}^{kt}}{\overline{\zeta}^{k(n-1)}(x-\overline{\zeta}^k)} \right\}$$

(2) $n = 2m - 1\ (m \geq 2)$ 인 경우

$$\frac{1}{x^n-1} = \frac{1}{n(x-1)} + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{m-1}\left\{ \frac{\zeta^{km}}{\zeta^{k(n-1)}(x-\zeta^k)} + \frac{\overline{\zeta}^{km}}{\overline{\zeta}^{k(n-1)}(x-\overline{\zeta}^k)} \right\}$$

한편,

$$\zeta^{k(n-1)}\overline{\zeta}^{k(n-1)} = (\zeta\overline{\zeta})^{k(n-1)} = 1^{k(n-1)} = 1$$

$$\begin{aligned}\zeta^{kt}\overline{\zeta}^{k(n-1)} + \overline{\zeta}^{kt}\zeta^{k(n-1)} &= \overline{\zeta}^{k(n-t-1)} + \zeta^{k(n-t-1)} \\ &= 2\cos\frac{2k(n-t-1)\pi}{n}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\zeta^{kt}\overline{\zeta}^{k(n-1)}\overline{\zeta^k} + \overline{\zeta}^{kt}\zeta^{k(n-1)}\zeta^k &= \overline{\zeta}^{k(n-t)} + \zeta^{k(n-t)} \\ &= 2\cos\frac{2k(n-t)\pi}{n}\end{aligned}$$

이므로 다음이 성립한다.

$$\begin{aligned}&\frac{\zeta^{kt}}{\zeta^{k(n-1)}(x-\zeta^k)} + \frac{\overline{\zeta}^{kt}}{\overline{\zeta}^{k(n-1)}(x-\overline{\zeta}^k)} \\ &= \frac{\zeta^{kt}\overline{\zeta}^{k(n-1)}(x-\overline{\zeta}^k) + \overline{\zeta}^{kt}\zeta^{k(n-1)}(x-\zeta^k)}{(x-\zeta^k)(x-\overline{\zeta}^k)} \\ &= \frac{2x\cos\frac{2k(n-t-1)\pi}{n} - \cos\frac{2k(n-t)\pi}{n}}{x^2-2\cos\frac{2k\pi}{n}+1}\end{aligned}$$

따라서 실수체 $\mathbb{R}$ 위에서 $\frac{x^t}{x^n-1}$ 다음과 같이 부분분수식으로 나타내어진다.

(1) $n = 2m$ $(m \geq 2)$ 인 경우

$$\frac{x^t}{x^n-1} = \frac{1}{n(x-1)} + \frac{(-1)^{n-t-1}}{n(x+1)} + \frac{2}{n}\sum_{k=1}^{m-1}\frac{x\cos\frac{2k(n-t-1)\pi}{n} - \cos\frac{2k(n-t)\pi}{n}}{x^2-2x\cos\frac{2k\pi}{n}+1}$$

(2) $n = 2m-1$ $(m \geq 2)$ 인 경우

$$\frac{x^t}{x^n-1} = \frac{1}{n(x-1)} + \frac{2}{n}\sum_{k=1}^{m-1}\frac{x\cos\frac{2k(n-t-1)\pi}{n} - \cos\frac{2k(n-t)\pi}{n}}{x^2-2x\cos\frac{2k\pi}{n}+1}$$

§4.5 유한 순환군과 유한체의 곱셈군

먼저 다음 정리를 생각해 보자.

정리 1 군 G의 원소 a의 위수가 n이고 또 적당한 素數 p에 대하여 $p|n$일 때, $b^p = a$인 원소 $b \in G$가 존재하면 b의 위수는 np이다.

증명 가정에 의하여 $b^p = a$이므로 $b^{pn} = (b^p)^n = a^n = e$ 이고, 따라서 b는 유한 위수를 가지며 그 위수를 r라고 하면, 정리 2.4.2 에 의하여 $r|pn$이다. 그리고,

$$a^r = (b^p)^r = (b^r)^p = e^p = e$$

이고 a의 위수는 n이므로 정리 2.4.2 에 의하여 $n|r$이고, 따라서 적당한 양의 정수 q에 대하여 $r = qn$이다. 그런데 위의 결과에 의하여 $qn|pn$ 즉 $q|p$이고 또 p는 素數이므로 $q = 1$ 또는 $q = p$이다.

한편, 가정에 의하여 $p|n$이므로 $n = pm$, $1 \le m < n$인 양의 정수 m이 존재하고 이때

$$b^n = b^{pm} = (b^p)^m = a^m \neq e$$

이므로 $r \neq n$이다. 따라서 $q = p$이므로 $r = np$이다.

[참고] 이 정리에서 조건 '$p|n$' 은 반드시 필요한 조건이다.
예를 들어, 원소 a의 위수가 $n = 3$일 때, $p = 2$에 대하여 $b = a^p$이라고 하면 $b^p = (a^2)^2 = a^4 = a$ 이지만 b의 위수는 $n = 3$이다.

다음 정리는 유한 순환군의 특성을 말해준다.

정리 2 유한 Abel 군 G에 대하여 다음 두 조건은 서로 동치이다.

(1) G는 순환군이다.

(2) $|G|$의 모든 소인수 p에 대하여 위수 p인 부분군이 단 하나 존재한다.

증 명 (1) $\Longrightarrow$ (2) G가 순환군이면, 조건 (2)가 성립한다.

(2) $\Longrightarrow$ (1) 이제 조건 (2)가 성립하다고 가정하고, G의 원소 중에서 그 위수가 가장 큰 원소를 하나 택하여 이것을 a라 하고 그 위수를 n이라고 하자. 이 때, 다음 세 단계에 따라 (1) 이 성립함을 증명한다.

(a) $|G|$의 소인수는 모두 n의 소인수이다.

실제로, p를 $|G|$의 소인수라고 하면, 가정에 의하여 위수 p인 부분군 C가 단 하나 존재하고 따라서 $C = \langle c \rangle$인 위수 p의 원소 c가 존재한다. 그런데 $(p, n) = 1$이라고 가정하면, ac의 위수는 np이고 $np > n$이므로 a의 위수가 가장 크다는 사실에 모순된다. 따라서 $p | n$이다.

(b) $|G|$의 소인수 p에 대하여 위수 p인 원소는 모두 $\langle a \rangle$에 속한다.

실제로, c가 위수 p인 원소일 때, $\langle c \rangle$는 위수 p인 유일한 부분군이고 또 (a) 에 의하여 $p | n$이므로 $n = pq$이라고 하자. 이 때, a^q의 위수는 p이므로 $a^q \in \langle c \rangle$이고 따라서 적당한 정수 i에 대하여 $a^q = c^i \neq e$이다. 그러므로 $(i, p) = 1$이므로

$$is + pt = 1$$

인 정수 s, t가 존재하고 다음이 성립한다.

$$c = c^{is} c^{pt} = c^{is} = a^{ms} \in \langle a \rangle$$

(c) $G = \langle a \rangle$이고 따라서 G는 순환군이다.

이제 $\langle a \rangle \subsetneq G$이라 가정하고 $b \in G$를 $b \not\in \langle a \rangle$인 원소라고 하자.

이 때, 잉여군 $G/\langle a \rangle$에서 원소 $b\langle a \rangle$의 위수를 k라고 하면,

$$\langle a \rangle = (b\langle a \rangle)^k \Longleftrightarrow b^k \in \langle a \rangle$$

이므로 k는 $b^k \in \langle a \rangle$인 가장 작은 양의 정수이며 $k > 1$이고 또

$$b^k = a^m$$

인 정수 m이 존재한다. 이 때, $G/\langle a \rangle$에서

$$(b\langle a \rangle)^k = b^k \langle a \rangle = e\langle a \rangle$$

이므로, Lagrange 의 정리에 의하여 $k \,|\, |G/\langle a \rangle|$이고 $|G/\langle a \rangle| \,\big|\, |G|$이므로 $k \,|\, |G|$이다.

따라서 p를 k의 소인수라 하고 $k = pr$라고 하면, p는 $|G|$의 소인수이므로 (i) 에 의하여 $p | n$이다.

그런데, $p | m$이라고 가정하고 $m = ps$라고 하면

$$b^{pr} = b^k = a^m = a^{ps} \quad \text{즉} \quad (b^r a^{-s})^p = e$$

이므로 (b) 에 의하여 $b^r a^{-s} \in \langle a \rangle$ 이고 따라서 $b^r \in \langle a \rangle$ 이고 $r < k$이므로 모순이 생긴다. 그러므로 $(p, m) = 1$ 이고, 따라서

$$ps + mt = 1$$

인 적당한 정수 s, t가 존재하고 이때 다음이 성립한다.

$$a = a^{ps} a^{mt} = a^{ps} a^{mt} = a^{ps} b^{kt} = a^{ps} b^{prt} = (a^s b^{rt})^p$$

한편, a의 위수는 n이고 $p | n$ 이므로 $a^s b^{rt}$ 의 위수는 np이고 $np > n$이므로 a의 위수가 가장 크다는 사실에 모순된다(정리 1 참조).

따라서 $G = \langle a \rangle$ 이고 따라서 G는 순환군이다.

앞의 정리 2 를 이용하면, 다음 정리를 간단히 증명할 수 있다.

정리 3 체 K 에서 K의 곱셈군 $K^* = K - \{0\}$ 의 부분군 G 가 유한군이면 G 는 순환군이다.

특히, K가 유한체이면, 곱셈군 $K^* = K - \{0\}$ 는 순환군이다.

증 명 먼저 $|G| = 1$ 이면, $G = \{1\}$ 이고 G는 순환군이다.

이제 $|G| \geq 2$ 이라 하고 p를 $|G|$ 의 소인수라고 하자.

이 때, Cauchy 의 정리(정리 6.2.3) 에 의하여 G에는 위수 p인 부분군이 적어도 하나 존재한다. 한편, G에 위수가 p인 서로 다른 두 부분군 S, T가 존재한다고 가정하면,

$$|S \cup T| = 2p - 1 > p$$

이고, 또 모든 원소 $a \in S \cup T$에 대하여 $a^p = 1$ 이므로 p차의 다항식 $p(x) = x^p - 1$는 p개 보다 많은 개수의 근을 가지게 되어 모순이 생긴다(정리 4.3.9). 그러므로 $|G|$ 의 모든 소인수 p에 대하여 위수 p인 부분군이 단 하나 존재하고, 따라서 정리 1 에 의하여 G는 순환군이다.

§4.6.1 사차방정식의 근

여기서는, 복소수체 $\mathbb{C}$ 위의 사차다항식의 근을 구하는 오일러(Euler) 의 방법에 대하여 논한다.

정리 (오일러의 방법) 복소수를 계수로 가지는 사차다항식

$$g(x) = x^4 + qx^2 + rx + s$$

에 대하여 다음이 성립한다.

(1) 복소수 u, v, w 를 u^2, v^2, w^2 이 삼차다항식

$$h(x) = x^3 + 2qx^2 + (q^2 - 4s)x - r^2$$

의 근인 동시에 $uvw = -r$ 가 성립하도록 택하면, $x = \frac{1}{2}(u + v + w)$ 는 $g(x)$ 의 근이다.

(2) 삼차다항식 $h(x)$ 의 세 근을 t_1, t_2, t_3 이라고 할 때, u, v, w 를

$$u^2 = t_1,\ v^2 = t_2,\ w^2 = t_3, \quad uvw = -r$$

가 성립하도록 택하면 $g(x)$ 의 네 근은 다음과 같다.

$$u_1 = \frac{1}{2}(u + v + w), \qquad u_2 = \frac{1}{2}(u - v - w),$$
$$u_3 = \frac{1}{2}(-u + v - w), \qquad u_4 = \frac{1}{2}(-u - v + w)$$

(3) 사차방정식 $g(x)$ 의 판별식은 $h(x)$ 의 판별식과 일치한다.

증명 (1) 다항식 $g(x) = x^4 + qx^2 + rx + s$ 에 $x = \frac{1}{2}(u + v + w)$ 를 대입하면

$$(u+v+w)^2\{(u+v+w)^2 + 4q\} + 8r(u+v+w) + 16s = 0$$

이고 이 등식을 정리하면 다음을 얻는다.

$$\{(u^2+v^2+w^2)+2(uv+vw+wu)\}\{(u^2+v^2+w^2)+2(uv+vw+wu)+4q\}$$
$$+8r(u+v+w)+16s=0$$

$$(u^2+v^2+w^2)^2+4(u^2+v^2+w^2)(uv+vw+wu)+4(uv+vw+wu)^2$$
$$+4q(u^2+v^2+w^2)+8q(uv+vw+wu)+8r(u+v+w)+16s=0,$$

$$(u^2+v^2+w^2)^2+4(u^2+v^2+w^2)(uv+vw+wu)$$
$$+4\{u^2v^2+v^2w^2+w^2u^2+2uvw(u+v+w)\}$$
$$+4q(u^2+v^2+w^2)+8q(uv+vw+wu)+8r(u+v+w)+16s=0,$$

$$(u^2+v^2+w^2)^2+4\{(u^2+v^2+w^2)+2q\}((uv+vw+wu)$$
$$+4(u^2v^2+v^2w^2+w^2u^2)+4q(u^2+v^2+w^2)$$
$$+8(uvw+r)(u+v+w)+16s=0$$

따라서 다음 세 등식이 성립하도록 u, v, w 를 택하면, $x=\frac{1}{2}(u+v+w)$ 는 $g(x)$ 의 근이다.

$$\begin{cases} u^2+v^2+w^2+2q=0, \\ uvw+r=0, \\ u^2+v^2+w^2)^2+4(u^2v^2+v^2w^2+w^2u^2)+4q(u^2+v^2+w^2)+16s=0 \end{cases}$$

한편, 위의 첫째 식에 의하여

$$u^2+v^2+w^2=-2q$$

이고 이것을 셋째 식에 대입하면

$$4q^2+4(u^2v^2+v^2w^2+w^2u^2)-8q^2+16s=0$$

이므로 $u^2v^2+v^2w^2+w^2u^2=q^2+4s$ 이다.

그러므로 위의 세 등식은

$$\begin{cases} u^2+v^2+w^2=-2q, \\ uvw=-r, \\ u^2v^2+u^2w^2\ v^2w^2=q^2-4r \end{cases}$$

와 동치이고 또 $u^2v^2w^2=r^2$ 이다.

이 결과는 u^2, v^2, w^2 가 삼차다항식

$$h(x) = x^3 + 2qx^2 + (q^2 - 4s)x - r^2$$

의 근인 동시에 $uvw = -r$ 임을 뜻하므로 (1) 이 성립한다.

(2) 가정에 의하여

$$\begin{aligned}
&(-t_1)^2 = t_1{}^2,\\
&(-t_2)^2 = t_2{}^2,\\
&(-t_3)^2 = t_3{}^2,\\
&t_1(-t_2)(-t_3) = (-t_1)t_2(-t_3)\\
&\qquad\qquad = (-t_1)(-t_2)t_3 = t_1t_2t_3 = -r
\end{aligned}$$

이므로, 위의 (1) 에 의하여 (2) 가 성립함을 알 수 있다.

(3) 다항식 $g(x)$ 의 네 근

$$u_1 = \frac{1}{2}(u+v+w), \qquad u_2 = \frac{1}{2}(u-v-w),$$
$$u_3 = \frac{1}{2}(-u+v-w), \qquad u_4 = \frac{1}{2}(-u-v+w)$$

에 대하여

$$u_1 - u_2 = v + w, \quad u_1 - u_3 = u + w, \quad u_1 - u_4 = u + v,$$
$$u_2 - u_3 = u - v, \quad u_2 - u_4 = u - w, \quad u_3 - u_4 = v - w$$

이므로 $g(x)$ 의 판별식 D 는 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
D &= \{(u_1-u_2)(u_1-u_3)(u_1-u_4)(u_2-u_3)(u_2-u_4)(u_3-u_4)\}^2\\
&= \{(u^2-v^2)(u^2-w^2)(v^2-w^2)\}^2\\
&= \{(t_1-t_2)(t_1-t_3)(t_2-t_3)\}^2
\end{aligned}$$

따라서 D 는

$$h(x) = x^3 + 2qx^2 + (q^2 - 4s)x - r^2$$

의 판별식과 일치한다.

실제로, 정리 4.6.4 에 의하여 D 는 다음과 같다.

$$
\begin{aligned}
D = & -27(-r^2)^2 - 4(2q)^3(-r^2) - 4(q^2-4s)^3 \\
& \quad + (2q)^2(q^2-4s)^2 + 18(2q)(q^2-4s)(-r^2) \\
= & -27r^4 + 32q^3r^2 - 4q^6 + 256s^3 + 48q^4s - 192q^2s^2 \\
& \quad + 4q^6 + 64q^2s^2 - 32q^4s - 36q^3r^2 + 144qr^2s \\
= & -27r^4 - 4q^3r^2 + 256s^3 + 16q^4s - 128q^2s^2 + 144qr^2s \\
= & \ 16q^4s - 4q^3r^2 - 128q^2s^2 + 144qr^2s - 27r^4 + 256s^3
\end{aligned}
$$

보기 1 사차다항식 $g(x) = x^4 + 3x^2 - 6x + 10$ 의 근을 구해 보자.
먼저 $q = 3$, $r = -6$, $r = 10$ 이라 하고

$$h(x) = x^3 + 2qx^2 + (q^2 - 4s)x - r^2$$

이라고 놓으면

$$h(x) = x^3 + 6x^2 - 31x - 36$$

-1	1	6	-31	-36
		-1	-5	36
4	1	5	-36	0
		4	36	
	1	9	0	

이고

$$h(x) = (x+1)(x-4)(x+9)$$

이므로 $h(x)$ 의 세 근은 -1, 4, -9 이다.
이제

$$u^2 = 4,\ v^2 = -1\ ,\ v^2 = 9, \quad uvw = -r = 6$$

을 만족시키는 u, v, v 로서

$$u = i, \quad v = 2, \quad w = -3i$$

를 택할 수 있고, 이로부터 다음과 같은 $g(x)$ 의 네 근을 얻는다.

$$u_1 = \frac{1}{2}(u + v + w) = \frac{1}{2}(2 - 2i) = 1 - i,$$

$$u_2 = \frac{1}{2}(u - v - w) = \frac{1}{2}(-2 + 4i) = -1 + 2i,$$

$$u_3 = \frac{1}{2}(-u + v - w) = \frac{1}{2}(2 + i) = 1 + i,$$

$$u_4 = \frac{1}{2}(-u - v + w) = \frac{1}{2}(-2 - 4i) = -1 - 2i$$

보기 2 사차다항식 $g(x) = x^4 - 2x^2 + 8x - 3$ 의 근을 구해 보자.
다항식 $g(x)$ 에서 $q = -2,\ r = 8,\ s = -3$ 이라고 놓으면,

$$\begin{aligned} h(x) &= x^3 + 2qx^2 + (q^2 - 4s)x - r^2 \\ &= x^3 - 4x^2 + 16x - 64 \\ &= (x-4)(x^2+16) \end{aligned}$$

4	1	-4	16	-64
		4	0	64
	1	0	16	0

이고 따라서 이 다항식의 세 근은 다음과 같다.

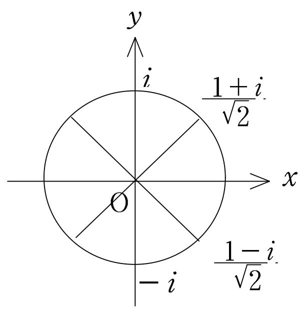
$$t_1 = 4,\quad t_2 = 4i,\quad t_3 = -4i$$

이제

$$u^2 = 4,\quad v^2 = 4i\ ,\quad w^2 = -4i,\quad uvw = -r = -8$$

을 만족시키는 $u,\ v,\ w$ 로서

$$u = -2,$$
$$v = \sqrt{2}\,(1+i),$$
$$w = \sqrt{2}\,(1-i)$$



를 택하면, 다항식 $g(x)$ 의 네 근은 다음과 같다.

$$u_1 = \frac{1}{2}(u+v+w) = -1+\sqrt{2},$$
$$u_2 = \frac{1}{2}(u-v-w) = -1-\sqrt{2},$$
$$u_3 = \frac{1}{2}(-u+v-w) = 1+\sqrt{2}\,i,$$
$$u_4 = \frac{1}{2}(-u-v+w) = 1-\sqrt{2}\,i$$

$x^2 = i$ 의 근과

$x^2 = -i$ 의 근

§4.6.2 특수한 다항식의 근

실수체 $\mathbb{R}$ 위의 n차의 다항식

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_x + a_0, \quad a_n \neq 0,\, a_0 \neq 0$$

에서 $a_0 \neq 0$ 이므로 $x = 0$ 은 이 다항식의 근이 아니다. 여기서는

$$f^*(x) = f(x) \;\; 즉 \;\; a_n = a_0,\, a_{n-1} = a_1,\, \cdots$$

인 경우와

$$f^*(x) = -f(x) \;\; 즉 \;\; a_n = -a_0,\, a_{n-1} = -a_1,\, \cdots$$

인 경우에 복소수체 $\mathbb{C}$ 안에서 다항식 $f(x)$ 의 근을 구하는 방법을 소개한다.

(1) $f^*(x) = f(x)$ 즉 $a_n = a_0,\, a_{n-1} = a_1,\, \cdots$ 인 경우

(1-1) n 이 짝수인 경우

이 경우에 $n = 2m$ 이라고 하면,

$$f(x) = a_{2m}x^{2m} + a_{2m-1}x^{2m-1} + \cdots + a_m x^m + \cdots + a_1 x + a_0$$

이고 방정식 $f(x) = 0$ 즉

$$a_{2m}x^{2m} + a_{2m-1}x^{2m-1} + \cdots + a_m x^m + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$$

의 양변을 x^m 으로 나누면 이 방정식은 다음과 같이 변형된다.

$$a_{2m}(x^m + \frac{1}{x^m}) + a_{2m-1}(x^{m-1} + \frac{1}{x^{m-1}})$$
$$+ \cdots + a_{m+1}(x + \frac{1}{x}) + a_m = 0$$

이제 $X = x + \dfrac{1}{x}$ 로 놓아

$$x^2 + \frac{1}{x^2},\; x^3 + \frac{1}{x^3},\; \cdots,\; x^m + \frac{1}{x^m}$$

를 X 에 관한 식으로 나타내어 위의 방정식에 대입하면 X 에 관한 방정식을 얻고 이 방정식의 근을 구하여 다항식 $f(x)$ 의 근을 얻는다.

(1-2) n 이 홀수인 경우

이 경우에 $f(-1)=0$ 이므로 $x=-1$ 은 다항식 $f(x)$ 의 근이다.

그리고, $n=2m+1$ 이라고 하면, 다항식 $f(x)$ 는

$$f(x)=(x+1)(b_{2m}x^{2m}+b_{2m-1}x^{2m-1}+\cdots+b_1x+b_0)$$

의 꼴로 변형되고 또 방정식

$$b_{2m}x^{2m}+b_{2m-1}x^{2m-1}+\cdots+b_1x+b_0=0$$

의 근은 (1-1) 에서와 마찬가지 방법으로 구할 수 있다.

이로부터 다항식 $f(x)$ 의 근 전체를 얻는다.

(2) $f^*(x)=-f(x)$ 즉 $a_n=-a_0,\ a_{n-1}=-a_1,\ \cdots$ 인 경우

(2-1) n 이 짝수인 경우

이 경우에 $f(1)=f(-1)=0$ 이므로 $x=1, x=-1$ 은 다항식 $f(x)$ 의 근이다. 그리고, $n=2m$ 이라고 하면, 다항식 $f(x)$ 는

$$f(x)=(x^2-1)(b_{2m}x^{2m}+b_{2m-1}x^{2m-1}+\cdots+b_1x+b_0)$$

의 꼴로 변형되고 또 방정식

$$b_{2m}x^{2m}+b_{2m-1}x^{2m-1}+\cdots+b_1x+b_0=0$$

의 근은 (1-1) 에서와 마찬가지 방법으로 구할 수 있다.

이로부터 다항식 $f(x)$ 의 근 전체를 얻는다.

(2-2) n 이 홀수인 경우

이 경우에 $f(1)=0$ 이므로 $x=1$ 은 다항식 $f(x)$ 의 근이다. 그리고, $n=2m+1$ 이라고 하면, 다항식 $f(x)$ 는

$$f(x)=(x-1)(b_{2m}x^{2m}+b_{2m-1}x^{2m-1}+\cdots+b_1x+b_0)$$

의 꼴로 변형되고 또 방정식

$$b_{2m}x^{2m}+b_{2m-1}x^{2m-1}+\cdots+b_1x+b_0=0$$

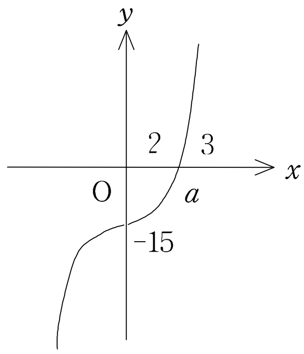
의 근은 (1-1) 에서와 마찬가지 방법으로 구할 수 있다.

이로부터 다항식 $f(x)$ 의 근 전체를 얻는다.

§4.6.3 실근의 근사값을 구하는 방법

체 F 위의 n차의 다항식 $f(x)$와 원소 $k \in F,\ k \neq 0\ k \in F$에 대하여 $g(x) = k^n f(k^{-1}x)$이라고 할 때, $f(x)$가 F의 적당한 확대체 K안에서 중복을 허락하여 n개의 근 $u_1, \cdots, u_n$을 가진다면 $g(x)$는 K 안에서 중복을 허락하여 n개의 근 $ku_1, \cdots, ku_n$을 가진다(문제 4.6.8).

이 결과를 이용하여 다항식의 실근의 근사값을 구하는 방법에 대하여 생각해 보자.



예를 들어, 다항식 $f(x) = x^3 - 15$에 대하여 $a = \sqrt[3]{15}$는 $f(x)$의 실근이고

$$f(2) = 8 - 15 = -7 < 0,$$
$$f(3) = 27 - 15 = 8 > 0$$

이므로 $2 < a < 3$이다.

이제 a를

$$a = 2.a_1 a_2 a_3 \cdots \quad (0 \leq a_i \leq 9)$$

으로 나타내면,

2	1	0	0	-15
		2	4	8
	1	2	4	-7
		2	8	
	1	4	12	
		2		
	1	6		

$$b = a - 2 = 0.a_1 a_2 a_3 \cdots$$

는 다항식 $g(x) = f(x+2)$의 근이고 $g(x)$는 다음과 같다.

$$g(x) = x^3 + 6x^2 + 12x - 7$$

다음에 $c = 10b = a_1, a_2 a_3 \cdots$ 는

앞의 결과에 의하여 $h(x) = 10^3 g(\frac{x}{10})$의 근이고 $h(x)$는 다음과 같다

$$h(x) = x^3 + 6 \cdot 10x^2 + 12 \cdot 100x - 7 \cdot 1000$$

그런데,

$$h(4) < 0, \quad h(5) > 0$$

이므로 $4 < c < 5$이고 따라서 $a_1 = 4$이다.

위의 과정을 되풀이하면 다음을 얻는다.

$$d = c - 4 = 0.\,a_2 a_3 \cdots$$

$$g_1(x) = h(x+4) = x^3 + 72x^2 + 1728x - 1976$$

$$e = 10\,d = a_2 . a_3 \cdots$$

$$\begin{array}{r|rrrr}
4 & 1 & 60 & 1200 & -7000 \\
 & & 4 & 256 & 5824 \\
\hline
 & 1 & 64 & 1456 & \boxed{-1176} \\
 & & 4 & 272 & \\
\hline
 & 1 & 68 & \boxed{1728} & \\
 & & 4 & & \\
\hline
 & 1 & \boxed{72} & &
\end{array}$$

$$h_1(x) = 10^3 g_1(x) = x^3 + 720x^2 + 172800x - 1176000$$

그런데, $h_1(6) < 0$, $h_1(7) > 0$ 이므로 $6 < c < 7$ 이고 따라서 $a_2 = 6$ 이다.

그러므로 $a = 2.46\cdots$ 이다.

이와 같이 조립제법을 이용하여 n 차 방정식의 실근의 근사값을 구하는 방법을 **호너**(Hornor, George William) **의 方法**이라고 한다.

보기 1 다항식 $f(x) = x^3 + x^2 - x - 12$ 에 대하여

$$f(2) = 8 + 4 - 2 - 12 = -2 < 0,$$
$$f(3) = 27 + 9 - 3 - 12 = 11 > 0$$

이므로 2와 3 사이에 $f(x)$ 의 한 실근이 존재한다. 이와 같은 실근을 $a = 2.\,a_1 a_2 \cdots$ 이라고 하면,

$$b = a - 2 = 0.\,a_1 a_2 \cdots$$

는 $g(x) = f(x+2)$ 의 근이고 또 $g(x)$ 는 다음과 같다.

$$g(x) = x^3 + 7x^2 + 15x - 2$$

$$\begin{array}{r|rrrr}
2 & 1 & 1 & -1 & -12 \\
 & & 2 & 6 & 10 \\
\hline
 & 1 & 3 & 5 & \boxed{-2} \\
 & & 2 & 10 & \\
\hline
 & 1 & 5 & \boxed{15} & \\
 & & 2 & & \\
\hline
 & 1 & \boxed{7} & &
\end{array}$$

다음에 $c = 10\,b = a_1 . a_2 \cdots$ 는 다항식

$$h(x) = 10^3\, g\left(\frac{x}{10}\right)$$

의 근이고 또 $h(x)$ 는 다음과 같다.

$$h(x) = x^3 + 70x^2 + 1500x - 2000$$

한편, $h(1) < 0$, $h(2) > 0$ 이므로 $1 < c < 2$ 이고 따라서 $a_1 = 1$ 이다.

위의 과정을 되풀이하면 다음이 성립한다.

$$d = c - 1 = 0.a_2 a_3 \cdots$$

$$g_1(x) = h(x+1)$$

$$= x^3 + 73x^2 + 1643x - 429$$

$$e = 10d = a_2.a_3 \cdots$$

$$h_1(x) = 10^3 g_1\left(\frac{x}{10}\right)$$

$$= x^3 + 730x^2 + 164300x - 429000$$

1	1	70	1500	-2000
		1	71	1571
	1	71	1571	-429
		1	72	
	1	72	1643	
		1		
	1	73		

그런데, $h_1(2) < 0$, $h_1(3) > 0$ 이므로 $2 < e < 3$ 이고 따라서

$2 = a_2$ 이다.

그러므로 $a = 2.12\cdots$ 이다.