제 3 장 보충문제

보충문제 (3.1)

1. 다음 명제 중에서 참인 명제를 찾아라.

 (1) 집합 R 가 환을 이룰 때, R 는 덧셈에 관하여 Abel 군을 이룬다.

 (2) 환 R 가 덧셈 $+$ 와 곱셈 $\cdot$ 에 관하여 단위원을 가진 환일 때, R 의 단위원은 적어도 두 개 존재한다.

 (3) 체는 모두 가환환이다.

 (4) 정역은 체이기도 하다.

 (5) 나눗셈환은 정역이다.

2. 실수 전체의 집합 $\mathbb{R}$ 위에 덧셈 $\oplus$ 과 곱셈 $*$ 를 다음과 같이 정의하자.

$$a \oplus b = a + b + 1, \quad a * b = a + b + ab$$

 두 실수 a, b 에 대하여 등식

$$(1+a) + (1+b) = 1 + (a+b+1),$$

$$(1+a)(1+b) = 1 + (a+b+ab)$$

 가 성립함을 이용하여 실수 전체의 집합 $\mathbb{R}$ 가 이와 같이 정의된 덧셈 $\oplus$ 과 곱셈 $*$ 에 관하여 체를 이룸을 증명하여라.

3. 구간 I ($I \subseteq \mathbb{R}$) 위에서 정의된 실가(實價)함수 $f : I \to \mathbb{R}$ 전체로 이루어진 집합을 $F(I)$ 로 나타내고, 또 임의의 $f, g \in F(I)$ 에 대하여여 $f+g$ 와 $f \cdot g$ 를 다음과 같이 정의된 함수라고 하자.

$$f+g : I \to \mathbb{R}, \ (f+g)(x) = f(x) + g(x)$$

$$f \cdot g : I \to \mathbb{R}, \ (f \cdot g)(x) = f(x)\, g(x)$$

 이 때, 집합 $F(I)$ 는 이와 같이 정의된 덧셈과 곱셈에 관하여 단위원을 가진 가환환을 이룸을 밝혀라.

4. 가환환 $C(I)$ 에서 연속함수 $f \in C(I)$ 대한 다음 명제 중에서 참인 명제를 찾아라.

(1) $C(I)$ 는 가환환이다.

(2) $C(I)$ 는 정역이다.

(3) $C(I)$ 는 체이다.

(4) $f \cdot f = 0$ 이면, $f = 0$ 이다.

(5) f 의 곱셈에 관한 역원이 존재하면, 모든 $x \in I$ 에 대하여 $f(x) \neq 0$ 이다.

(6) 모든 $x \in I$ 에 대하여 $f(x) \neq 0$ 이면, f 의 곱셈에 관한 역원이 존재한다.

5. 다음 명제 중에서 참인 명제를 찾아라.

(1) 가환환 $\mathbb{Z}^2 = \{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$ 는 정역이다.

(2) 가환환 $\mathbb{R}^2 = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$ 는 정역이다.

(3) 가환환 $\mathbb{Z}^2 = \{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$ 에서 $(0,0)$ 을 제외한 원소는 모두 단원이거나 또는 영인자이다.

(4) 가환환 $\mathbb{R}^2 = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$ 에서 $(0,0)$ 을 제외한 원소는 모두 단원이거나 또는 영인자이다.

(5) 실수체 $\mathbb{R}$ 위의 전행렬환 $\mathrm{Mat}_2(\mathbb{R})$ 에서 영행렬 O 를 제외한 행렬은 모두 단원이거나 영인자이다.

6. 실수체 $\mathbb{R}$ 위의 전행렬환 $\mathrm{Mat}_2(\mathbb{R})$ 에서 두 행렬 $A, B \in \mathrm{Mat}_2(\mathbb{R})$ 에 대하여 다음이 성립하는지 판정하여라.

(1) $AB = BA \Leftrightarrow (A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$.

(2) $AB = BA \Leftrightarrow (A+B)(A-B) = A^2 - B^2$

(3) $A = O$ 또는 $B = O$ 이면, $AB = O$ 이다.

(4) $AB = O$ 이면, $A = O$ 또는 $B = O$ 이다.

(5) $A^2 = O$ 이면, $A = O$ 이다.

(6) $A^2 = I$ 이면, $A = I$ 또는 $A = -I$ 이다.

7. 환 R 에서 원소 $a \in R$, $a \neq 0$ 가 영인자가 아닐 때, 임의의 원소 $b, c \in R$ 에 대하여 다음이 성립함을 밝혀라.

(1) $ab = 0$ 이면, $b = 0$ 이다.

그리고, $ab = ac$ 이면, $b = c$ 이다.

(2) $ba = 0$ 이면, $b = 0$ 이다.

그리고, $ba = ca$ 이면, $b = c$ 이다.

8. 환 R 에 영인자가 존재하지 않을 때, 원소 $x, y \in R$ 에 대하여

$$x^m = y^m, \qquad x^n = y^n$$

인 서로 소인 양의 정수 m, n 이 존재하면 $x = y$ 임을 밝혀라.

9. 집합 R 위에 덧셈 $+$ 와 곱셈 $\cdot$ 가 정의되어 있고 또 다음이 성립한다고 하자.

(i) R 는 덧셈 $+$ 에 관하여 군을 이룬다.

(ii) 원소 $0 \in R$ 를 덧셈군 $(R, +)$ 의 항등원이라고 할 때, $R^* = R - \{0\}$ 는 곱셈 $\cdot$ 에 관하여 군을 이룬다.

(iii) $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c, \qquad (a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$

이 때, R 는 덧셈 $+$ 와 곱셈 $\cdot$ 에 관하여 나눗셈환을 이룸을 밝혀라.

10. 환 $R\ (\neq \{0\})$ 에서 각 원소 $a \in R$, $a \neq 0$ 에 대하여 $a\bar{a}a = a$ 인 원소 $\bar{a} \in R$ 가 단 하나 존재할 때, 다음이 성립함을 밝혀라.

(1) 환 R 에는 영인자가 존재하지 않는다.

(2) 각 원소 $a \in R$, $a \neq 0$ 와 원소 $b, c \in R$ 에 대하여 $ab = ac$ 이면 $b = c$ 이고, 또 $ba = ca$ 이면 $b = c$ 이다.

(3) 각 원소 $a \in R$, $a \neq 0$ 에 대하여 $\bar{a}a\bar{a} = a$ 이다.

(4) 환 R 는 단위원 1 을 가진 환이다.

실제로, 임의의 원소 $a \in R$, $a \neq 0$ 에 대하여 $a\bar{a} = \bar{a}a = 1$ 이다.

(5) R 는 나눗셈환이다.

보충문제 (3.2)

1. 이차체 $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$ 의 원소 $\xi = 1+4\sqrt{3}$, $\eta = 5-2\sqrt{3}$ 에 대하여 $\xi+\eta$, $\xi\eta$, ξ^{-1} 를 구하여라.

2. 집합 $\mathbb{Z}[\sqrt{2}\,] = \{a+b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$ 는 다음과 같이 정의된 덧셈과 곱셈에 관하여 환을 이룬다.

$$(a+b\sqrt{2}\,)+(c+d\sqrt{2}\,) = (a+c)+(b+d)\sqrt{2}\,,$$
$$(a+b\sqrt{2}\,)(c+d\sqrt{2}\,) = (ac+2bd)+(ad+bc)\sqrt{2}$$

다음 명제 중에서 참인 명제를 찾아라.

(1) 환 $\mathbb{Z}[\sqrt{2}\,]$ 는 단위원을 가진 가환환이다.

(2) 환 $\mathbb{Z}[\sqrt{2}\,]$ 는 정역이다.

(3) 환 $\mathbb{Z}[\sqrt{2}\,]$ 는 체이다.

3. 정수 $n\ (\geq 2)$ 에 대하여 $n\mathbb{Z} = \{nx \mid x \in \mathbb{Z}\}$ 는 흔히 사용하는 덧셈과 곱셈 에 관하여 환을 이룬다. 다음 명제 중에서 참인 명제를 찾아라.

(1) 환 $n\mathbb{Z}$ 는 가환환이다.

(2) 환 $n\mathbb{Z}$ 는 단위원을 가진 가환환이다.

(3) 환 $n\mathbb{Z}$ 는 정역이다.

4. 다음 집합 중에서 가환환 $\mathbb{R}^2 = \{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$ 의 부분환인 것을 찾아라.

(1) $S = \{(a, a) \mid a \in \mathbb{R}\}$ (2) $S = \{(a, 0) \mid a \in \mathbb{R}\}$

(3) $S = \{(0, b) \mid b \in \mathbb{R}\}$ (4) $S = \{(2a+1, 3b) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$

5. 다음 집합 중에서 가환환 $\mathbb{Z}^2 = \{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$ 의 부분환인 것을 찾아라.

(1) $S = \{k(3,3) \mid k \in \mathbb{Z}\}$ (2) $S = \{(a, 0) \mid a \in \mathbb{Z}\}$

(3) $S = \{(0, b) \mid b \in \mathbb{Z}\}$ (4) $S = \{(2a, 3b) \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$

6. 다음 집합은 전행렬환 $\mathrm{Mat}_2(\mathbb{R})$ 의 부분환을 이룸을 밝혀라.

(1) $R = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \mid a, b, c, d \in \mathbb{Z} \right\}$

(2) $S = \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 \\ b & c \end{bmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$

7. 환과 체에 대하여 다음 명제가 참인지를 판정하여라.

(1) 환 R 에서 S 가 환 R 의 부분환이고 또 T 가 S 의 부분환이면, T 는 환 R 의 부분환이다.

(2) 체 K 에서 F 가 체 K 의 부분체이고 또 E 가 F 의 부분체이면, E 는 체 K 의 부분체이다.

(3) 체의 부분환은 모두 부분체이다.

8. 환 R 에서 한 원소 $a \in R$ 에 대하여

$$L_a = \{ x \in R \mid ax = 0 \}, \quad R_a = \{ x \in R \mid xa = 0 \}$$

는 환 R 의 부분환을 이룸을 밝혀라.

9. 실가(實價)함수 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 전체로 이루어진 가환환 $F(\mathbb{R})$ 에 대하여 다음이 성립함을 밝혀라(보충문제 3.1.3 참조).

(1) 임의의 한 실수 $c \in \mathbb{R}$ 에 대하여

$$M_c = \{ f \in F(\mathbb{R}) \mid f(c) = 0 \}$$

이라고 하면, M_c 는 가환환 $F(\mathbb{R})$ 의 부분환을 이룬다.

(2) 연속함수 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 전체로 이루어진 집합 $C(\mathbb{R})$ 는 가환환 $F(\mathbb{R})$ 의 부분환을 이룬다.

(3) 미분가능한 함수 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 전체로 이루어진 집합 $D(\mathbb{R})$ 는 가환환 $F(\mathbb{R})$ 의 부분환을 이룬다.

보충문제 (3.3)

1. 가환환 $\mathbb{Z}_{26} = \{0, 1, 2, \cdots, 25\}$ 에서 다음을 구하여라.

   (1) $23 + 15$ (2) $15 - 23$ (3) 17^{-1}

2. 가환환 $\mathbb{Z}_9 = \{0, 1, 2, 3, \cdots, 8\}$ 에서 등식 $a^2 - 3a + 2 = 0$ 을 만족시키는 원소 $a \in \mathbb{Z}_{12}$ 를 모두 구하여라.

3. 체 $\mathbb{Z}_{17} = \{0, 1, 2, 3, \cdots, 16\}$ 에서 등식 $a^2 - 3a + 2 = 0$ 을 만족시키는 원소 $a \in \mathbb{Z}_{17}$ 를 모두 구하여라.

4. 가환환 $\mathbb{Z}_{26} = \{0, 1, 2, \cdots, 25\}$ 의 부분환을 모두 구하여라.

5. 가환환 ${\mathbb{Z}_2}^3 = \{(a_1, a_2, a_3) \mid a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{Z}_2\}$ 에서 다음을 구하여라.

   (1) $(1, 0, 1, 0) + (0, 1, 1, 0)$ (2) $(1, 0, 1, 0) \cdot (0, 1, 1, 0)$
   (3) $(1, 0, 1, 0) + (1, 1, 1, 1)$ (4) $(1, 0, 1, 0) \cdot (1, 1, 1, 1)$

6. 집합 $U = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ 의 세 부분집합

   $$A = \{1, 2, 3\}, \quad B = \{2, 3, 5\}, \quad C = \{4, 5\}$$

   에 대하여 $A \oplus B$, $A \oplus C$, $A \oplus A$ 를 구하여라.

7. 환 R 가 나눗셈환일 때, R 의 멱등원은 0 과 1 뿐임을 밝혀라.

8. 가환환 $\mathbb{Z}_{72} = \{0, 1, 2, 3, \cdots, 71\}$ 의 멱등원을 모두 구하여라.

9. 가환환 $\mathbb{Z}_n = \{0, 1, 2, \cdots, n-1\}$ 에서 $n = 2m \geq 2$ 일 때, $S = \{0, m\}$ 에 대하여 다음이 성립함을 증명하여라.

   (1) m 이 짝수이면, S 는 $\mathbb{Z}_n$ 의 부분환이고 또 $mm = 0$ 이다.
   (2) m 이 홀수이면, S 는 $\mathbb{Z}_n$ 의 부분환이고 체 $\mathbb{Z}_2 = \{0, 1\}$ 과 동형이다.

보충문제 (3.4)

1. 다항식환 $\mathbb{Z}_2[x]$ 에서 다음 다항식을 간단히 하여라.

(1) $(x+1)^4$ (2) $(x^3+x+1)(x^2+1)$

(3) $(x^3+x+1)^2$ (4) $(x+1)(x^4+x^3+x^2+x+1)$

2. 다항식환 $\mathbb{Z}_3[x]$ 에서 다음 다항식을 간단히 하여라.

(1) $(2x^2+2x+1)+(x+2)$ (2) $(2x^2+x+1)+(x^2+x+2)$

(3) $(2x^2+x+1)(2x+1)$ (4) $(2x+1)^3$

3. 다항식환 $\mathbb{Z}_5[x]$ 에서 다음 다항식을 간단히 하여라.

(1) $(2x^2+2x+1)+(3x^2+4x)$ (2) $(x^2+x+2)+(4x+3)$

(3) $(3x^2+2x+1)(2x+1)$ (4) $(2x^2+x+1)(3x+1)$

4. 다항식환 $\mathbb{Z}_6[x]$ 에서 다음 다항식을 간단히 하여라.

(1) $(2x^2+3x+1)+(3x+3)$ (2) $(2x^2+4)(3x^2+1)$

5. 다항식환 $\mathbb{Z}_8[x]$ 에서 다음 다항식을 간단히 하여라.

(1) $(2x^2+5x+3)+(3x+6)$ (2) $(2x^2+4)(4x^2+1)$

6. 다항식환 $\mathbb{Q}[x, y]$ 에서 다항식

$$f(x, y) = 5x^4y^3 - 2x^3y^2 + 3y^2 + x^4 + 2x^2y - x^2 + 1$$

를 $(\mathbb{Q}[y])[x]$, $(\mathbb{Q}[x])[y]$ 에 속하는 다항식의 꼴로 나타내어라.

7. 정수환 $\mathbb{Z}$ 위에서 다항식 $f(x) = 3x^4 - 5x^3 + 3x - 2$ 를 $g(x) = x - 2$ 로 나누었을 때의 몫과 나머지를 구하여라.

8. 체 $\mathbb{Z}_5$ 위에서 다항식 $f(x) = 3x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 2x + 1$ 를 일차다항식 $g(x) = x+3$ 로 나누었을 때의 몫과 나머지를 구하여라.

9 체 F 위에서 다음을 형식적 멱급수로 나타내어라(여기서, r 는 양의 정수).

(1) $\dfrac{1}{1+x}$ (2) $\dfrac{1}{1+x^r}$

10. 실수체 $\mathbb{R}$ 위에서 다음을 형식적 무한급수로 나타내어라.

(1) $\dfrac{1}{(1-x)^2}$ (2) $\dfrac{1}{(1-ax)^2}$

(3) $\dfrac{x}{(1-x)^2}$ (4) $\dfrac{ax}{(1-ax)^2}$

11. 체 $\mathbb{Z}_2 = \{0, 1\}$ 위의 형식적 멱급수

$$A(x) = \sum_{i=0}^{\infty} x^{2i} = 1 + x^2 + x^4 + x^6 + \cdots$$

$$B(x) = \sum_{i=0}^{\infty} x^{2i+1} = x + x^3 + x^5 + x^7 + \cdots$$

에 대하여 다음을 구하여라.

(1) $A(x) + B(x)$, $A(x) - B(x)$

(2) $A(x)^2$, $A(x)B(x)$

12. 체 $\mathbb{Z}_2 = \{0, 1\}$ 위의 두 무한수열

$$\{a_n\} : 1, 1, 0, 1, 1, 0, 1, 1, 0, 1, 1, 0, 1, \cdots$$

$$\{b_n\} : 1, 1, 1, 0, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 1, 1, 1, \cdots$$

에 대하여 다음 물음에 답하여라.

(1) $\{a_n\} + \{b_n\}$ 과 $\{a_n\} \cdot \{b_n\}$ 를 구하여라.

(2) $\{a_n\}$ 의 생성멱급수 $G(x)$ 와 $\{b_n\}$ 의 생성멱급수 $H(x)$ 를 구하여라.

(3) $\{a_n\} + \{b_n\}$ 과 $\{a_n\} \cdot \{b_n\}$ 의 생성멱급수를 구하여라.

13. 체 $\mathbb{Z}_2 = \{0, 1\}$ 위의 무한수열 $\{a_n\}$ 의 생성멱급수 $G(x)$ 가 다음과 같을 때, 이 무한수열을 구하여라.

(1) $G(x) = \dfrac{1+x^2}{1+x+x^3+x^4}$ (2) $G(x) = \dfrac{x^3}{1+x+x^2+x^4}$

보충문제 (3.5)

1. 다음 사상이 환 준동형사상이 아님을 확인하여라.

(1) $f: \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z},\ f(x) = 2x$ (2) $f: \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z},\ f(x) = x^2$

2. 환 R가 단위원 1을 가진 환일 때, 환 R에서 환 R' $(\neq \{0'\})$으로의 준동형사상 $f: R \rightarrow R'$에 대하여 다음이 성립함을 밝혀라.

(1) $f(1) = 0'$이면, $\operatorname{im} f = \{0'\}$이다.

(2) $f(1) \neq 0'$이면, $f(1)$는 $\operatorname{im} f$의 단위원이다.

(3) f가 위로의 (onto) 사상이면, $f(1)$은 R'의 단위원이다.

3. 사상 $f: F \rightarrow R$가 체 F에서 환 R로의 환 준동형사상일 때, 다음 중에서 단 하나만이 성립함을 증명하여라.

(1) $\operatorname{im} f = \{0\}$

(2) f는 일대일 사상이고 따라서 $F \cong \operatorname{im} f$이다.

4. 가환환 $\mathbb{Z}$, $2\mathbb{Z}$, $3\mathbb{Z}$에 대하여 다음이 성립함을 밝혀라.

(1) $\mathbb{Z}$와 $2\mathbb{Z}$는 환으로서 동형이 아니다.

(2) $2\mathbb{Z}$와 $3\mathbb{Z}$는 환으로서 동형이 아니다.

5. 정수환 $\mathbb{Z}$에서 가환환 $\mathbb{Z}^2$으로의 사상

$$f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}^2,\ f(n) = (n, 0)$$

는 환 준동형사상인 동시에 일대일 사상이지만 $f(1)$은 $\mathbb{Z}^2$의 단위원이 아님을 밝혀라.

6. 실수체 $\mathbb{R}$에서 전행렬환 $\mathrm{Mat}_2(\mathbb{R})$ 으로의 사상

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathrm{Mat}_2(\mathbb{R}),\quad f(a) = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

는 환 준동형사상인 동시에 일대일 사상이지만, $f(1)$은 $\mathrm{Mat}_2(\mathbb{R})$의 단위원이 아님을 밝혀라.

7. 가환환 $\mathbb{Z}_{72}$ 에서 $\mathbb{Z}_{72}$ 으로의 환 준동형사상과 환 동형사상을 결정하여라.

8. 사상 $f : F \longrightarrow R$ 가 체 F 에서 환 R 로의 환 준동형사상일 때, 다음이 성립함을 밝혀라.
  (1) 적당한 원소 $a \in F$, $a \neq 0$ 에 대하여 $f(a) = 0$ 이면, 모든 원소 $x \in F$ 에 대하여 $f(x) = 0$ 이다.
   특히, $f(1) = 0$ 이면, 모든 원소 $x \in F$ 에 대하여 $f(x) = 0$ 이다.
  (2) 적당한 원소 $a \in F$ 에 대하여 $f(a) \neq 0$ 이면, f 는 일대일 사상이다.
   특히, $f(1) \neq 0$ 이면, f 는 일대일 사상이다.

9. 사상 $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ 가 실수체 $\mathbb{R}$ 에서 $\mathbb{R}$ 로의 환 준동형사상일 때, 다음 중에서 단 하나가 성립함을 밝혀라.
  (1) 모든 $x \in \mathbb{R}$ 에 대하여 $f(x) = 0$ 이다.
  (2) 모든 $x \in \mathbb{R}$ 에 대하여 $f(x) = x$ 이다.

10. 실수체 $\mathbb{R}$ 와 복소수체 $\mathbb{C}$ 에 대하여 환 동형사상 $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ 는 존재하지 않음을 증명하여라.

11. 집합 R 가 덧셈 $+$ 와 곱셈 $\cdot$ 에 관하여 단위원 1 을 가진 환일 때, 집합 R 위에 새로운 덧셈 $\oplus$ 와 곱셈 $\circ$ 을 다음과 같이 정의하자.

$$a \oplus b = a + b - 1, \qquad a \circ b = a + b - ab$$

 이 때, 다음이 성립함을 증명하여라.
  (1) $(R, \oplus, \circ)$ 는 영원 1 과 단위원 0 을 가진 환임을 증명하여라.
  (2) 환 $(R, +, \cdot)$ 가 가환환이면, $(R, \oplus, \circ)$ 도 가환환이다.
  (3) 사상

$$\phi : (R, \oplus, \circ) \longrightarrow (R, +, \cdot), \quad \phi(a) = 1 - a$$

   는 환 동형사상이다.
  (4) 두 환 $(R, +, \cdot)$, $(R, \oplus, \circ)$ 의 단원군을 각각 $U(R)$, $V(R)$ 로 나타내면, $V(R) \cong U(R)$ 이다.
  (5) 환 $(R, +, \cdot)$ 가 나눗셈환이면, $(R, \oplus, \circ)$ 도 나눗셈환이다.
   그리고, 환 $(R, +, \cdot)$ 가 체이면, $(R, \oplus, \circ)$ 도 체이다.

보충문제 (3.6)

1. 다음 정역 또는 체의 분수체를 구하여라.

   (1) $\mathbb{Z}[\sqrt{-1}] = \{a + b\sqrt{-1} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$

   (2) $\mathbb{Z}[\sqrt{2}] = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$

   (3) $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) = \{u + v\sqrt{2} \mid u, v \in \mathbb{Q}\}$

2. 유리수체 $\mathbb{Q}$ 위의 유리식환에서 다음을 간단히 하여라.

   (1) $\dfrac{1}{x-1} + \dfrac{1}{x^2+x+1}$ (2) $\dfrac{x-1}{x+1} + \dfrac{x^2-1}{x^2-x+1}$

3. 다음과 같이 유리수를 계수로 가지는 유리식을 정수를 계수로 가지는 유리식으로 나타내어라.

   (1) $\dfrac{\frac{3}{5}x + \frac{1}{2}}{\frac{2}{5}x^2 + \frac{1}{10}x + 1}$ (2) $\dfrac{\frac{1}{2}x - \frac{1}{8}}{x^2 - \frac{3}{4}x + \frac{3}{8}}$

4. 유리수체 $\mathbb{Q}$ 의 부분환

$$R_2 = \{ \frac{a}{2^n} \mid a \in \mathbb{Z}, n = 0, 1, 2, \cdots \},$$

$$R_4 = \{ \frac{a}{4^n} \mid a \in \mathbb{Z}, n = 0, 1, 2, \cdots \},$$

$$R_6 = \{ \frac{a}{6^n} \mid a \in \mathbb{Z}, n = 0, 1, 2, \cdots \}$$

   에 대하여 다음이 성립함을 밝혀라.

   (1) $\mathbb{Z} \subsetneq R_4 \subsetneq \mathbb{Q}$ 이고, R_4 의 분수체는 $\mathbb{Q}$ 이다.

   (2) $R_4 \cap R_6 = R_2$

보충문제 (3.7)

1. 가환환 $\mathbb{Z}_{12} = \{0, 1, 2, \cdots, 11\}$ 의 이데알을 모두 구하고 또 이들 이데알에 의한 $\mathbb{Z}_{12}$ 의 잉여환을 구하여라.

2. 가환환 $\mathbb{Z}_{36}$ 의 멱영원 전체로 이루어진 이데알을 구하여라.
그리고, 가환환 $\mathbb{Z}_{30}$ 의 멱영원 전체로 이루어진 이데알을 구하여라.

3. 다음 명제 중에서 참인 것을 찾아라.
   (1) 정수환 $\mathbb{Z}$ 는 가환환이지만, $\mathbb{Z}$ 의 적당한 이데알 I 에 의한 잉여환 $\mathbb{Z}/I$ 는 가환환이 아닐 수 있다.
   (2) 정수환 $\mathbb{Z}$ 는 정역이지만, $\mathbb{Z}$ 의 적당한 이데알 I 에 의한 잉여환 $\mathbb{Z}/I$ 는 정역이 아닐 수 있다.
   (3) 정수환 $\mathbb{Z}$ 는 체가 아니지만, $\mathbb{Z}$ 의 적당한 이데알 I 에 의한 잉여환 $\mathbb{Z}/I$ 는 체일 수 있다.

4. 다음 집합 중에서 다항식환 $\mathbb{Z}[x]$ 의 이데알인 것을 찾이라.
   (1) $(x) = \{x\,h(x) \mid h(x) \in \mathbb{Z}[x]\}$
   (2) $\{f(x) \in \mathbb{Z}[x] \mid f(0) = 0\}$
   (3) $\{f(x) \in \mathbb{Z}[x] \mid f(0) = 1\}$
   (4) $\{a_n x^n + \cdots + a_1 x + 2a_0 \mid a_n, \cdots, a_1, a_0 \in \mathbb{Z},\ n = 0, 1, 2, \cdots\}$

5. 환 R 에서 I 가 R 의 이데알일 때, 잉여환 R/I 는 가환환이기 위한 필요충분조건은 모든 $a, b \in R$ 에 대하여 $ab - ba \in I$ 인 것임을 밝혀라.

6. 환 R 의 두 이데알 A, B 에 대하여

$$AB = \{\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \mid a_i \in A,\ b_i \in B,\ n = 1, 2, 3\}$$

이라고 할 때, AB 는 R 의 이데알이고 또 $AB \subseteq (A \cap B)$ 임을 밝혀라.

7. 가환환 R에서 한 원소 $a \in R$에 대하여

$$\mathrm{Ann}_R(a) = \{ r \in R \mid ra = 0 \}$$

이라고 할 때, $\mathrm{Ann}_R(a)$ 는 R의 이데알임을 밝혀라.

이데알 $\mathrm{Ann}_R(a)$ 를 R에서의 a의 **零化 이데알**(annihilator)이라고 한다.

8. 가환환 R에서 R의 두 이데알 A, B에 대하여

$$(A : B) = \{ r \in R \mid \text{모든 } b \in B \text{에 대하여 } rb \in A \}$$

이라고 할 때, $(A : B)$ 는 R의 이데알임을 밝혀라.

9. 환 R에서 R의 부분집합 $S\ (\neq \varnothing)$가 다음 두 조건을 만족시킬 때, S를 R의 **左이데알**(left ideal) 이라고 한다.

(i) $(S, +)$ 는 $(R, +)$ 의 부분군이다. 즉, $a, b \in S \Longrightarrow a - b \in S$

(ii) 임의의 $a \in S,\ r \in R$에 대하여 $ra \in S$이다.

그리고, 환 R의 부분집합 $S\ (\neq \varnothing)$가 다음 두 조건을 만족시킬 때, S **右이데알** (right ideal) 이라고 한다.

(i)' $(S, +)$ 는 $(R, +)$ 의 부분군이다. 즉, $a, b \in S \Longrightarrow a - b \in S$

(ii)' 임의의 $a \in S,\ r \in R$에 대하여 $ar \in S$이다.

다음 명제 중에서 참인 명제를 찾아라.

(1) R의 좌아데알과 우이데알은 R의 부분환이다.

(2) R의 부분집합 $I\ (\neq \varnothing)$가 R의 좌이데알인 동시에 우이데알일 때 그리고 이때에만 I는 R의 이데알이다.

보충문제 (3.8)

1. 사상 $f: F \longrightarrow R$ 가 체 F 에서 환 R 로의 환 준동형사상일 때 다음 중 에서 단 하나가 성립함을 증명하여라.

   (i) $F \cong \operatorname{im} f$ (ii) $\operatorname{im} f = \{0\}$

2. 다음 명제가 참인지를 판정하여라.

   (1) 사상 $f: R \longrightarrow R'$ 가 환 준동형사상이고 $f(R) = R'$ 이면, R 의 모든 이데알 I 에 대하여 $f(I)$ 는 R' 의 이데알이다.

   (2) 사상 $f: R \longrightarrow R'$ 가 환 준동형사상이면, R 의 모든 이데알 I 에 대하여 $f(I)$ 는 R' 의 이데알이다.

3. 가환환 $\mathbb{Z}_8 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ 에 대하여 다음 물음에 답하여라.

   (1) $\mathbb{Z}_8$ 의 이데알을 모두 구하여라.

   (2) $(2) = \{0, 2, 4, 6\}$ 는 가환환 $\mathbb{Z}_4 = \{0, 1, 2, 3\}$ 과 동형이 아님을 밝혀라.

   (3) $(4) = \{0, 4\}$ 는 체 $\mathbb{Z}_2 = \{0, 1\}$ 와 동형이 아님을 밝혀라.

4. 가환환 $\mathbb{Z}_{18} = \{0, 1, 2, 3, \cdots, 17\}$ 의 이데알을 모두 구하여라.

   그리고, $(9) = \{0, 9\}$ 는 체 $\mathbb{Z}_2 = \{0, 1\}$ 와 동형임을 밝혀라.

5. 전행렬환 $\mathrm{Mat}_2(\mathbb{R})$ 에서

$$R = \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 \\ b & c \end{bmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$$

   는 부분환을 이룸을 밝혀라. 그리고, 사상

$$f: R \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f\left(\begin{bmatrix} a & 0 \\ b & c \end{bmatrix} \right) = c$$

   가 환 준동형사상임을 밝히고, 이에 제 1 동형정리를 적용한 결과를 말하여라.

6. 이차체 $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) = \{u + v\sqrt{2} \mid u,\ v \in \mathbb{Q}\}$ 에서 전행렬환 $\mathrm{Mat}_2(\mathbb{R})$ 로의 사상

$$f : \mathbb{Q}(\sqrt{2}) \longrightarrow \mathrm{Mat}_2(\mathbb{R}), \quad f(u + v\sqrt{2}) = \begin{bmatrix} u & 2v \\ v & u \end{bmatrix}$$

는 일대일인 환 준동형사상이고 또 다음이 성립함을 밝혀라.

$$\mathbb{Q}(\sqrt{2}) \cong \left\{ \begin{bmatrix} u & 2v \\ v & u \end{bmatrix} \mid u, v \in \mathbb{Q} \right\}$$

보충문제 (3.9)

1. 두 환 R_1, R_2 에 대한 다음과 같은 명제 중에서 참인 명제를 찾아라.

(1) R_1, R_2 가 가환환이면, $R_1 \oplus R_2$ 는 가환환이다.

(2) R_1, R_2 가 단위원을 가진 환이면 $R_1 \oplus R_2$ 는 단위원을 가진 환이다.

(3) R_1, R_2 가 정역이면, $R_1 \oplus R_2$ 는 정역이다.

(4) R_1, R_2 가 나눗셈환이면, $R_1 \oplus R_2$ 는 나눗셈환이다.

(5) R_1, R_2 가 체이면, $R_1 \oplus R_2$ 는 정역이다.

(6) R_1, R_2 가 체이면, $R_1 \oplus R_2$ 는 체이다.

2. 가환환 $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ 에 대한 다음 명제 중에서 참인 것을 찾아라.

(1) $S = \{(a, a) \mid a \in \mathbb{Z}\}$ 는 $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ 의 이데알이 아니다.

(2) $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ 는 정역이 아니지만, $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ 의 이데알

$$I = \mathbb{Z} \oplus \{0\} = \{(a, 0) \mid a \in \mathbb{Z}\}$$

에 대하여 $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} / I$ 는 정역이다.

(3) $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ 는 체가 아니지만, $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ 의 이데알 $I = 2\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ 에 대하여 $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} / I$ 는 체이다.

3. 다음 가환환의 이데알을 모두 구하여라.

(1) $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_3 = \{(0,0), (0,1), (0,2), (1,0), (1,1), (1,2)\}$

(2) $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_4 = \{(0,0), (0,1), (0,2), (0,3),$
$(1,0), (1,1), (1,2), (1,3)\}$

4. 가환환 $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_3$ 에 대하여 다음이 성립함을 밝혀라.

(1) $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_3$ 의 부분환 중에서 $(1,1)$ 을 포함하는 부분환은 $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_3$ 뿐이다.

(2) $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_3$ 의 부분환 중에는 $\mathbb{Z}_2$ 와 동형인 부분환이 존재한다.

(3) $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_3$ 의 부분환 중에서 $\mathbb{Z}_3$ 와 동형인 부분환이 존재한다.

5. 환 동형사상 $f: \mathbb{Z}_6 \to \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_3$ 를 정의하여라.

6. 다음 물음에 답하여라.

(1) 정수환 $\mathbb{Z}$ 에서 환 R 로의 환 준동형사상을 모두 결정하여라.

(2) 정수환 $\mathbb{Z}$ 에서 가환환 $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ 로의 환 준동형사상을 모두 결정하여라.

7. 가환환 $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} = \{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$ 에 대하여 다음 물음에 답하여라.

(1) 가환환 $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ 에서 환 R 로의 환 준동형사상을 결정하여라.

(2) 가환환 $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ 에서 정수환 $\mathbb{Z}$ 로의 환 준동형사상을 결정하여라.

(3) 가환환 $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ 에서 $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ 로의 환 준동형사상을 결정하여라.

8. 체 F 에 대하여

$$F^n = F \oplus F \oplus \cdots \oplus F = \{(x_1, \cdots, x_n) \mid x_1, x_2, \cdots, x_n \in F\}$$

이라 하고 S 를 F^n 의 공집합이 아닌 부분집합이라고 하자.

이 때, 다항식환 $F[x_1, \cdots, x_n]$ 에 속하는 다항식 $f(x_1, \cdots, x_n)$ 중에서 모든 원소 $(a_1, \cdots, a_n) \in S$ 에 대하여

$$f(a_1, \cdots, a_n) = 0$$

을 만족시키는 다항식 $f(x_1, \cdots x_n)$ 전체의 집합을 I 이라고 할 때, I 는 다항식환 $F[x_1, \cdots, x_n]$ 의 이데알임을 밝혀라.

보충문제 (3.10)

1. 정수환 $\mathbb{Z}$ 에서 다음 중에서 소이데알인 것과 극대이데알인 것을 찾아라.

   (1) $\{0\}$ (2) $2\mathbb{Z}$ (3) $3\mathbb{Z}$ (4) $12\mathbb{Z}$

2. 다음 명제 중에서 참인 것을 찾아라.

   (1) 가환환 $\mathbb{Z}_6 = \{0,1,2,3,4,5\}$ 에서 (4) 는 $\mathbb{Z}_6$ 의 극대이데알이다.

   (2) 가환환 $\mathbb{Z}_6 = \{0,1,2,3,4,5\}$ 에서 (5) 는 $\mathbb{Z}_6$ 의 극대이데알이다.

   (3) 가환환 $\mathbb{Z}_{12} = \{0,1,2,\cdots,11\}$ 에서 (4) 는 $\mathbb{Z}_{12}$ 의 극대이데알이다.

   (4) 가환환 $\mathbb{Z}_{12} = \{0,1,2,\cdots,11\}$ 에서 (5) 는 $\mathbb{Z}_{12}$ 의 극대이데알이다.

3. 다음 가환환의 소이데알과 극대이데알을 모두 구하여라.

   (1) $\mathbb{Z}_7 = \{0,1,2,3,4,5,6\}$ (2) $\mathbb{Z}_{12} = \{0,1,2,3,\cdots,11\}$

   (3) $\mathbb{Z}_{15} = \{0,1,2,\cdots,14\}$ (4) $\mathbb{Z}_{90} = \{0,1,2,\cdots,89\}$

4. 가환환 $\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}$ 의 이데알 $2\mathbb{Z}\oplus 3\mathbb{Z}$, $2\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}\oplus 3\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}\oplus\{0\}$ 중에서 $\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}$ 의 소이데알인 것과 극대이데알인 것을 찾아라.

5. 다음 가환환의 소이데알과 극대이데알을 모두 구하여라.

   (1) $\mathbb{Z}_2\oplus\mathbb{Z}_2$ (2) $\mathbb{Z}_2\oplus\mathbb{Z}_4$

6. 가환환 $\mathbb{Z}_{12}$ 의 소이데알과 극대이데알을 모두 구하여라.
   그리고, 가환환 $\mathbb{Z}_3\oplus\mathbb{Z}_4$ 의 소이데알과 극대이데알을 모두 구하여라.

7. 환 R 의 이데알 $M\,(\neq R)$ 이 R 의 극대이데알일 때 그리고 이때에만 잉여환 R/M 은 단순환임을 밝혀라(문제 3.7.8 참조).

8. 체 F 위의 다항식환 $F[x]$ 에서 영이데알 $\{0\}$ 은 소이데알이지만 극대이데알은 아님을 밝혀라.

9. 다음 명제 중에서 참인 명제를 찾아라.

(1) 다항식환 $\mathbb{Z}[x]$ 에서 다항식 $f(x) = x$ 에 의하여 생성된 단항이데알 $(f(x))$ 는 $\mathbb{Z}[x]$ 의 소이데알인 동시에 극대이데알이다.

(2) 다항식환 $\mathbb{Z}[x]$ 다항식 $g(x) = x^3 - 1$ 에 의하여 생성된 단항이데알 $(g(x))$ 는 $\mathbb{Z}[x]$ 의 소이데알인 동시에 극대이데알이다.

10. 두 환 R, R' 이 각각 단위원 $1, 1'$ 을 가진 가환환이고 $f : R \longrightarrow R'$ 가 $f(1) = 1'$ 인 환 준동형사상일 때 다음이 성립하는지를 판정하여라.

(1) R' 의 소이데알 P' 에 대하여 $f^{-1}(P)$ 를

$$f^{-1}(P') = \{a \in R \mid f(a) \in P'\}$$

이라고 하면 $f^{-1}(P')$ 은 R 의 소이데알이다..

(2) R' 의 극대이데알 M' 에 대하여 $f^{-1}(M)$ 을

$$f^{-1}(M') = \{a \in R \mid f(a) \in M'\}$$

이라고 하면, $f^{-1}(M')$ 은 R 의 극대이데알이다.