제 5 장 보충문제

보충문제 (5.1)

1. 체 F 위의 벡터공간 V 에서, 벡터 $v, w, u \in V$ 와 $a \in F$ 에 대하여 다음이 성립함을 증명하여라.
   (1) $a0 = 0$, $a(-v) = -av$
   (2) $0v = 0$, $(-a)v = -av$
   (3) $av = 0$, $a \neq 0$ 이면, $v = 0$ 이다.

2. 체 F 위의 벡터공간 V 에서 V 의 부분공간 $W_1, \cdots, W_m$ 에 대하여 다음 두 집합은 V 의 부분공간임을 밝혀라.

$$W = W_1 \cap \cdots \cap W_m = \{ w \mid w \in W_1, \cdots, w \in W_m \}$$

$$U = W_1 + \cdots + W_m = \{ w_1 + \cdots + w_m \mid w_1 \in W_1, \cdots, w_m \in W_m \}$$

3. 체 F 위의 벡터공간 V 에서 벡터 $v_1, \cdots, v_n \in V$ 에 대하여

$$\langle v_1, \cdots, v_n \rangle = \{ a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n \mid a_1, \cdots, a_n \in F \}$$

이라고 할 때, $\langle v_1, \cdots, v_n \rangle$ 은 V 의 부분공간이고 다음이 성립함을 밝혀라.
   (1) $v_1, \cdots, v_n \in \langle v_1, \cdots, v_n \rangle$
   (2) V 의 부분공간 W가 $v_1, \cdots, v_n$ 을 포함하면, $\langle v_1, \cdots, v_n \rangle \subseteq W$ 이다.

4. Hamilton 의 사원수환 $\mathbb{H} = \{ a_0 + a_i i + a_2 j + a_3 k \mid a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R} \}$ 를 복소수체 $\mathbb{C}$ 위의 벡터공간으로 생각할 때, $\mathbb{H}$ 는 복소수체 $\mathbb{C}$ 위의 2 차원 벡터공간임을 밝혀라.

보충문제 (5.2)

1. 체 $\mathbb{Z}_3$ 위의 다항식 $f(x) = x^5 - 1$ 에 대하여 $I = (\,f(x)\,)$ 이라고 할 때, 잉여환 $\mathbb{Z}_3[x]/I = \{a_0 + a_1 x + \cdots + a_4 x^4 \mid a_0, a_1, \cdots, a_4 \in \mathbb{Z}_3\}$ 에 대하여 다음을 구하여라.
   (1) $(1 + 2x^7 + I) + (x^{12} + I)$
   (2) $(1 - x + I)(1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + I)$

2. 유리수체 $\mathbb{Q}$ 위의 다항식환 $\mathbb{Q}[x]$ 에서 $I = (\,x^4 - 1\,)$ 이라고 할 때, 잉여환
$$\mathbb{Q}[x]/I = \{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + I \mid a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{Q}\}$$
에 대하여 다음 원소를
$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + I \qquad (a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{Q})$$
의 꼴로 나타내어라.
   (1) $x^4 + I, \quad x^5 + I, \quad x^6 + I$
   (2) $(x + I)(1 + x + I), \quad (x + I)^2(1 + x + I), \quad (x + I)^3(1 + x + I)$
   (3) $(1 - x + I)(1 + x + x^2 + x^3 + I)$
   (4) $(1 + x^2 + I)(1 - x^2 + I)$

3. 다항식 $p(x) = x^4 - x^2 + 1$ 는 유리수체 $\mathbb{Q}$ 위에서 기약이다.
체 $K = \mathbb{Q}[x]/(p(x))$ 에서 $u = x + (\,p(x)\,)$ 이라고 할 때, 다음 원소를
$$a_0 + a_1 u + a_2 u^2 + a_3 u^3 \qquad (a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{Q})$$
의 꼴로 나타내어라.
   (1) $u^5, \ u^6, \ u^7$
   (2) $(1 + 2u + 3u^4 + 4u^5) + (u - 2u^4 + 3u^5)$
   (3) $(1 + 2u^2)(3u + u^3)$
   (4) $u^{-1}, \quad (1 + u + u^2)^{-1}$

4. 다항식 $p(x) = x^6 + x^3 + 1$ 는 유리수체 $\mathbb{Q}$ 위에서 기약이다.
체 $K = \mathbb{Q}[x]/(p(x))$ 에서 $u = x + (p(x))$ 이라고 할 때, 다음 원소를

$$a_0 + a_1 u + a_2 u^2 + \cdots + a_5 u^5 \qquad (a_0, a_1, a_2, \cdots, a_6 \in \mathbb{Q})$$

의 꼴로 나타내어라.

(1) u^6, u^7, u^8, u^9 (2) u^{-1}, u^{-2}, u^{-3}

5. 복소수체 $\mathbb{C}$ 위의 다항식환 $\mathbb{C}[x]$ 의 소이데알과 극대이데알을 결정하여라.

6. 실수체 $\mathbb{R}$ 위의 다항식환 $\mathbb{R}[x]$ 의 극대이데알을 결정하여라.

7. 다항식환 $\mathbb{Z}_2[x]$ 에 대한 다음 명제 중에서 참인 명제를 찾아라.

(1) 다항식 $f(x) = x^2$ 에 의하여 생성된 단항이데알 $(f(x))$ 는 $\mathbb{Z}_2[x]$ 의 소이데알인 동시에 극대이데알이다.

(2) 다항식환 $\mathbb{Z}_2[x]$ 에서 다항식 $f(x) = x^2 + 1$ 에 의하여 생성된 단항이데알 $(f(x))$ 는 $\mathbb{Z}_2[x]$ 의 소이데알인 동시에 극대이데알이다.

(3) 다항식환 $\mathbb{Z}_2[x]$ 에서 다항식 $f(x) = x^2 + x + 1$ 에 의하여 생성된 단항이데알 $(f(x))$ 는 $\mathbb{Z}_2[x]$ 의 소이데알인 동시에 극대이데알이다.

(4) 다항식환 $\mathbb{Z}_2[x]$ 에서 다항식 $f(x) = x^2 + x + 1$ 에 의하여 생성된 단항이데알 $(f(x))$ 에 의한 잉여환 $\mathbb{Z}_2[x]/(f(x))$ 는 정역인 동시에 체이다.

보충문제 (5.3)

1. 체 F 위의 다항식환 $F[x]$ 를 F 위의 벡터공공간으로 볼 때, $F[x]$ 는 F 위의 무한차원 벡터공간임을 증명하여라.

2. 체 K가 체 F의 확대체일 때, K의 원소 u가 다항식
$$f(x) \in F[x],\ \deg f(x) = n \geq 1$$
의 근이면 $[F(u) : F] \leq n$임을 밝혀라.

3. 체 K가 체 F의 유한 확대체이고 $[K : F]$가 素數일 때, 다음이 성립함을 증명하여라.
   (1) L이 $F \subseteq L \subseteq K$인 K의 부분체이면 $L = F$ 또는 $L = K$이다.
   (2) 모든 원소 $u \in K - F$에 대하여 $K = F(u)$ 이다.

4. 실수체 $\mathbb{R}$ 위의 모닉 다항식 $f(x)$ 가 $\mathbb{R}$ 위의 기약다항식이면, $f(x)$ 는 일차다항식이거나 또는 이차다항식임을 밝혀라.

5. 다음 명제가 참인지 거짓인지를 판정하여라.
   (1) 복소수 α가 대수적 수이면, 모든 양의 정수 n에 대하여 α^n은 대수적 수이다.
   (2) 복소수 α가 초월수이면, 모든 양의 정수 n에 대하여 α^n은 초월수이다.
   (3) 모든 양의 정수 n에 대하여 π^n은 초월수이다.
   (4) $\sqrt{\pi}$는 초월수이다.

6. 체 K가 체 F의 유한 확대체이고 $p(x) \in F[x]$가 체 F 위에서 n차의 기약다항식이고 $n \geq 2$일 때, n과 $[K : F]$가 서로 소이면 $p(x)$는 K 안에서 근을 가지지 않음을 밝혀라.

보충문제 (5.4)

1. 체 F 의 확대체 K 에 대하여 다음이 성립함을 증명하여라.
   (1) K 가 F 의 대수적 확대체이면, K 안에서의 F 의 대수적 폐포는 K 이다.
   (2) K 가 F 의 유한 확대체이면, K 안에서의 F 의 대수적 폐포는 K 이다.
   (3) 원소 $u \in K$ 가 F 위에서 대수적이면, $F(u)$ 안에서의 F 의 대수적 폐포는 $F(u)$ 이다.

2. 다음 물음에 답하여라.
   (1) 체 $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ 안에서의 유리수체 $\mathbb{Q}$ 의 대수적 폐포를 구하여라.
   (2) 체 $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ 는 대수적 폐체가 아님을 밝혀라.
   (3) 복소수체 $\mathbb{C}$ 는 대수적 폐체이지만, $\mathbb{C}$ 는 유리수체 $\mathbb{Q}$ 의 대수적 확대체가 아님을 밝혀라.

3. 체 F 의 확대체 K 에서 K_F 를 K 안에서의 F 의 대수적 폐포라고 할 때, 다음이 성립함을 증명하여라.
   (1) 원소 $u \in K$ 가 K_F 위에서 대수적이면 $u \in K_F$ 이다.
   (2) K 가 대수적 폐체이면, K_F 는 대수적 폐체이다.

4. 복소수체 $\mathbb{C}$ 위의 유리식체 $\mathbb{C}(x)$ 는 대수적 폐체가 아님을 밝혀라.

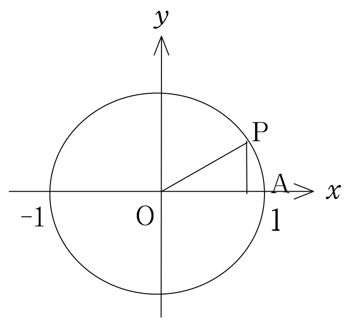
5. 체 F 의 확대체 K 의 두 원소 $u, v \in K$ 에 대하여 원소 u 가 F 위에서 초월적일 때, u 가 체 $F(v)$ 위에서 대수적이면 v 는 $F(u)$ 위에서 대수적임을 밝혀라.

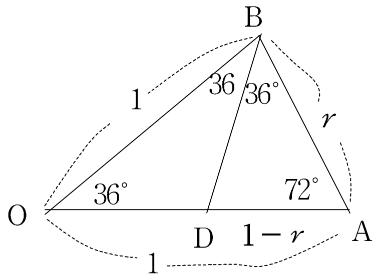
6. 체 $F = \mathbb{Q}(\pi^3)$ 위에서 π 는 대수적이고 다음이 성립함을 밝혀라.

$$\pi \notin F, \quad \operatorname{irr}(\pi, F) = x^3 - \pi^3, \quad [F(\pi) : F] = 3$$

보충문제 (5.5)

1. 아래 그림에서 각의 크기가 30° 인 각을 작도할 수 있음을 밝혀라.





2. 위의 오른쪽 그림에서 r 의 값을 구하여라.

그리고, 이 결과를 이용하여 단위원에 내접하는 정 10 각형과 정 5 각형을 작도 할 수 있음을 밝혀라.

3. 정 20 각형의 한 내각의 크기와 정 30 각형의 한 내각의 크기는 각각 다음과 같다.

$$\frac{360^\circ}{20} = 18^\circ, \qquad \frac{360^\circ}{30} = 12^\circ$$

이 사실과 보충문제 2 를 이용하여 단위원에 내접하는 정 20 각형, 정 30 각형 그리고 정 15 각형을 작도할 수 있음을 밝혀라.

보충문제 (5.6)

1. 다음 다항식의 유리수체 $\mathbb{Q}$ 위에서의 분해체 K 와 $[K : \mathbb{Q}]$를 구하여라.

(1) $f(x) = x^3 + 2$ (2) $f(x) = x^4 + 2$

2. 다음 다항식의 유리수체 $\mathbb{Q}$ 위에서의 분해체 K 와 $[K : \mathbb{Q}]$를 구하여라.

(1) $f(x) = (x-1)(x^3 - 5)$ $f(x) = (x-1)(x^3 + 5)$

3. 다음 다항식의 유리수체 $\mathbb{Q}$ 위에서의 분해체 K 와 $[K : \mathbb{Q}]$를 구하여라.

(1) $f(x) = x^3 + 6x^2 + 3x + 18$ (2) $f(x) = x^4 - x^2 - 2$

4. 보기 4.6.3 와 보기 4.6.4 의 결과를 이용하여 다음 다항식의 유리수체 $\mathbb{Q}$ 위에서의 분해체 K 와 $[K : \mathbb{Q}]$ 를 구하여라.

(1) $f(x) = x^3 + 6x^2 + 9x + 4$ (2) $g(x) = x^3 + 6x + 7$

5. 유리수체 $\mathbb{Q}$ 위의 다항식 $p(x) = x^4 - 10x^2 + 1$ 는 유리수체 $\mathbb{Q}$ 위에서 기약이다(문제 4.4.2).

복소수체체 $\mathbb{C}$ 안에서 $p(x)$ 의 근을 모두 구하고 유리수체 $\mathbb{Q}$ 위에서의 $p(x)$ 의 분해체 K와 $[K : \mathbb{Q}]$를 구하여라.

6. 홀수인 素數 p에 대하여 $\zeta = \cos\frac{2\pi}{p} + i\sin\frac{2\pi}{p}$ 이라고 할 때, 다항식 $f(x) = x^p - 2$ 에 대하여 $K = \mathbb{Q}(\sqrt[p]{2}, \zeta)$ 는 유리수체 $\mathbb{Q}$ 위에서의 $f(x)$ 의 분해체임을 밝히고, 또 다음이 성립함을 밝혀라.

(1) $[K : \mathbb{Q}(\zeta)] = p,$ $\quad \mathrm{irr}(\sqrt[p]{2}, \mathbb{Q}(\zeta)) = x^p - 2$

$[K : \mathbb{Q}] = p(p-1),$ $\quad [K : \mathbb{Q}(\sqrt[p]{2})] = p-1$

(2) $\mathrm{irr}(\zeta, \mathbb{Q}(\sqrt[p]{2})) = x^{p-1} + \cdots + x + 1$

보충문제 (5.7)

1. 유리수체 $\mathbb{Q}$ 위의 다항식

$$f(x) = x^4 + 4x^3 + 10x^2 + 12x + 9$$

는 복소수체 $\mathbb{C}$ 안에서 중근을 가진다는 사실을 밝히고, 또 이 결과를 이용하여 다항식 $f(x)$ 의 근을 모두 구하여라.

2. 다음 다항식이 복소수체 $\mathbb{C}$ 안에서 중근을 가진다는 사실을 밝히고, 또 이 결과를 이용하여 이 다항식의 근을 모두 구하여라.

(1) $f(x) = 2x^4 - 5x^3 + 3x^2 + x - 1$

(2) $f(x) = x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 2x + 1$

3. 素數 p 와 양의 정수 n 에 대하여 $q = p^n$ 이라고 할 때, 다항식

$$f(x) = x^q - x$$

는 Galois 체 $\mathbb{F}_p$ 위의 분리다항식임을 밝혀라.

4. 다음 명제 중에서 참인 경제를 찾아라.

(1) 유리수체 $\mathbb{Q}$ 위에서 기약인 다항식은 모두 유리수체 $\mathbb{Q}$ 위의 분리다항식이다,

(2) 다항식 $f(x) = x^3 - 3x + 2$ 는 유리수체 $\mathbb{Q}$ 위의 분리다항식이다.

(3) 유한체 K 의 표수가 素數 p 일 때, 다항식 $f(x) = x^p - x$ 는 체 K 안에서 중근을 가진다.,

보충문제 (5.8)

1. 체 $\mathbb{F}_2 = \{0, 1\}$ 위에서 5 차의 다항식 $p(x) = x^5 + x^2 + 1$ 는 원시다항식 이고 따라서 다음과 같은 위수 2^5 인 Galois 체 $\mathbb{F}_{2^5}$ 를 얻는다(보기 5.8.3 참조).

$$\mathbb{F}_{2^5} = \{a_0 + a_1\alpha + a_2\alpha^2 + a_3\alpha^3 + a_4\alpha^4 \mid a_0, a_1, a_2, a_3, a_4 \in \mathbb{F}_2\}$$

$$p(\alpha) = \alpha^5 + \alpha^2 + 1 = 0 \quad 즉 \quad \alpha^5 = 1 + \alpha^2$$

다음을 $a_0 + a_1\alpha + a_2\alpha^2 + a_3\alpha^3 + a_4\alpha^4$ 의 꼴로 나타내어라.

(1) $(1 + \alpha + \alpha^4)(1 + \alpha^2 + \alpha^3)$ (2) $(1 + \alpha + \alpha^4)^{-1}$

2. 체 $\mathbb{F}_2 = \{0, 1\}$ 위에서 다항식 $q(x) = x^4 + x^3 + 1$ 는 기약이고 따라서 다음과 같은 위수 2^4 인 Galois 체 $\mathbb{F}_{2^4}$ 를 얻는다.

$$\mathbb{F}_{2^4} = \{a_0 + a_1\beta + a_2\beta + a_3\beta^3 \mid a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{F}_2\},$$

$$q(\beta) = \beta^4 + \beta^3 + 1 = 0 \quad 즉 \quad \beta^4 = 1 + \beta^3$$

이와 같이 하여 얻은 Galois 체 $\mathbb{F}_{2^4}$ 에 대하여 다음 물음에 답하여라.

(1) Galois 체 $\mathbb{F}_{2^4}$에서 원소 $\beta, \beta^2, \beta^3, \beta^4, \cdots, \beta^{14}, \beta^{15}$ 을

$$a_0 + a_1\beta + a_2\beta^2 + a_3\beta^3 \quad (a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{F}_2)$$

의 꼴로 나타내어라.

(2) β가 Galois 체 $\mathbb{F}_{2^4}$ 의 원시원소임을 밝히고, $\mathbb{F}_{2^4}$ 의 원시원소를 모두 구하여라.

그리고, $q(x)$ 가 체 $\mathbb{F}_2$ 위의 4 차의 원시다항식인지를 판정하여라.

3. 체 $\mathbb{F}_3 = \{0, 1, 2\}$ 위에서 다항식 $p(x) = x^2 + 2x + 2$ 는 기약이고 따라서 다음과 같은 위수 3^2 인 Galois 체 $\mathbb{F}_9$ 를 얻는다.

$$\mathbb{F}_9 = \{a_0 + a_1\alpha \mid a_0, a_1 \in \mathbb{F}_3\}, \quad p(\alpha) = 0$$

이 때, Galois 체 $\mathbb{F}_9$ 에서 α가 원시원소인지를 판정하여라.

4. 체 $\mathbb{F}_3 = \{0, 1, 2\}$ 위에서 다항식 $p(x) = x^3 + 2x^2 + x + 1$ 는 기약이고 따라서 다음과 같은 위수 3^3 인 Galois 체 $\mathbb{F}_{3^3}$ 를 얻는다(보기 4.4.8).

$$\mathbb{F}_{3^3} = \{a_0 + a_1\alpha + a_2\alpha^2 \mid a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{F}_3\}$$

$$p(\alpha) = \alpha^3 + 2\alpha^2 + \alpha + 1 = 0 \quad \text{즉} \quad \alpha^3 = 2 + 2\alpha + \alpha^2$$

이와 같이 하여 얻은 Galois 체 $\mathbb{F}_{3^3}$ 에 대하여 다음 물음에 답하여라.

(1) 원소 α 는 Galois 체 $\mathbb{F}_{3^3}$ 의 원시원소이고 $q(x)$ 는 체 $\mathbb{F}_3$ 위의 3 차의 원시다항식임을 밝혀라.

(2) 다음 원소를 $a_0 + a_1\alpha + a_2\alpha^2$ $(a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{F}_3)$ 의 꼴로 나타내어라.

$$(1 + \alpha^2)(1 + 2\alpha + \alpha^2), \qquad (1 + 2\alpha + \alpha^2)^{-1}$$

5. 체 $\mathbb{F}_3 = \{0, 1, 2\}$ 위에서 다항식 $p(x) = x^3 + 2x + 2$ 는 기약다항식이고 따라서 다음과 같은 위수 3^3 인 Galois 체 $\mathbb{F}_{3^3}$ 를 얻는다(보기 4.4.8).

$$\mathbb{F}_{3^3} = \{a_0 + a_1\alpha + a_2\alpha^2 \mid a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{F}_3\}, \qquad p(\alpha) = 0$$

$$p(\alpha) = \alpha^3 + 2\alpha + 2 = 0 \quad \text{즉} \quad \alpha^3 = 1 + \alpha$$

이 때, Galois 체 $\mathbb{F}_{3^3}$ 에서 β 가 원시원소인지를 판정하여라.

6. 체 $\mathbb{F}_5 = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ 위에서 다항식 $p(x) = x^2 + x + 2$ 이 기약임을 증명하여라. 그리고, 체

$$\mathbb{F}_{5^2} = \mathbb{F}_5[x]/(p(x)) = \{a_0 + a_1\alpha \mid a_0, a_1 \in \mathbb{F}_5\}$$

에서 $\alpha^2, \alpha^3, \alpha^4, \alpha^5$ 를

$$a_0 + a_1\alpha \qquad (a_0, a_1 \in \mathbb{F}_5)$$

의 꼴로 나타내어라.

7. 체 $\mathbb{F}_{11} = \{0, 1, 2, \cdots, 10\}$ 의 원시원소를 모두 구하여라.

보충문제 (5.9)

1. 단위원을 가진 가환환 R 위의 아핀변환군

$$\mathcal{A} = \{\, T_{a,b} \mid a \in U(R),\ b \in R \}$$

에서 $\mathcal{T} = \{\, T_{1,b} \mid b \in R \}$, $\mathcal{D} = \{\, T_{a,0} \mid a \in U(R) \}$ 이라고 할 때, 다음이 성립함을 증명하여라.

(1) $\mathcal{T} \lhd \mathcal{A}$, $\quad \mathcal{A}/\mathcal{T} \cong U(R)$

(2) $\mathcal{T} \cong (R, +)$, $\quad \mathcal{D} \cong U(R)$

(3) $\mathcal{A} = \mathcal{D} \circ \mathcal{T} = \mathcal{T} \circ \mathcal{D}$

2. Galois 체 $\mathbb{F}_q$ 에서 α 가 원시원소일 때, 각 원소 $u \in \mathbb{F}_q^{\,*}$ 에 대하여

$$u = \alpha^i, \qquad 0 \le i \le q-2$$

인 정수 i 를 (α 를 밑으로 가지는) u 의 **이산로그**(discrete logarithm) 또는 **지수**(index)라 하고 이것을 $i = \mathrm{ind}_\alpha u$ 로 나타낸다 다음 표는 체 $\mathbb{F}_{37} = \{0, 1, 2, \cdots, 36\}$ 에서 원시원소 2 를 밑으로 가지는 이산로그표이다.

a	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
$\mathrm{ind}_2\, a$	0	1	26	2	23	27	32	3	16	24	30	28	11	33	13	4	7

a	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36
$\mathrm{ind}_2\, a$	17	35	25	22	31	15	29	10	12	6	34	21	14	9	5	20	8	19	18

위의 표를 이용하여 체 $\mathbb{F}_{37}$ 의 원소 $\xi = 29$ 와 정수 $e_1 = 5$, $e_2 = 7$ 에 대하여 다음 물음에 답하여라.

(1) $e_1 d_1 \equiv 1 \pmod{36}$, $1 \le d_1 \le 36$ 인 d_1 을 구하여라.

(2) $e_2 d_2 \equiv 1 \pmod{36}$, $1 \le d_2 \le 36$ 인 d_2 를 구하여라.

(3) 체 $\mathbb{F}_{37}$ 의 원소 ξ^{e_2}, $(\xi^{e_2})^{e_1}$, $(\xi^{e_2 e_1})^{d_2}$ 를 구하여라.

(4) 체 $\mathbb{F}_{37}$ 의 원소 $((\xi^{e_2 e_1})^{d_2})^{d_1}$ 과 ξ 를 비교하여라.