제 8장 보충문제

보충문제 (8.3)

1. 실수체 $\mathbb{R}$ 에서의 무한수열 $\{a_t\}$ 가 다음 두 조건을 만족시키는 동차 선형 점화수열일 때, a_t 를 구하여라.

   (i) $a_0 = 0$, $a_1 = 8$ (ii) $a_{t+2} = 3a_t + 2a_{t+1}$ $(t = 0, 1, 2, \cdots)$

2. 실수체 $\mathbb{R}$ 에서의 무한수열 $\{a_t\}$ 가 다음과 같이 정의된 동차 선형점화수열일 때, a_t 를 구하여라.

   (i) $a_0 = -5$, $a_1 = 3$ (ii) $a_{t+2} = -9a_t + 6a_{t+1}$ $(t = 0, 1, 2, \cdots)$

3. 실수체 $\mathbb{R}$ 위에서 무한수열 $\{a_t\}$ 가 다음과 같은 동차 선형점화수열이라고 하자.

   (i) $a_0 = 1$, $a_1 = -2$ (ii) $a_{t+2} = -6a_t + 5a_{t+1}$ $(t \geq 0)$

   이 때, a_t 를 구하여라.

4. 실수체 $\mathbb{R}$ 에서의 무한수열 $\{a_t\}$ 가 다음 조건을 만족시키는 동차 선형점화수열일 때, 이 수열의 생성멱급수 $G(x)$ 를 이용하여 모든 $t = 0, 1, 2, \cdots$ 에 대한 a_t 를 구하여라.

   (1) $a_0 = 3$, $a_1 = -2$, $a_{t+2} = -a_t + 2a_{t+1}$ $(t \geq 0)$

   (2) $a_0 = 1$, $a_1 = 4$, $a_{t+2} = 10a_t - 3a_{t+1}$ $(t \geq 0)$

5. 실수체 $\mathbb{R}$ 에서의 무한수열 $\{a_t\}$ 가 다음 조건을 만족시키는 동차 선형점화수열일 때, 이 수열의 생성멱급수 $G(x)$ 를 이용하여 모든 $t = 0, 1, 2, \cdots$ 에 대한 a_t 를 구하여라.

   (i) $a_0 = 5$ (ii) $a_{t+1} = a_t + 2^t$ $(t \geq 0)$

6 실수체 $\mathbb{R}$ 에서의 무한수열 $\{a_t\}$ 가 다음 조건을 만족시키는 동차 선형점화 수열일 때, 이 수열의 생성멱급수 $G(x)$ 를 이용하여 a_t 를 구하여라.

(i) $a_0 = 6,\ a_1 = 18,\ a_2 = 36$

(ii) $a_{t+3} = -2a_t + a_{t+1} + 2a_{t+2} \quad (t \geq 0)$

4. 다음과 같이 주기 3 인 이진수열의 생성멱급수 $G(x)$ 를 구하여라.

$\{a_t\}$: $1, 1, 0, 1, 1, 0, 1, 1, 0, 1, 1, 0, 1, 1, 0, \cdots$

5. 체 $\mathbb{F}_2$ 에서의 무한수열 $\{a_t\}$ 가 다음 두 조건을 만족시키는 선형점화수열 일 때, $\{a_t\}$ 의 주기와 생성순환마디를 구하여라.

(i) $(a_0, a_1, a_2, a_3) = (0, 0, 0, 1)$

(ii) $a_{t+4} = a_t + a_{t+1} + a_{t+2} + a_{t+3} \quad (t \geq 0)$

6. 체 $\mathbb{F}_2$ 에서 다음 두 조건을 만족시키는 동차 선형점화수열 $\{a_t\}$ 가 최대 주기수열임을 확인하고 그 생성순환마디를 구하여라.

(i) $(a_0, a_1, a_2, a_3, a_4) = (0, 0, 0, 0, 1)$

(ii) $a_{t+5} = a_t + a_{t+2} \quad (t \geq 0)$

7. 체 $\mathbb{F}_2$ 위에서 주기가 $2^6 - 1$ 인 최대주기수열을 구하여라.

보충문제 (8.4)

1. 체 $\mathbb{Z}_3 = \{0, 1, 2\}$ 위의 전행렬환 $\mathrm{Mat}_2(\mathbb{Z}_3)$ 에서 다음을 구하여라.

(1) $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$ (2) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ (3) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}^{-1}$

2. 복소수체 $\mathbb{C}$ 위의 2 차의 일반선형군 $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ 에서 두 정칙행렬

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & \sqrt{-1} \\ \sqrt{-1} & 0 \end{bmatrix}$$

에 대하여 $C = AB$ 이라고 할 때, 다음이 성립함을 밝혀라.

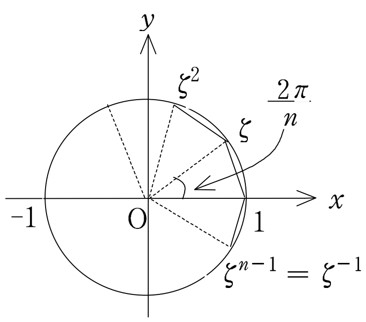
(1) 원소 A, B, C 의 위수는 모두 4 이고 $A^2 = B^2 = C^2 = -I$ 이다.

(2) 군 $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ 에서 A, B 에 의하여 생성된 부분군 $\langle A, B \rangle$ 는 사원수군 $Q_8 = \{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\}$ 과 동형이다.

3. 정수 $n\ (\geq 3)$ 에 대하여 $\zeta = \cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}$ 이라고 하자.

이 때, 복소수체 $\mathbb{C}$ 위의 2 차의 일반선형군 $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ 에서 두 정칙행렬

$$A = \begin{bmatrix} \zeta & 0 \\ 0 & \zeta^{-1} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$



에 대하여 다음이 성립함을 밝혀라.

(1) 부분군 $\langle A \rangle$ 는 위수 n 인 순환군이고 $\langle B \rangle$ 는 위수 2 인 순환부분군이다.

(2) 두 원소 A, B 에 의하여 생성된 부분군 $\langle A, B \rangle$ 는 정이면체군

$$D_n = \{1, \sigma, \sigma^2, \cdots, \sigma^{n-1}, \tau, \sigma \circ \tau, \sigma^2 \circ \tau, \cdots, \sigma^{n-1} \circ \tau\}$$

과 동형이다.

4. 덧셈군 $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ 의 자기준동형환과 자기동형군을 구하여라.

5. 가환환 $\mathbb{Z}_{26} = \{0, 1, 2, \cdots, 25\}$ 위에서 다음 행렬의 역행렬을 구하여라.

(1) $\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 7 \end{bmatrix}$ (2) $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$ (3) $\begin{bmatrix} 1 & 10 \\ 6 & 11 \end{bmatrix}$

6. 체 F 위의 전행렬환 $\mathrm{Mat}_n(F)$ 에 대하여 다음과 같이 정의된 사상은 환준동형사상인지를 판정하여라.

(1) $\phi : \mathrm{Mat}_n(F) \longrightarrow F, \quad \phi(A) = \det A$

(2) $\psi : \mathrm{Mat}_n(F) \longrightarrow F, \quad \psi(A) = \mathrm{tr}\, A$

보충문제 (8.6)

1. 체 F 위의 벡터공간 $F[x]$ 에서 n 차원 부분공간

$$F_n[x] = \{a_0 + a_1x + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} \mid a_0, a_1, \cdots, a^{n-1} \in F\}$$

에 대하여 벡터공간 동형사상 $\phi : F_n[x] \longrightarrow F^n$ 를 정하여라.

2. 체 체 F 위의 벡터공간 $\mathrm{Mat}_{m\times n}(F)$ 에서 벡터공간 F^{mn} 위로의 동형사상 $\phi : \mathrm{Mat}_{m\times n}(F) \longrightarrow F^{mn}$ 를 정하여라.

3. 체 F 위의 n 차원 벡터공간 V 에서 $\mathscr{B} = \{v_1, \cdots, v_n\}$ 가 V 의 기저일 때, F 위의 임의의 벡터공간 W 와 임의의 $w_1, \cdots, w_n \in W$ 에 대하여

$$T(v_i) = w_i \qquad (1 \le i \le n)$$

인 선형사상 $T : V \longrightarrow W$ 가 단 하나 존재함을 밝혀라.
여기서 $w_1, \cdots, w_n$ 중에는 같은 것이 있을 수 있다.

4. 체 F 위의 벡터공간 $\mathrm{Mat}_n(F)$ 에서 벡터공간 F 로의 사상

$$\phi : \mathrm{Mat}_n(F) \to F, \quad \phi(A) = \mathrm{tr}\, A$$

가 선형사상임을 밝히고 $\ker\phi$ 의 차원과 그 기저를 하나만 들어라.

5. 체 F 의 벡터공간 $F[x]$ 에서 F 로의 사상

$$\phi : F[x] \longrightarrow F, \quad \phi(f(x)) = f(0)$$

가 선형사상임을 밝혀라. 그리고, ϕ 의 핵공간 $\ker\phi$ 과 상공간 $\mathrm{im}\,\phi$ 를 구하고 또 이에 제 1 동형정리를 적용한 결과를 말하여라.

보충문제 (8.7)

1. 체 F 위의 벡터공간 F^n 에서 $\mathscr{B} = \{e_1, \cdots, e_n\}$ 를 F^n 의 표준기저라고 할 때, 사상

$$\Phi_{\mathscr{B}} : \mathrm{End}_F(V) \longrightarrow \mathrm{Mat}_n(F), \quad \Phi_{\mathscr{B}}(T) = [T]_{\mathscr{B}}$$

는 다원환 동형사상이고 따라서 다음이 성립한다.

$$\mathrm{End}_F(F^n) \cong \mathrm{Mat}_n(F), \qquad \dim_F \mathrm{End}_F(F^n) = n^2,$$

$$\mathrm{End}_F(F^n) = \{L_A \mid A \in \mathrm{Mat}_n(F)\}$$

$$\mathrm{GL}(V) \cong \mathrm{GL}_n(F)$$

2. 체 F 위의 벡터공간 V, W가 각각 n 차원, m 차원 벡터공간일 때,

$$\mathscr{B} = \{v_1, \cdots, v_n\}, \qquad \mathscr{C} = \{w_1, \cdots, w_m\}$$

를 각각 V, W 의 기저라고 하고, 선형사상 $T: V \longrightarrow W$에 대하여 $T(v_1), \cdots, T(v_n)$ 이 다음과 같이 $w_1, \cdots, w_m$ 의 일차결합으로 나타내어진다고 하자.

$$\begin{aligned} T(v_1) &= a_{11}w_1 + a_{21}w_2 + \cdots + a_{m1}w_m \\ T(v_2) &= a_{12}w_1 + a_{22}w_2 + \cdots + a_{m2}w_m \\ &\vdots \\ T(v_n) &= a_{1n}w_1 + a_{2n}w_2 + \cdots + a_{mn}w_m \end{aligned}$$

$$A = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \\ \begin{array}{cccc} \uparrow & \uparrow & & \uparrow \\ T(v_1) & T(v_2) & & T(v_n) \end{array} \end{array}$$

이 때, $[T]_{\mathscr{B}}^{\mathscr{C}} = A$ 이라고 하면, 사상

$$\Phi : \mathrm{Hom}_F(V, W) \longrightarrow \mathrm{Mat}_{m\times n}(F), \quad \Phi(T) = [T]_{\mathscr{B}}^{\mathscr{C}}$$

는 벡터공간 동형사상이고 따라서 다음이 성립함을 밝혀라.

$$\mathrm{Hom}_F(V, W) \cong \mathrm{Mat}_{m\times n}(F),$$

$$\dim_F \mathrm{Hom}_F(V, W) = nm$$

보충문제 (8.8)

1. 실수체 $\mathbb{R}$ 위의 벡터공간 $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$ 에서 $\mathrm{Sym}_n(\mathbb{R})$, $\mathrm{Alt}_n(\mathbb{R})$ 를 각각 대칭 행렬 전체와 교대행렬 전체로 이루어진 부분공간이라고 할 때,

$$\mathrm{Mat}_n(\mathbb{R}) = \mathrm{Sym}_n(\mathbb{R}) \oplus \mathrm{Alt}_n(\mathbb{R})$$

임을 밝혀라.

그리고, $\mathrm{Sym}_n(\mathbb{R})$ 의 기저와 $\mathrm{Alt}_n(\mathbb{R})$ 의 기저를 하나씩 구하고 이 두 부분공간의 차원을 구하여라.