

## 제 4 장 보충문제

## 보충문제 (4.2)

1. 다항식환  $\mathbb{Z}[x]$  에서 두 다항식  $f(x), g(x) \in \mathbb{Z}[x]$  에 대하여

$$(f(x)) = \{f(x)h(x) \mid h(x) \in \mathbb{Z}[x]\},$$

$$(f(x), g(x)) = \{f(x)h(x) + g(x)k(x) \mid h(x), k(x) \in \mathbb{Z}[x]\}$$

이라고 할 때, 다음 중에서 참인 것을 찾아라.

- (1)  $(x^2) \subsetneq (x) \subsetneq \mathbb{Z}[x]$       (2)  $(x^2 + 3x + 2) \subsetneq (x + 1) \subsetneq \mathbb{Z}[x]$   
 (3)  $(2) \neq \mathbb{Z}[x]$                       (4)  $(x - 1, x^2 - 1) = (x - 1)$

2. 다음 명제 중에서 참인 것을 찾아라.

- (1) 정수환  $\mathbb{Z}$  위의 두 다항식  $f(x), g(x) \in \mathbb{Z}[x]$ ,  $g(x) \neq 0$  에 대하여

$$f(x) = q(x)g(x) + r(x),$$

$$r(x) = 0 \text{ 또는 } \deg r(x) \leq \deg g(x)$$

인 다항식  $q(x), r(x) \in \mathbb{Z}[x]$  가 존재한다.

- (2) 정수환  $\mathbb{Z}$  위의 다항식환  $\mathbb{Z}[x]$  는 단항이데알 정역이다.  
 (3) 유리수체  $\mathbb{Q}$  위의 다항식환  $\mathbb{Q}[x]$  는 단항이데알 정역이다.  
 (4) 체  $\mathbb{Z}_p$  위의 다항식환  $\mathbb{Z}_p[x]$  는 단항이데알 정역이다.

3. 체  $F$  위에서 다항식  $f(x)$  를

$$ax - b \qquad (a, b \in F, a \neq 0)$$

로 나누었을때의 나머지를 구하여라.

4. 유리수체  $\mathbb{Q}$  위에서 다항식  $f(x) = ax^3 + bx^2 - 5$  가  $g(x) = 2x + 1$  로 나누어 떨어지고  $h(x) = 3x - 2$  로 나누었을 때의 나머지가 7 인 경우에  $a$  와  $b$  의 값을 구하여라.

5. 체  $F$  위에서 다항식  $f(x) \in F[x]$  를 다항식

$$g(x) = (x-a)(x-b) \quad (a, b \in F, a \neq b)$$

로 나누었을 때의 나머지는 다음과 같음을 밝혀라.

$$\frac{f(a)-f(b)}{a-b}x + \frac{af(b)-bf(a)}{a-b}$$

6. 유리수체  $\mathbb{Q}$  의 다항식  $f(x)$  를  $g(x) = x+1$  로 나누었을 때의 나머지가  $-45$  이고 또  $h(x) = x-3$  으로 나누었을 때의 나머지가  $23$  일 때,  $f(x)$  를  $g(x)h(x) = x^2-2x-3$  으로 나누었을 때의 나머지를 구하여라.

7. 유리수체  $\mathbb{Q}$  또는 실수체  $\mathbb{R}$  위에서 두 다항식

$$f(x) = x^3 - x^2 + 2x - 8, \quad g(x) = x^2 + x - 6$$

에 대하여 다음 물음에 답하여라.

- (1)  $f(x)$  를  $g(x)$  로 나누었을 때의 몫과 나머지를 구하여라.
- (2)  $f(x)$  와  $g(x)$  의 최대공약수  $d(x)$  를 구하고, 또

$$d(x) = f(x)s(x) + g(x)t(x)$$

인 다항식  $s(x), t(x) \in \mathbb{Q}[x]$  를 한 별만 구하여라.

8. 체  $\mathbb{Z}_2 = \{0, 1\}$  위에서 두 다항식

$$f(x) = x^5 + x^4 + x^3 + x^2, \quad g(x) = x^4 + x^3 + x + 1$$

의 최대공약수  $d(x)$  를 구하고, 또  $d(x) = f(x)s(x) + g(x)t(x)$  인 다항식  $s(x), t(x) \in \mathbb{Z}_2[x]$  를 한 별만 구하여라.

9. 체  $\mathbb{Z}_3 = \{0, 1, 2\}$  위에서 두 다항식

$$f(x) = x^4 + 2x + 1, \quad g(x) = x^2 + 2$$

의 최대공약수  $d(x)$  를 구하고, 또

$$d(x) = f(x)s(x) + g(x)t(x)$$

인 다항식  $s(x), t(x) \in \mathbb{Z}_3[x]$  를 한 별만 구하여라.

10. 체  $\mathbb{Z}_{11}$  위에서 두 다항식

$$f(x) = x^4 + 4x + 3, \quad g(x) = x^3 + 2x^2 + x$$

의 최대공약수  $d(x)$  를 구하고, 또

$$d(x) = f(x)s(x) + g(x)t(x)$$

인 다항식  $s(x), t(x) \in \mathbb{Z}_{11}[x]$  를 한 벌만 구하여라.

11. 체  $F$  위의 두 다항식  $f(x), g(x)$  의 최대공약수가  $d(x)$  일 때,

$$f(x) = d(x)f_0(x), \quad g(x) = d(x)g_0(x)$$

이라 하고 다항식  $s_0(x), t_0(x) \in F[x]$  에 대하여 다음이 성립한다고 하자.

$$d(x) = f(x)s_0(x) + g(x)t_0(x)$$

이 때, 임의의 다항식  $h(x) \in F[x]$  에 대하여

$$\begin{aligned} (*) \quad & s(x) = s_0(x) - g_0(x)h(x), \\ & t(x) = t_0(x) + f_0(x)h(x) \end{aligned}$$

이라고 놓으면, 다음 등식이 성립함을 밝혀라.

$$d(x) = f(x)s(x) + g(x)t(x)$$

또, 두 다항식  $s(x), t(x) \in F[x]$  에 대하여 위의 등식이 성립하면, 적당한 다항식  $h(x) \in F[x]$  에 대하여 (\*) 가 성립함을 밝혀라.

## 보충문제 (4.3)

1. 체  $F$  위의 두 다항식

$$\begin{aligned} f(x) &= a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0, \\ g(x) &= b_n x^n + \cdots + b_1 x + b_0 \end{aligned}$$

가 서로 다른  $n+1$  개의 원소  $c_1, \cdots, c_{n+1} \in F$ 에 대하여

$$f(c_1) = k g(c_1), \cdots, f(c_{n+1}) = k g(c_{n+1}) \quad (k \in F)$$

이면,  $f(x) = k g(x)$  즉  $a_i = k b_i$  ( $0 \leq i \leq n$ ) 임을 밝혀라.

2. 다음 명제 중에서 참인 것을 찾아라.

- (1) 실수체  $\mathbb{R}$  위의 기약다항식은 일차다항식이거나 또는 이차다항식이다.
- (2) 실수체  $\mathbb{R}$  위의 다항식  $f(x)$  가  $n$  차의 다항식일 때,  $n$  이 홀수이면  $f(x)$  는  $\mathbb{R}$  위에서 기약이 아니다.

3. 실수체  $\mathbb{R}$  위의 이차다항식  $f(x) = x^2 + bx + c$  에 대하여  $D = b^2 - 4c$  이라고 할 때, 다음 명제 중에서 참인 것을 찾아라.

- (1) 다항식  $f(x)$  는 복소소수체  $\mathbb{C}$  안에서 두 근  $\frac{-b \pm \sqrt{D}}{2}$  을 가진다.
- (2)  $D \geq 0$  일 때 그리고 이때에만  $f(x)$  는  $\mathbb{R}$  위에서 기약이 아니다.,
- (3)  $D < 0$  일 때 그리고 이때에만  $f(x)$  는  $\mathbb{R}$  위에서 기약이다.

4. 정수  $d$  가 제곱수가 아닌 양의 정수 또는 음의 정수일 때,

$$\xi = u + v\sqrt{d} \quad (u, v \in \mathbb{Q}, v \neq 0)$$

가 유리수체  $\mathbb{Q}$  위의 다항식

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$$

의 근이면  $u - v\sqrt{d}$  도  $f(x)$  의 근임을 증명하여라.

5. 정수환  $\mathbb{Z}$  위의 다항식  $f(x) = x^4 - 3x^3 + 5x^2 - 30x - 10$  에 대하여 다음 물음에 답하여라.

(1)  $f(x)$  를  $x-3$  에 관하여 전개하여라.

(2) 다항식  $g(x) = f(x+3)$  를  $x$  에 관하여 전개하여라.

6. 실수체  $\mathbb{R}$  위에서 다음 유리식을 부분분수의 꼴로 분해하여라.

$$(1) \frac{x^2}{(x-1)(x-2)(x-3)} \quad (2) \frac{1}{(x-1)^2(x+1)}$$

$$(3) \frac{1}{x^4-1} \quad (4) \frac{1}{x^4+1}$$

7. 실수체  $\mathbb{R}$  위에서 다음 등식이 성립함을 밝혀라 ( $a \in \mathbb{R}$ ,  $a \neq 0$ ).

$$(1) \frac{4x^3}{x^4-a^4} = \frac{1}{x-a} + \frac{1}{x+a} + \frac{2x}{x^2+a^2}$$

$$(2) \frac{n!}{x(x+1)\cdots(x+n)} \\ = \binom{n}{0} \frac{1}{x} - \binom{n}{1} \frac{1}{x+1} + \cdots + (-1)^n \binom{n}{n} \frac{1}{x+n}$$

8. 실수체  $\mathbb{R}$  위의 무한수열  $\{a_n\}$  의 생성역급수가 다음과 같을 때, 무한수열  $\{a_n\}$  를 결정하여라.

$$(1) G(x) = \frac{8}{1-3x} + \frac{2}{(1-3x)(1-x)}$$

$$(2) G(x) = \frac{2-7x}{(1-2x)^2}$$

## 보충문제 (4.4)

1. 다음 가환환의 표수를 말하여라.

- (1)  $\mathbb{Z}[\sqrt{30}]$                       (2)  $\mathbb{Q}(\sqrt{7})$   
 (3)  $\mathbb{Z}_8$                               (4)  $\mathbb{Z}_5[x]$

2. 다음 중에서 참인 명제를 찾아라.

- (1) 유리수체  $\mathbb{Q}$  의 표수는 0 이고 그 소체는  $\mathbb{Q}$  자신이다.  
 (2) 실수체  $\mathbb{R}$  의 표수는 0 이고 그 소체는 유리수체  $\mathbb{Q}$  이다.  
 (3) 복소수  $\mathbb{C}$  의 표수는 0 이고 그 소체는 유리수체  $\mathbb{Q}$  이다.  
 (4) 가환환  $\mathbb{Z}_9 = \{0, 1, 2, \dots, 8\}$  의 표수는 3 이다.

3. 다음 체의 소체를 말하여라.

- (1)  $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$                       (2)  $\mathbb{C}(x)$                       (3)  $\mathbb{Z}_2(x)$

4. 체  $\mathbb{Z}_2 = \{0, 1\}$  위에서 다음 다항식을 간단히 하여라.

- (1)  $(x+1)^2$                       (2)  $(x+1)^4$   
 (3)  $(x^2+x+1)^2$                       (4)  $(x^3+x^2+1)^4$

5. 체  $\mathbb{Z}_3 = \{0, 1, 2\}$  위에서 다음 다항식을 간단히 하여라.

- (1)  $(x-1)^3$                       (2)  $(x^2+x+2)^3$   
 (3)  $(2x+1)^3$                       (4)  $(x+2)^2$

## 보충문제 (4.5)

1. 다음과 같은 정수환  $\mathbb{Z}$  위의 다항식의 정수근(정수인 근)을 구하여라.

(1)  $f(x) = 3x^3 + 22x^2 + 6x - 7$

(2)  $f(x) = 6x^3 - 31x^2 + 4x + 5$

2. 정수환  $\mathbb{Z}$  위의 다항식

$$f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$$

가 정수근  $a$  를 가질 때, 임의의 정수  $m$  에 대하여  $a - m$  는  $f(m)$  의 약수임을 밝혀라.

3. 위의 보충문제 2 의 결과를 이용하여 다음과 같은 정수환  $\mathbb{Z}$  위의 다항식의 정수근을 구하여라.

(1)  $f(x) = x^4 + x^3 - 14x^2 - 2x + 24$

(2)  $f(x) = x^5 - 11x^4 + 66x^3 - 22x^2 - 143x - 507$

4. 체  $\mathbb{Z}_2 = \{0, 1\}$  위에서 다항식  $f(x) = x^3 + x + 1$  가 기약임을 밝혀라.

5. 체  $\mathbb{Z}_3 = \{0, 1, 2\}$  위에서 다항식

$$f(x) = x^3 + 2x^2 + 2x + 2$$

가 기약임을 밝혀라.

6. 다음 다항식이 유리수체  $\mathbb{Q}$  위에서 기약임을 밝혀라.

(1)  $f(x) = x^3 - 2x^2 - 4x + 6$       (2)  $f(x) = 2x^3 + 6x - 8x - 1$

(3)  $f(x) = 2x^3 - x - 2$               (4)  $f(x) = 9x^3 - 6x^2 - 1$

7. 다음 다항식이 유리수체  $\mathbb{Q}$  위에서 기약임을 밝혀라.

(1)  $f(x) = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$       (2)  $f(x) = x^6 + x^3 + 1$

8. 다항식을 유리수체  $\mathbb{Q}$  위와 실수체  $\mathbb{R}$  위에서 인수분해하여라.

$$(1) f(x) = 2x^3 - 2x^2 - x + 1 \quad (2) f(x) = x^4 - x^2 + 1$$

9. 체  $\mathbb{Z}_2 = \{0, 1\}$  위에서 다음 다항식을 기약다항식의 곱으로 나타내어라.

$$\begin{array}{ll} (1) f(x) = x^3 + x & (2) f(x) = x^3 + x^2 + x \\ (3) f(x) = x^3 + 1 & (4) f(x) = x^3 + x^2 + x + 1 \end{array}$$

10. 체  $\mathbb{Z}_2 = \{0, 1\}$  위에서 다음 다항식을 기약다항식의 곱으로 나타내어라.

$$(1) f(x) = x^4 + 1 \quad (2) f(x) = x^4 + x^3 + x + 1$$

11. 체  $\mathbb{Z}_3 = \{0, 1, 2\}$  위에서 다음 다항식을 기약다항식의 곱으로 나타내어라.

$$(1) f(x) = x^2 + 2 \quad (2) f(x) = x^3 + x^2 + x + 1$$

12. 체  $\mathbb{Z}_3 = \{0, 1, 2\}$  위에서 다항식  $x^4 - 1$ 의 표준분해를 구하고, 다항식  $x^4 - 1$ 의 약수를 모두 구하여라.

## 보충문제 (4.6)

1. 복소수  $\alpha \in \mathbb{C}$  가 유리수를 계수로 가지는  $n$  차의 다항식  $f(x)$  의 근이면,  $\alpha$  는 정수를 계수로 가지는  $n$  차의 다항식  $g(x)$  의 근임을 밝혀라.
2. 다항식  $f(x) = 5x^3 - 7x^2 + 29x + 21$  의 유리근(유리수인 근)을 구하고 또 복소수체  $\mathbb{C}$  안에서  $f(x)$  의 근을 구하여라.  
그리고, 유리수체  $\mathbb{Q}$  위에서 다항식  $f(x)$  를 인수분해하여라.

3. 정수를 계수로 가지는 다항식

$$f(x) = 4x^5 - 8x^4 - 7x^3 - 11x^2 - 11x - 3$$

의 유리근을 모두 구하고 이들 유리근의 중복도를 구하여라.

4. 유리수체  $\mathbb{Q}$  위의 다항식  $f(x) = x^4 + 8x^3 + 14x^2 - 24x - 63$  는  $-3$  을 근으로 가진다.  
이 사실을 이용하여, 실수체  $\mathbb{R}$  안에서  $f(x)$  의 근을 모두 구하여라.

5. 실수체  $\mathbb{R}$  위의 사차다항식

$$f(x) = 2x^4 - 5x^3 + ax^2 + bx + c$$

가 삼중근  $x = 1$  을 가질 때,  $a, b, c$  의 값을 구하고 또 복소수체  $\mathbb{C}$  안에서  $f(x)$  의 근을 모두 구하여라.

6. 유리수체  $\mathbb{Q}$  위의 다항식

$$f(x) = x^4 - 7x^3 + 26x^2 - 43x + 13$$

가  $2+3i$  를 근으로 가질 때, 복소수체  $\mathbb{C}$  안에서의  $f(x)$  의 근을 모두 구하여라.

7. 실수체  $\mathbb{R}$  위의 삼차다항식  $f(x) = x^3 - 6x^2 + ax + b$ 가 한 근  $1 + \sqrt{5}i$ 를 가질 때, 복소수체  $\mathbb{C}$  안에서의  $f(x)$ 의 근을 모두 구하여라.

8. 정수를 계수로 가지는 다항식 중에서 두 복소수  $\frac{3+i}{2}$ ,  $\frac{1-2i}{5}$ 를 근으로 가지는 사차다항식을 구하여라.

9. 체  $F$  위의 다항식  $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ 의 세 근이  $a, ar, ar^2$ 일 때, 계수  $a, b, c$  사이에 관계식  $a^3c = b^3$ 이 성립함을 밝혀라.

10. 실수체  $\mathbb{R}$  위의 사차다항식

$$f(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$$

가 복소수체  $\mathbb{C}$  안에서 네 근  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ 를 가질 때, 다음 식을  $a, b, c$ 에 관한 식으로 나타내어라.

(1)  $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2$

(2)  $\alpha^3(\beta\gamma + \gamma\delta + \delta\beta) + \beta^3(\gamma\delta + \delta\alpha + \alpha\gamma)$   
 $+ \gamma^3(\delta\alpha + \alpha\beta + \beta\delta) + \delta^3(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha)$

(3)  $d \neq 0$  일 때,

$$\left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right)^2 + \left(\beta + \frac{1}{\beta}\right)^2 + \left(\gamma + \frac{1}{\gamma}\right)^2 + \left(\delta + \frac{1}{\delta}\right)^2$$

11. 정리 4.6.6을 이용하여 다음 다항식의 근을 복소수체  $\mathbb{C}$  안에서 구하여라.

(1)  $g(x) = x^3 - 6x + 4$

(2)  $g(x) = x^3 - 3\omega x + 2$  여기서,  $\omega = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}$  이다.

12. 정리 4.6.6을 이용하여 다음 다항식의 근을 복소수체  $\mathbb{C}$  안에서 구하여라.

(1)  $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$

(2)  $f(x) = x^3 + 6x^2 - 3x - 148$

(3)  $f(x) = 4x^3 + 12x^2 + 3x + 9$

13. 정리 4.6.7 을 이용하여 복소수체  $\mathbb{C}$  안에서 다항식

$$g(x) = x^4 - x^2 - 2x - 1$$

의 근을 구하여라.

14. 복소수체  $\mathbb{C}$  안에서 다음 다항식의 근을 모두 구하여라.

(1)  $f(x) = 2x^4 - 5x^3 + x^2 - 5x + 2$

(2)  $f(x) = x^7 + x^4 + x^3 + 1$

(3)  $f(x) = 2x^6 - 3x^5 + 3x^4 - 3x^2 + 3x - 2$

15. 복소수체  $\mathbb{C}$  안에서 다음 다항식의 근을 모두 구하여라.

(1)  $f(x) = 3x^5 - 4x^4 + 5x^3 - 5x^2 + 4x - 3$

(2)  $f(x) = x^6 - 3x^5 + 2x^4 - 6x^3 + 2x^2 - 3x + 1$

(3)  $f(x) = x^5 - 3x^4 + x^3 + x^2 - 3x + 1$