

## 제 6 장 보충문제

## 보충문제 (6.1)

1. 다음 명제 중에서 참인 명제를 찾아라.

- (1)  $K = \mathbb{Q}(\sqrt{3}, \sqrt{5})$  에서  $\sigma: K \rightarrow K$  가  $\mathbb{Q}$ -자기동형사상이면  $\sigma(\sqrt{3}) \neq \sqrt{5}$  이다.
- (2) 체  $K$  위의 동형사상  $\sigma: K \rightarrow K$ 에 대하여  $\sigma(u) = u$  이면  $\sigma^3(u) = u^3$  이다.
- (3) 체  $K$  위의 동형사상  $\sigma: K \rightarrow K$ 에 대하여  $\sigma(u) = u$  이면  $\sigma(u^3) = u^3$  이다.

## 보충문제 (6.2)

1. 복소수  $\zeta = \cos \frac{2\pi}{5} + i \sin \frac{2\pi}{5}$  는 유리수체  $\mathbb{Q}$  위의 기약다항식

$$p(x) = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$$

의 근이고,  $K = \mathbb{Q}(\zeta)$  라고 하면 다음과 같은  $\mathbb{Q}$ -자기동형사상  $\sigma: K \rightarrow K$  가 존재한다.

$$\sigma(\zeta) = \zeta^2$$

이 때, 다음 물음에 답하여라.

- (1)  $\sigma(\zeta^2)$ ,  $\sigma(\zeta^3)$  를 구하여라.
- (2)  $\sigma^2(\zeta)$ ,  $\sigma^2(\zeta^2)$ ,  $\sigma^2(\zeta^3)$  를 구하여라.
- (3)  $L = \{u \in K \mid \sigma^2(u) = u\}$  이라고 할 때,

$$L = \{a_0 + a_2(\zeta^2 + \zeta^3) \mid a_0, a_2 \in \mathbb{Q}\}$$

임을 밝히고  $L = \mathbb{Q}(\sqrt{5})$  임을 증명하여라.

2. 유리수체  $\mathbb{Q}$  위에서의 다항식  $f(x) = x^2 - 11$  의 분해체  $K$ 와 Galois 군  $\text{Gal}(K, \mathbb{Q})$  를 결정하여라.
3. 홀수인 素數  $p$ 에 대하여 유리수체  $\mathbb{Q}$  위에서의 다항식  $f(x) = x^p - 3$  의 분해체  $K$ 와 Galois 군  $\text{Gal}(K, \mathbb{Q})$  를 결정하여라.
4. 유리수체  $\mathbb{Q}$  위에서의 다항식  $f(x) = x^2 - 10$  의 분해체  $K$ 와 Galois 군  $\text{Gal}(K, \mathbb{Q})$  를 결정하여라.
5. 홀수인 素數  $p$ 에 대하여 유리수체  $\mathbb{Q}$  위에서의 다항식  $f(x) = x^p - 10$  의 분해체  $K$ 와 Galois 군  $\text{Gal}(K, \mathbb{Q})$  를 결정하여라.