제 9장 보충문제

보충문제 (9.1)

1. 체 $\mathbb{F}_2 = \{0,1\}$ 벡터공간 $\mathbb{F}_2^{\,6}$ 에서

$$\begin{aligned} C = \{&(0,0,0,0,0,0),\ (0,0,1,1,1,0),\ (0,1,0,1,0,1),\\ &(0,1,1,0,1,1),\ (1,0,0,0,1,1),\ (1,0,1,1,0,1),\\ &(1,1,0,1,1,0),\ (1,1,1,0,0,0)\} \end{aligned}$$

는 어떤 유형의 이진 선형부호인지 말하여라.

2. 체 $\mathbb{F}_3 = \{0,1,2\}$ 위의 2×5 행렬

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

를 생성행렬로 가지는 부호를 C라고 할 때, C에 속하는 부호어를 모두 구하고 C가 어떤 유형의 선형부호인지 말하여라.

3. 체 $\mathbb{F}_2 = \{0,1\}$ 위의 선형 $(3,\,2)$ 부호

$$C = \{(0,0,0),\ (1,0,1),\ (0,1,1),\ (1,1,0)\}$$

에 대하여 C의 생성행렬을 구하여라.

4. 체 $\mathbb{F}_2 = \{0,1\}$ 위의 3×6 행렬

$$H = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

를 홀짝 검사행렬로 가지는 부호를 C라고 할 때, C에 속하는 부호어를 모두 구하고 C가 어떤 유형의 선형부호인지를 말하여라.

5. 체 $\mathbb{F}_2$ 위의 선형부호 C가 다음과 같은 $\mathbb{F}_2$ 위의 $(n-1)\times n$ 행렬 H를 홀짝 검사행렬로 가지는 부호라고 하자.

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ & & & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \quad \text{(각 행에 } 1 \text{이 두 개)}$$

이 때, C에 속하는 부호어를 모두 구하고 C가 어떤 유형의 선형부호인지를 말하여라.

6. 체 $\mathbb{F}_2$ 위에서 4×7 행렬

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

에 기본 행 변형을 시행하여 G를 표준 생성행렬로 변형하여라.

그리고, G를 생성행렬로 가지는 부호 C의 유형을 말하여라.

7. 체 $\mathbb{F}_2 = \{0, 1\}$ 위의 3×4행렬

$$H = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

에 기본 행 변형을 시행하여 표준 홀짝 검사행렬로 변형하여라.

그리고, H를 홀짝 검사행렬로 가지는 선형부호 C에 속하는 부호어를 모두 구하고 C의 유형을 말하여라.

8. 체 $\mathbb{F}_2 = \{0, 1\}$ 위의 3×7 행렬

$$G = \left[\begin{array}{ccc:cccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

를 생성행렬로 가지는 부호를 C라고 할 때, C의 유형을 말하고 또 C의 표준 홀짝 검사행렬을 구하여라.

보충문제 (9.2)

1. 다음 집합은 체 $\mathbb{F}_2$ 위의 선형 $(6,3)$ 부호이다.

$$\begin{aligned} C = \{&(0,0,0,0,0,0),\ (0,1,1,0,1,1),\ (1,1,0,1,1,0),\\ &(0,0,1,1,1,0),\ (1,0,1,1,0,1),\ (0,1,0,1,0,1),\\ &(1,1,1,0,0,0),\ (1,0,0,0,1,1)\} \end{aligned}$$

부호 C 의 최소거라 $d(C)$ 를 구하여라.

2. 체 $\mathbb{F}_2 = \{0,1\}$ 위의 벡터공간 ${\mathbb{F}_2}^4$ 에 속하는 2^4 의 벡터 중에서 Hamming 무게가 2 인 벡터를 모두 구하여라.

3. 다음과 같은 체 $\mathbb{F}_2$ 위의 선형부호가 완전부호인디를 판정하여라.

$$\begin{aligned} C = \{&(0,0,0,0,0,0),(0,1,1,0,1,1),(1,1,0,1,1,0),\\ &(0,0,1,1,1,0),\ (1,0,1,1,0,1),\ (0,1,0,1,0,1),\\ &(1,1,1,0,0,0),\ (1,0,0,0,1,1)\} \end{aligned}$$

4. 이진 선형 $(5,1,5)$ 부호 $C = \{(0,0,0,0,0),\ (1,1,1,1,1)\}$ 가 완전 부호인지를 판정하여라.

5. 체 $\mathbb{F}_2$ 위의 선형 $(n,1,n)$ 부호 $C = \{(0,0,\cdots,0,0),\ (1,1,\cdots,1,1)\}$ 에서 $n = 2t+1$ 일 때, C 가 완전부호임을 증명하여라.

6. 체 $\mathbb{F}_2$ 위의 4×7 행렬

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

를 생성행렬로 가지는 부호를 C 라고 할 때, C 에 속하는 부호어를 모두 구하고 $d(C)$ 를 구하여라. 또, C 가 체 $\mathbb{F}_2$ 위의 완전부호임을 밝혀라.

7. 체 $\mathbb{F}_2$ 위의 선형부호 C에 대하여 체 $\mathbb{F}_2$ 위의 두 행렬

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

가 각각 C의 생성행렬, 홀짝 검사행렬이라고 할 때, 다음 물음에 답하여라.

(1) 부호 C에 속해 있는 부호어를 모두 구하여라.

(2) 부호 C가 이진 선형 $(5, 2, 3)$ 부호임을 확인하여라.

(3) 수신된 벡터가 $w = (1, 1, 1, 1, 0)$일 때, w의 신드롬을 구하여 w를 부호어 v로 복호하여라.

보충문제 (9.3)

1. 이진 Hamming 부호 Ham $(2, 2)$ 의 홀짝 검사행렬를 세 개만 들어르라. 그리고, 이 부호에 속하는 부호어를 모두 구하여라.

2. 이진 Hamming 부호 Ham $(3, 2)$ 의 홀짝 검사행렬로서

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

를 택할 때, 이 부호의 생성핼렬 G 를 구하고 이 부호에 속하는 부호어를 모두 구하여라.

3. 체 $\mathbb{F}_2$ 위의 3×7 행렬

$$H = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

를 이진 Hamming 부호 Ham $(3, 2)$ 의 홀짝 검사행렬로 택할 때, 수신된 벡터가 $w = (1,1,1,0,1,0,0)$ 인 경우에 이를 부호어로 복호하여라.

4. 체 $\mathbb{F}_5 = \{0,1,2,3,4\}$ 위의 2×5 행렬

$$H = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad H' = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

를 홀짝 검사행렬로 가지는 부호를 각각 C, C' 이라고 할 때, 부호 C 의 한 생성행렬 G 와 부호 C' 의 한 생성행렬 G' 를 구하여라.

보충문제 (9.4)

1. 체 $\mathbb{F}_2$ 위의 3×7 행렬

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

를 생성행렬로 가지는 부호를 C라고 할 때, C는 순환부호인지를 판정하여라.

2. 체 $\mathbb{F}_3$ 위에서 다항식 x^4-1은 다음과 같이 인수분해된다.

$$x^4-1 = (x^2-1)(x^2+1) = (x+1)(x+2)(x^2+1)$$

(1) $g(x) = 1+x+x^2+x^3$인 경우에 $g(x)h(x) = x^4-1$인 다항식 $h(x)$를 구하여라.

그리고, 체 $\mathbb{F}_3$ 위의 순환 $(4, 1)$ 부호 C와 그 쌍대부호를 구하여라.

(2) $g(x) = 2+x^2$인 경우에 $g(x)h(x) = x^4-1$인 다항식 $h(x)$를 구하여라.

그리고, 체 $\mathbb{F}_3$ 위의 순환 $(4, 2)$ 부호 C와 그 쌍대부호를 구하여라.

보충문제 (9.5)

1. 다음 두 다항식은 Galois 체 $\mathbb{F}_2$ 위의 기약다항식이다.

$$p(x) = x^{11}+x^9+x^7+x^6+x^5+x+1$$

$$q(x) = x^{11}+x^{10}+x^6+x^5+x^4+x^2+1$$

다음 물음에 답하여라.

(1) 체 $\mathbb{F}_2$ 위에서 $x^{23}-1$ 은 다음과 같이 인수분해됨을 확인하여라.

$$x^{23}-1 = (x-1)\,p(x)\,q(x)$$

(2) Galois 체 $\mathbb{F}_{2^{11}}$ 에서 원소 ξ가 $p(x)$ 의 근일 때, $p(x)$ 의 근 전체를 구하여라.

(3) Galois 체 $\mathbb{F}_{2^{11}}$ 에서 원소 ξ가 $q(x)$ 의 근일 때, $q(x)$ 의 근 전체를 구하여라.