수리논술의 이론과 실제

- 문제의 예시답안 -

강옥기, 이장주, 이환철, 손정화

제6장 과정 지식의 수리논술 실제

6.1 문제해결

문제1.

■ 예시답안.

대부분은 보다가 1m보다 적게 움직였을 것이라고 부정확하게 추측할 것이다. 그러나 그 보트는 1m보다 많이 움직인다. 그 설명은 다음 그림과 같다.

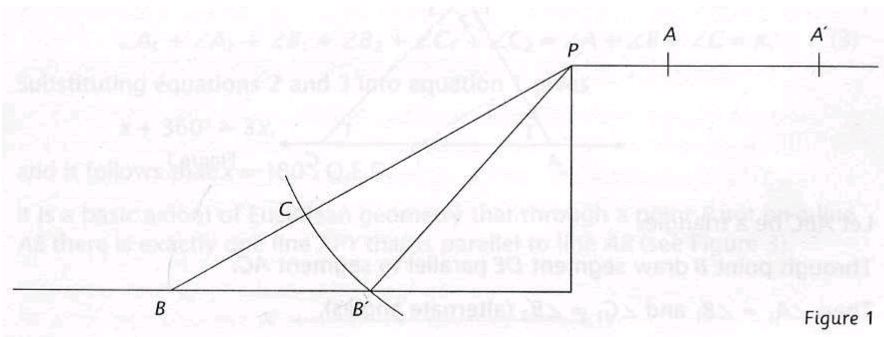


Figure 1

그 남자가 A에서 A′로 움직임에 따라 보트는 B에서 B′로 움직인다. 로프의 길이는 APB이고 그 길이는 A′PB′와 같다. 또 $\mathrm{PC}=\mathrm{PB}'$, $\mathrm{AA}'=1(\mathrm{m})$이므로 $\mathrm{BC}=1(\mathrm{m})$이다.

$$\mathrm{BB}'+\mathrm{B}'\mathrm{P}>\mathrm{BP}\ \ (\text{삼각형의 성질})$$

이므로

$$\mathrm{BB}'+\mathrm{B}'\mathrm{P}>\mathrm{BC}+\mathrm{CP}$$

따라서 $\mathrm{B}'\mathrm{P}=\mathrm{CP}$이므로

$$\mathrm{BB}'>\mathrm{BC}$$

문제2.

■ 예시답안.

1단계 - 문제의 이해

1) 혈중알코올 농도가 최고 수준에 이르기까지 소요되는 시간은? 30~90분
2) 음주 운전금지 기준은? 0.05%
3) 최초 단속시 측정값은? 0.056%
4) 15분 후 채혈 검사에 의한 측정값은? 0.049%
5) 위드마크 공식에 의해 역추산한 측정값은? 0.051%

2단계 - 계획의 작성

1) 주어진 혈중 알코올 농도를 이용하여 간단한 위드마크 공식을 만들어본다.
2) 제시문에서 역추산한 혈중 알코올 농도와 채혈 검사 시의 혈중 알코올 농도를 비교하여 시간당 변화량을 구해본다.
3) 제시문의 판결에 나타난 논리를 파악한다.

3단계 - 실행

1) 음주 운전자의 혈중 알코올 농도는 시간당 일정하게 감소하는데 15분 동안 0.002%의 변화가 있었으므로 1시간에 0.008%의 알코올 농도가 변하는 셈이다. 그러므로
   (적발 시 알코올 농도)
   =(채혈 검사 시 알코올 농도)+(적발 후 채혈 시까지 걸린 시간)×0.008%
2) 혈중 알코올 농도가 최고 수준에 이르기까지는 30~90분의 시간이 소요되므로 원고가 술을 마신 후 시간이 얼마나 경과되었는가에 따라 위드마크 공식에 의한 혈중 알코올 농도는 감소할 수도 있고 증가할 수도 있다. 따라서 원고의 혈중 알코올 농도가 감소하였다고 단정할 수 없는데도 감소한 것으로 가정하여 적발 당시의 음주 수치를 0.051%로 역추산한 것은 잘못이다. 만일 증가한 것으로 가정하면 0.047%가 나와 적발 시 알코올 농도는 줄어들게 되어 음주운전 금지 기준보다 낮아진다. 따라서 원고가 술을 마신 후 시간이 얼마나 경과되었는지 알지 못하는 상황에서 혈중 알코올 농도를 역추산해 운전면허를 취소하는 것은 부당하다.

4단계 - 반성

1) 검산 과정을 통해 결과가 맞는지 확인하도록 한다.
2) 다른 문제에 활용하도록 한다.

6.2 의사소통

문제3.

■ 예시답안.

학생1	학생2
네 말이 옳아. 예를 들어 $\sqrt{2}+\sqrt{3}$과 같이 근호 안의 수가 다르면 항상 덧셈이나 뺄셈이 불가능하지. 물론 $\sqrt{2}+\sqrt{8}$와 같은 경우는 덧셈이 된다고 말할 수도 있으나 이 식은 $\sqrt{2}+2\sqrt{2}$와 같이 변형하지 않고는 덧셈을 할 수 없잖아.	네 말은 틀려. 근호 안의 수가 달라도 덧셈, 뺄셈이 되는 경우가 있어. 예를 들어 $\sqrt{2}+\sqrt{8}$와 같은 경우는 근호 안의 수를 같게 만들어 $\sqrt{2}+2\sqrt{2}$로 나타내면 덧셈이 가능하지.

문제4.

■ 예시답안.

풀이 생략

6.3 추론

문제5.

■ 예시답안.

[1] 직사각형의 가로와 세로의 길이를 각각 x, y라고 하면 둘레는 $2x+2y$이므로 $2x+2y=k$ (k는 양의 상수)로 표현할 수 있다. 이때 직사각형의 넓이 (A)는 $A=xy$이며, 다음의 식을 얻을 수 있다.

$$A=xy=x\left(-x+\frac{k}{2}\right)=-x^2+\frac{k}{2}x=-\left(x-\frac{k}{4}\right)^2+\frac{k^2}{16}$$

따라서 $\frac{dA}{dx}=-2x+\frac{k}{2}$이다. 즉 $x=\frac{k}{4}$ 근처에서 $\frac{dA}{dx}$의 부호가 양에서 음으로 변함을 알 수 있으며 (또는 $A=-2<0$), 따라서 함수 A는 $x=\frac{k}{4}$일 때 최댓값을 가지게 된다. 즉 $x=y=\frac{k}{4}$일 때, 즉 정사각형일 때 넓이가 최대가 됨을 알 수 있다.

[1]의 다른 풀이

직사각형의 가로와 세로의 길이를 각각 x, y $(x, y>0)$라고 하면 둘레는 $2x+2y$이므로 산술기하평균에 의하여 $2x+2y \geq 2\sqrt{4xy}$를 만족한다. 따라서 직사각형의 넓이는 $A=xy$이며, $xy \leq \frac{k^2}{16}$를 만족한다. 이때 등호는 $x=y$일 때 성립하므로 $x=y=\frac{k}{4}$일 때, 즉 정사각형일 때 넓이가 최대가 됨을 알 수 있다.

[2] 실제로 감긴 두께는 넓이에 해당하므로 등적정리에 의하여 같은 넓이를 가진 도형 중에서 둘레(즉 감긴 화장지의 길이)가 최소가 되는 것은 원이므로, 원모양으로 화장지를 계속 감아놓았을 것이다. 물론 둥근 형태이므로 사용의 편리함도 생각하였을 것이다.

[3] 먼저 등적정리를 가정하고, 넓이가 같은 임의의 도형과 원을 생각하자. 등적정리에 의하여 원의 둘레가 더 짧다. 따라서 원을 임의의 도형과 둘레가 같아지도록 확대시키면 새로 만들어진 원은 임의의 도형과 둘레는 같지만 넓이는 더 크게 된다. 따라서 등주정리가 성립함을 알 수 있다.
역으로 등주정리를 가정하고 둘레가 같은 임의의 도형과 원을 생각하면 등주정리에 의하여 넓이는 원이 더 크다. 따라서 원을 임의의 도형과 넓이가 같아지도록 작게 해주면 넓이가 같은 도형 중에서 원의 둘레(의 길이)가 가장 작게 되고, 따라서 등적정리가 성립함을 알 수 있다.

문제6.

■ 예시답안.

표를 정리하면 다음과 같다.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
A					o					o
B	o			o		o		o		
C			o				o		o	o
D		o								
E	o		o			o		o		
F				o		o			o	
G		o		o	o		o			
H	o	o					o		o	
I			o		o			o		o

우선 2번을 선택해야 한다. D기능을 보유한 유일한 사람이기 때문이다. 이후의 선택 과정에 D,G,H 기능은 고려하지 않는다.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
A					o					o
B	o			o		o		o		
C			o				o		o	o
D		o								
E	o		o			o		o		
F				o		o			o	
G		o		o	o		o			
H	o	o					o		o	
I				o		o		o		o

그리고 6번을 선택한다. 가장 많은 기능을 갖고 있기 때문이다. 이후의 선택 과정에 B,E,F 기능은 고려하지 않는다.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
A					o					o
B	o			o		o		o		
C			o				o		o	o
D		o								
E	o		o			o		o		
F				o		o			o	
G		o		o	o		o			
H	o	o					o		o	
I			o		o			o		o

이제 10번을 선택하면 모든 기능이 가능하다. 따라서 최소 승무 인원은 3명이다.

제7장 내용 지식의 수리논술 실제

7.1 대수

문제1.

■ 예시답안.

[1] 통신문 'HUNT'에 대응하는 숫자는 각각 8 , 21 , 14 , 20 이다. 이때, key가 2일 때

$$\begin{aligned} 8^2 &= 64 = 29 \times 2 + 6 \\ 21^2 &= 441 = 29 \times 15 + 6 \\ 14^2 &= 196 = 29 \times 6 + 22 \\ 20^2 &= 400 = 29 \times 13 + 23 \end{aligned}$$

이므로 통신문 'HUNT'는 숫자 6, 6, 22, 23에 대응하는 'FFVW'로 변환된다.
또 key가 3이면

$$\begin{aligned} 8^3 &= 8(29 \times 2 + 6) = 29 \times 16 + 48 = 29 \times 17 + 19 \\ 21^3 &= 21(29 \times 15 + 6) = 29 \times 315 + 126 = 29 \times 319 + 10 \\ 14^3 &= 14(29 \times 6 + 22) = 29 \times 84 + 308 = 29 \times 94 + 18 \\ 20^3 &= 20(29 \times 13 + 23) = 29 \times 260 + 460 = 29 \times 275 + 25 \end{aligned}$$

이 되므로 숫자 19, 10, 18, 25에 대응하는 'SJRY'로 변환된다.
이때, 문제점은 key가 2일 때, 서로 다른 문자 H와 U가 모두 F로 변환되는 문제가 발생하므로 이를 해독해도 정확한 뜻을 확인하기가 어렵다.

[2] 먼저 4^{28}을 29로 나눈 나머지가 1임을 설명하면 다음과 같다.
논제 (2)의 표를 이용하면 $4^3 \equiv 6 \pmod{29}$이다. 여기서 제시문 (나)의 법칙 (iv)에 의해

$$\begin{aligned} 4^6 &= 6 \times 6 \equiv 7 \pmod{29} \\ 4^{12} &\equiv 7 \times 7 \equiv 20 \pmod{29} \end{aligned}$$

이므로 $4^{13} \equiv 4 \times 20 \equiv 22 \pmod{29}$가 되고 $4^{14} \equiv 4 \times 22 \equiv 1 \pmod{29}$이다. 따라서

$$4^{28} \equiv 1 \times 1 \equiv 1 \pmod{29}$$

가 된다. 다음 임의의 정수 a가 29의 배수가 아닐 때 a^{28}을 29로 나눈 나머지를 설명하면 아래와 같다.

임의의 정수 a가 29의 배수가 아니라 하자. $1, 2, 3, \cdots, 28$ 은 29와 각각 서로소이므로 $a, 2a, 3a, \cdots, 28a$ 를 29로 나눈 나머지는 $1, 2, \cdots, 28$ 과 일대일 대응한다. 따라서

$$\begin{aligned} 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times 28 &\equiv a \times 2a \times 3a \times \cdots \times 28a \pmod{29} \\ &\equiv a^{28}(1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times 28) \pmod{29} \end{aligned}$$

그런데 $1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times 28$ 은 29와 서로소이므로 제시문 (나)의 법칙(ⅴ)에 의해

$$a^{28} \equiv 1 \pmod{29}$$

[3] 암호문을 정확하게 해독하려면 변환규칙 숫자 n에 대응하는 문자→ n^k을 29로 나눈 나머지에 대응하는 문자가 일대일 대응이 되어야 한다. 여기서 $n \neq m$에 대해 $n^k \equiv \alpha \pmod{29}$, $m^k \equiv \beta \pmod{29}$ (단 n, m, α, β는 28 이하의 자연수)라 하면 $n^k = 29p + \alpha$, $m^k = 29q + \beta$(단 p, q는 자연수이므로 $\alpha = n^k - 29p$, $\beta = m^k - 29q$가 된다. 따라서 $\alpha - \beta = n^k - m^k - 29r$(단 r은 정수이다. 여기서 k가 짝수이면 $n^k - m^k$는 반드시 인수 $n+m$을 가지고 $m+n=29$인 자연수 m, n에 대해서는 $n^k - m^k$는 29의 배수가 되므로 $\alpha \equiv \beta \pmod{29}$가 된다. 즉 변환규칙은 일대일대응이 아니다 따라서 암호문을 정확하게 해독하려면 key k가 홀수가 되어야 한다.

또 key k가 $28 = 2^2 \cdot 7$의 약수인 7이 되면 $16^7 \equiv 2^{28} \equiv 1 \pmod{29}$이 되어 이것 역시 key로 사용하기가 부적절하다.

이상을 정리해 보면 암호문을 정확하게 해독하기 위해 key가 가져야 할 조건은 28과 서로소인 자연수이다

문제2.

■ 예시답안.

[1] $R_0 = \{3k \mid k\text{는 정수}\}, R_1 = \{3k+1 \mid k\text{는 정수}\}, R_2 = \{3k+2 \mid k\text{는 정수}\}$이다. 임의의 정수 a는 3으로 나눌 때 나머지가 0 또는 1 또는 2이므로 $a \in R_0$ 또는 $a \in R_1$ 또는 $a \in R_2$ 이다. 따라서 $R_0 \cup R_1 \cup R_2 = \mathbb{Z}$ 이다.

[2] $a \in R_i \cap R_j$라고 하면 적당한 정수 m, n에 대하여 $a = 3m + i = 3n + j$로 나타낼 수 있으므로 $3(m-n) = j - i$이다. 따라서 $j - i$는 3의 배수이고 $0 \le i \le 2$, $0 \le j \le 2$이므로 $i = j$이다. 그러므로 $i \ne j$이면, $R_i \cap R_j = \varnothing$이다.

[3] 집합 R_i가 〈성질 1〉을 만족한다면 $a, b \in R_i$, $b \ne 0$에 대하여 적당한 원소 c, $d \in R_i$가 존재하여 $a = b \cdot c + d$가 성립한다. 그런데 $a = 3k + i$, $b = 3m + i$, $c = 3n + i$, $d = 3p + i$인 정수 k, m, n, p가 존재하므로 $3k + i = (3m+i)(3n+i) + (3p+i) = 3q + i^2 + i$ 인 정수 q가 존재한다. 따라서 $3(k-q) = i^2$ 이고 i^2은 3의 배수이므로 $i = 0$이다. 또한 R_0에 속하는 원소 $3k, 3m$에 대하여 원소 $3n, 3(k-mn) \in R_0$이 존재하여 등식 $3k = (3m)(3n) + 3(k - 3mn)$이 성립하므로 〈성질 1〉을 만족하는 집합은 R_0뿐이다.

[4] 원소 $3, 6 \in R_0$에 대하여 $3 = 6 \cdot 0 + 3 = 6 \cdot 3 + (-15)$이고 $0, 3, -15 \in R_0$이므로 집합 R_0는 〈성질 2〉를 만족하지 않는다. 따라서 〈성질 1〉을 만족하는 집합 중에서 〈성질 2〉를 만족하는 집합은 존재하지 않는다.

[5] 연립방정식의 계수로 이루어진 행렬 $M = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix}$의 행렬식 $\det(M)$가 0이 아닌 조건을 찾으면 된다. 그런데 적당한 정수 k, m, n, p에 대하여 $a_1 = 3k$, $a_2 = 3m + 1$, $a_3 = 3n + 2$, $a_4 = 3p + i$라고 놓으면 $\det(M) = (3k)(3p+i) - (3m+1)(3n+2) = 3q + 1$인 정수 q가 존재하고 $3q + 1 \ne 0$이므로 a_4는 R_0, R_1, R_2 중 어느 집합에 속해도 된다.

[6] 함수 g는 R_2에 속하지 않는 모든 점 x에 대하여 $g(x) = 0$이다. 따라서 $a \notin R_2$일 때 $\lim_{x \to a} g(x) = 0$이다. 또한 $a \in R_2$일 때 $g(x)$의 좌극한과 우극한은 각각 $\lim_{x \to a^-} g(x) = 0$ 이고 $\lim_{x \to a^+} g(x) = 0$ 이므로 $\lim_{x \to a} g(x) = 0$ 이다. 따라서 $A = \mathbb{R}$이다.

문제3.

■ 예시답안.

[1] 답안 1) $(3^{2.5})^2 = 3^5 = 243$, $(2.5^3)^2 = (2.5)^6 = \dfrac{5^6}{2^6} > 244$ $\quad \therefore\ 3^{2.5} < 2.5^3$

답안 2) $y = \dfrac{2.5^3}{3^{2.5}}$ $\log y = 3\log 2.5 - 2.5\log 3 = 3(1-2\log 2) - 2.5\log 3$

$= 3 - 6\log 2 - 2.5\log 3$

$\log 2 < 0.3011$, $\log 3 < 0.4772$이므로

$\log y > 3 - 6\times 0.3011 - 2.5\times 0.4772 = 0.0004$, $0 > y > 1$

$\therefore\ 3^{2.5} < 2.5^3$

[2] 답안 1) log를 활용한 풀이

$y = \dfrac{2.4^3}{3^{2.4}}$ $\quad \log y = 3\log 2.4 - 2.4\log 3 = 0.6\log 3 + 9\log 2 - 3$

$\log 2 < 0.3011$, $\log 3 < 0.4772$이므로

$0.6\log 3 + 9\log 2 < (0.6)(0.4772) + 9(0.3011) = 0.28632 + 2.7099$

$= 2.99622 < 3$

$\therefore\ \log y < 0$, $y < 1$이므로 $3^{2.4} > 2.4^3$

답안 2) 거듭제곱을 직접 계산

$\left(\dfrac{2.4^3}{3^{2.4}}\right)^5 = \dfrac{2.4^{15}}{3^{12}} = \dfrac{504857.3\cdots}{5.31441} < 1$ $\quad \therefore\ 3^{2.4} > 2.4^3$

[3] $f(x) = x^{\frac{1}{x}}$ $\quad \ln f(x) = \dfrac{1}{x}\ln x$

양변을 x에 대해 미분하면,

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{\frac{1}{x}\cdot x - (\ln x)\cdot 1}{x^2} = \frac{1-\ln x}{x^2},\quad f'(x) = x^{\frac{1}{x}}\left(\frac{1-\ln x}{x^2}\right)$$

$x > 0$이므로 $\dfrac{x^{\frac{1}{x}}}{x^2} > 0$

$\therefore\ 0 < x < e$이면 $f'(x) > 0$이므로 $f(x)$는 증가하고,

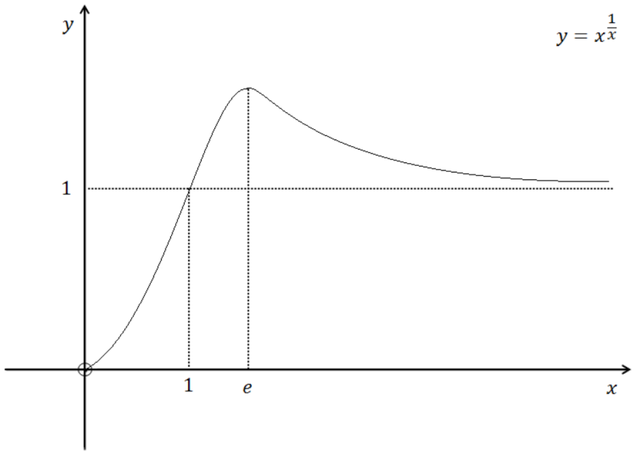
$x > e$이면 $f'(x) < 0$이므로 $f(x)$는 감소한다.

[4] $e < 3 < \pi$이므로 [3]의 결론을 이용하면,

$f(3) > f(\pi)$, 즉 $3^{\frac{1}{3}} > \pi^{\frac{1}{\pi}}$, $(3^{\frac{1}{3}})^{3\pi} > (\pi^{\frac{1}{\pi}})^{3\pi}$

$\therefore\ 3^{\pi} > \pi^3$

[5] $f(x)=x^{\frac{1}{x}}$, $\ln f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$, $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{x}=-\infty$이므로 $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}f(x)=0$이다. $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x}=0$ 이므로 $\displaystyle\lim_{x\to\infty}f(x)=1$이다. 이를 [3]에서 조사된 $f(x)$의 증감에 적용시켜 $y=f(x)$의 그래프 개형을 그려보면 아래와 같다.



$b^{\frac{1}{b}}=a^{\frac{1}{a}}$이면 $(b^{\frac{1}{b}})^{ab}=(a^{\frac{1}{a}})^{ab}$, $b^a=a^b$이다.

따라서 $a^x=x^a$에 대해 $x\neq a$인 양의 실수 x는 $0<a\le 1$ 또는 $a=e$일 때는 존재하지 않고, $1<a<e$ 또는 $a>e$이면 1개 존재한다.

문제4.

■ 예시답안.

[1] $G(x)=px^2+qx+r$

$$=p\left(x+\frac{p}{2p}\right)^2+r-\frac{q^2}{4p}$$

$$=pF\left(x+\frac{q}{2p}\right)+r-\frac{q^2}{4p}$$

이므로 제시문 (가)의 정의에 따라 $F(x)$와 $G(x)$는 서로 닮은꼴이다.

[2] 조건을 만족하는 함수 $K(x)$는 $H(x)$와 합동이므로 모든 실수 x에 대해 $K(x)=aH(x+b)+c$이 성립하는 실수 a, b, c가 존재한다. (단, $|a|=1$)

그런데 조건 ②에 의해 $a=-1$이어야 한다. 그러면 $K(x)=-(x+b)^3-3(x+b)^2+c-5$이다. 조건 ③에 의해 세 근의 합이 0이 되어야 하므로 근과 계수와의 관계에 의해 2차항의 계수 $-3b-3$은 0이다. 따라서 $b=-1$이다.

그러므로 $K(x)=-x^3+3x+d$의 형태가 되어야 한다(단, d는 실수). 그런데 조건 ③에 의해 방정식 $K(x)=0$은 서로 다른 세 실근을 가져야 하므로, 극댓값과 극솟값의 곱이 음수가 되어야 한다. $K'(x)=-3x^2+3=3(1-x^2)$이므로 극댓값과 극솟값의 곱은 $K(1)K(-1)=(d+2)(d-2)$가 된다. 따라서 $|d|<2$인 모든 실수 d에 대해 $K(x)=-x^3+3x+d$가 세 조건을 만족하는 함수가 된다.

이제 $K(x)=-x^3+3x+d$(단, $|d|<2$)가 주어진 세 조건을 만족하는지를 살펴보자. $K(x)=-H(x-1)+7+d$이므로 $K(x)$와 $H(x)$는 제시문 (가)에 따라 합동이다. 또한 $K(x)$의 최고차항의 계수가 -1이므로 $K(x)$는 음으로 발산하는 함수이다. 마지막으로 $K(x)$는 극댓값 $K(1)$을 갖고 극솟값 $K(-1)$을 가지고 극값의 곱 $K(-1)K(1)$은 $K(-1)K(1)=(d-2)(d+2)<0$이므로 방정식 $K(x)=0$은 서로 다른 세 실근을 가진다.그런데 $K(x)$의 2차항의 계수가 0이므로 세 실근의 합은 0이다. 따라서 $K(x)$는 주어진 세 조건을 만족한다.

문제5.

■ 예시답안.

[1] D의 좌표: $(1-t)(0,1)+t(2,1)=(2t,1)$

E의 좌표: $(1-t)(2,1)+t(2,0)=(2,1-t)$

P의 좌표: $(1-t)(2t,1)+t(2,1-t)=\left(4t-2t^2,1-t^2\right)$

점 P의 자취를 매개변수 형식으로 표현하면,

$$\begin{cases} x=-2t^2+4t \\ y=-t^2+1 \end{cases} \quad (\text{단, } 0<t<1)$$

이다. 매개변수 형식의 표현으로부터

$$x-2y=4t-2 \quad \cdots (1)$$

이다. 식 (1)을 변수 t에 관해 정리하면

$$t=\frac{x-2y+2}{4} \quad \cdots (2)$$

이다. 식 (2)를 $y=-t^2+1$에 대입하면,

$$y=-\left(\frac{x-2y+2}{4}\right)^2+1$$

이고 이를 정리하면

$$x^2-4xy+4y^2+4x+8y-12=0$$

이다. 따라서 $a_1=-4$, $a_2=4$, $a_3=4$, $a_4=8$, $a_5=-12$.

[2] 주어진 일차변환을 나타내는 관계식 $\begin{matrix} x'=-x+2y \\ y'=x-y \end{matrix}$

에 곡선 α의 매개변수 형식 $\begin{matrix} x=-2t^2+4t \\ y=-t^2+1 \end{matrix}$

을 대입하면 변환된 곡선 상의 한 점 (x',y')의 좌표를 매개변수 t에 관해 표현할 수 있다.

$$x'=-4t+2$$

$$y'=-t^2+4t-1$$

즉, 변환된 곡선의 매개변수 형식은 다음과 같다.

$$x=-4t+2 \quad \cdots (1)$$

$$y=-t^2+4t-1 \quad \cdots (2)$$

식 (1)을 변수 t에 관해 풀면 다음과 같다.

$$t=\frac{-x+2}{4}$$

이를 식 (2)에 대입하면,

$$y=-t^2+4t-1=-\left(\frac{-x+2}{4}\right)^2+4\left(\frac{-x+2}{4}\right)-1=\frac{1}{16}\left(-x^2-12x+12\right)$$

즉, 변환된 곡선의 명시적 표현은 아래와 같다.

$$y=-\frac{1}{16}x^2-\frac{3}{4}x+\frac{3}{4}$$

따라서 $g(x)=-\frac{1}{16}x^2-\frac{3}{4}x+\frac{3}{4}$

한편 식 (1)에 의하면 변환된 곡선의 x좌표가 변수 t에 관한 일차식으로 표현되므로 변수 t가 0과 1 사이에서 변할 때, x좌표의 범위가 아래와 같음을 쉽게 알 수 있다.

$$-4\cdot 1+2<x<4\cdot 0+2$$

즉,

$$-2<x<2$$

따라서 $a=-2$ 이고 $b=2$.

문제6.

■ 예시답안.

[정리 1]의 대우명제는 집합 S에 속하는 한 점 Q에 대하여 [$\overrightarrow{\mathrm{OP}} \circ \overrightarrow{\mathrm{OQ}}$이 l의 약수가 아니면 집합 S에 속하는 어떤 점 R은 $\overrightarrow{\mathrm{OP}} \circ \overrightarrow{\mathrm{OQ}} > \overrightarrow{\mathrm{OP}} \circ \overrightarrow{\mathrm{OR}}$이 성립한다.]이다. 평면 α는 원점 $\mathrm{O}(0,\ 0,\ 0)$을 지나고 $\overrightarrow{\mathrm{OP}} = (l,\ m,\ n)$ (단, $l,\ m,\ n$은 자연수)에 수직이므로 평면 α의 방정식을 구하면 $\alpha:\ lx+my+nz=0$이다.

집합 S 속에 있는 한 점을 $\mathrm{Q}(a,\ b,\ c)$ (단, $a,\ b,\ c$는 정수)와 연속함수 $f(x,\ y,\ z)=lx+my+nz$라 하자. 점 P, Q, R은 평면 α (즉 $f(x,\ y,\ z)=0$)에 의해 구분되는 같은 쪽 영역 V 속에 있는 정수 점이어야 한다. 또한 점 $\mathrm{P}(l,\ m,\ n)$는 평면 α 위에 있지 않은 점이므로

$f(P)=f(l,\ m,\ n)=l^2+m^2+n^2 \neq 0$이고 $f(P)>0$이 되므로

$f(Q)=f(a,\ b,\ c)=al+bm+cn>0$이고 $f(R)>0$도 성립되어야 한다.

그럼 [정리 1]의 대우명제를 증명하기 위해 다음의 두 가지 경우로 나누어 볼 수 있다. $\overrightarrow{\mathrm{OP}} \circ \overrightarrow{\mathrm{OQ}}$이 l의 약수가 아니면 $\overrightarrow{\mathrm{OP}} \circ \overrightarrow{\mathrm{OQ}}$가 l과 같은 경우를 제외하고

i) $\overrightarrow{\mathrm{OP}} \circ \overrightarrow{\mathrm{OQ}} > l$ ii) $\overrightarrow{\mathrm{OP}} \circ \overrightarrow{\mathrm{OQ}} < l$ 두 가지 경우뿐이다.

i) $\overrightarrow{\mathrm{OP}} \circ \overrightarrow{\mathrm{OQ}} > l$인 경우

한 점 R을 $\mathrm{R}(a-1,\ b,\ c)$로 택하면

$$
\begin{aligned}
f(\mathrm{R}) &= (a-1,\ b,\ c) = (a-1)l+bm+cn \\
&= la+mb+nc-l \qquad (\overrightarrow{\mathrm{OP}} \circ \overrightarrow{\mathrm{OQ}} = la+mb+nc\text{에 의해}) \\
&= \overrightarrow{\mathrm{OP}} \circ \overrightarrow{\mathrm{OQ}} - l > 0 \qquad (\text{가정 } \overrightarrow{\mathrm{OP}} \circ \overrightarrow{\mathrm{OQ}} > l\text{에 의해})
\end{aligned}
$$

$f(\mathrm{R})>0$이므로 점 R은 점 P와 같은 쪽 영역 V에 속하는 S의 한 원소가 된다.

그러면 $\overrightarrow{\mathrm{OP}} \circ \overrightarrow{\mathrm{OQ}} = la+mb+nc$, $\overrightarrow{\mathrm{OP}} \circ \overrightarrow{\mathrm{OR}} = (a-1)l+bm+cn$이므로

$$
\begin{aligned}
\overrightarrow{\mathrm{OP}} \circ \overrightarrow{\mathrm{OQ}} - \overrightarrow{\mathrm{OP}} \circ \overrightarrow{\mathrm{OR}} &= la+mb+nc-((a-1)l+bm+cn) \\
&= la+mb+nc-(al+bm+cn-l) \\
&= l > 0 \ (\text{단, } l\text{은 자연수})
\end{aligned}
$$

따라서 $\overrightarrow{\mathrm{OP}} \circ \overrightarrow{\mathrm{OQ}} > \overrightarrow{\mathrm{OP}} \circ \overrightarrow{\mathrm{OR}}$이 성립된다.

ii) $\overrightarrow{\mathrm{OP}} \circ \overrightarrow{\mathrm{OQ}} < l$인 경우

$\overrightarrow{\mathrm{OP}} \circ \overrightarrow{\mathrm{OQ}}$는 $\overrightarrow{\mathrm{OP}} \circ \overrightarrow{\mathrm{OQ}} = la+mb+nc > 0$이므로 $0 < \overrightarrow{\mathrm{OP}} \circ \overrightarrow{\mathrm{OQ}} < l$인 자연수이다.

$\overrightarrow{\mathrm{OP}} \circ \overrightarrow{\mathrm{OQ}}$는 l의 약수가 아니므로 나머지정리에 의해 $l = \overrightarrow{\mathrm{OP}} \circ \overrightarrow{\mathrm{OQ}} \cdot M + r$을 만족하는 음이 아닌 정수 M과 $0 < r < \overrightarrow{\mathrm{OP}} \circ \overrightarrow{\mathrm{OQ}} < l$인 자연수 r이 항상 존재해야 한다.

만일 자연수 $l,\ m,\ n$의 최대공약수 $\gcd(l,\ m,\ n)=l$이라 하면

$$
\begin{aligned}
l &= (\overrightarrow{\mathrm{OP}} \circ \overrightarrow{\mathrm{OQ}}) \cdot M + r \\
&= (al+bm+cn) \cdot M + r \qquad \cdots\cdots ㉠
\end{aligned}
$$

l이 ㉠의 좌변과 우변의 $al+bm+cl$을 나누므로 l은 r을 나누어야 한다. 그렇다면

$r=0$이어야 하는데 이는 $0<r<\overrightarrow{\mathrm{OP}}\circ\overrightarrow{\mathrm{OQ}}<l$이라는 사실에 모순이다. 즉, $\overrightarrow{\mathrm{OP}}\circ\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$이 l의 약수가 아닌 경우 $\overrightarrow{\mathrm{OP}}\circ\overrightarrow{\mathrm{OQ}}<l$일 수는 없다.

따라서 ⅰ)과 ⅱ)에 의해 [정리 1]은 참이다.

[정리 1]은 자연수 m, n에 대하여도 같은 방법으로 성립하므로 한 점 Q와 모든 점 R에 대하여 $\overrightarrow{\mathrm{OP}}\circ\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\le\overrightarrow{\mathrm{OP}}\circ\overrightarrow{\mathrm{OR}}$이면 $\overrightarrow{\mathrm{OP}}\circ\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$는 l, m, n의 공약수이다. 이제 $\overrightarrow{\mathrm{OP}}\circ\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$가 자연수 l, m, n의 최대공약수임을 보이면 된다. 자연수 l, m, n의 최대공약수를 $\gcd(l,\ m,\ n)=G$라 두면 $l=\dot{l}G$, $m=\dot{m}G$, $n=\dot{n}G$인 자연수 $\dot{l}$, $\dot{m}$, $\dot{n}$이 존재한다. 그러므로

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OP}}\circ\overrightarrow{\mathrm{OQ}}&=la+mb+nc\\&=\dot{l}Ga+\dot{m}Gb+\dot{n}Gc\\&=G(\dot{l}a+\dot{m}b+\dot{n}c)\end{aligned}$$

이므로 G는 $\overrightarrow{\mathrm{OP}}\circ\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$의 약수이다. 그런데 $\overrightarrow{\mathrm{OP}}\circ\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$는 자연수 l, m, n의 공약수이고, l, m, n의 최대공약수 G가 $\overrightarrow{\mathrm{OP}}\circ\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$의 약수이면, $\overrightarrow{\mathrm{OP}}\circ\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\mathrm{G}$일 수밖에 없다. 따라서 $\overrightarrow{\mathrm{OP}}\circ\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$은 자연수 l, m, n의 최대공약수이다.

문제7.

■ 예시답안.

[1] (1) $\vec{a}=\langle a_1, a_2\rangle$, $\vec{b}=\langle b_1, b_2\rangle$, $k\in\mathbb{R}$라 두자. 일반화된 내적은 B의 모든 성질을 만족해야 한다.

$\vec{a}\bullet\vec{b}=(a_1\ a_2)\begin{pmatrix}a\ b\\c\ d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b_1\\b_2\end{pmatrix}=a_1b_1a+a_1b_2b+a_2b_1c+a_2b_2d$

$\vec{b}\bullet\vec{a}=(b_1\ b_2)\begin{pmatrix}a\ b\\c\ d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_1\\a_2\end{pmatrix}=a_1b_1a+a_2b_1b+a_1b_2c+a_2b_2d$이다.

$\vec{a}\bullet\vec{b}=\vec{b}\bullet\vec{a}$로부터 $(b-c)(a_1b_2-a_2b_1)=0$이다.

임의의 $\vec{a}, \vec{b}$에 대하여 성립해야 하므로 $b=c$이다.

(2) $\vec{a}\neq\vec{0}$인 경우 $\vec{a}\bullet\vec{a}>0$이고 $b=c$을 이용하자.

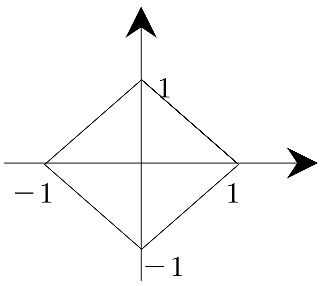
$\vec{a}\bullet\vec{a}=a_1^2a+2a_1a_2b+a_2^2d=a\left(a_1^2\right)+2a_2b(a_1)+a_2^2d>0$이다.

즉, $a>0$, $(a_2b)^2-a_2^2ad<0$이므로 $a>0$, $ad-bc>0$이다.

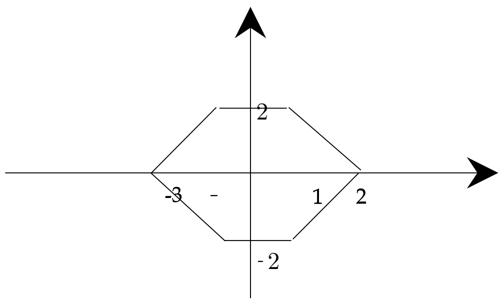
(3) $7=\langle(1,1),(1,1)\rangle=(1\ 1)\begin{pmatrix}a\ b\\c\ 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=a+b+c+2$

$b=c$, $2a-bc>0$ $(a,\ b,\ c\in\mathbb{N})$이므로 $a+2b=5$로부터 $a=3, b=1, c=1$이다.

[2] (1) $1=\|(0,0)-(x,y)\|=\|(-x,-y)\|=|x|+|y|$이므로 넓이는 2이다.



(2) $6=\|(-1,0)-(x,y)\|+\|(1,0)-(x,y)\|=|1+x|+|1-x|+2|y|$이므로 넓이는 16이다.



7.2 해석

문제1.

■ 예시답안.

[1] $m = \lim_{\triangle x \to 0} \frac{f(a+\triangle x) - f(a)}{\triangle x}$

[2] $f(x) = x^2$일 때

$$f'(a) = \lim_{\triangle x \to 0} \frac{f(a+\triangle x) - f(a)}{\triangle x} = \lim_{\triangle x \to 0} \frac{(a+\triangle x)^2 - a^2}{\triangle x}$$

$$= \lim_{\triangle x \to 0} \frac{a^2 + 2a\triangle x + \triangle x^2 - a^2}{\triangle x} = \lim_{\triangle x \to 0} (2a + \triangle x) = 2a$$

[3] 시간 t에서 전력 사용량을 $f(t)$라고 하면 전력 소비율은 $f'(t)$이다. 평균값 정리를 적용하면

$$\frac{f(10) - f(0)}{10 - 0} = \frac{6-0}{10-0} = 0.6 = f'(c)$$

를 만족하는 시점 c가 10시간 사이에 적어도 한 번 존재한다. 따라서 전력 소비율이 $0.6\,\mathrm{KW}$인 시점이 적어도 한 번 존재하고 이는 제한값인 $0.5\,\mathrm{KW}$를 초과한다.

문제2.

■ 예시답안.

[1] 제시문 (가)의 페르마 원리에 의하여 빛이 움직이는 경로는 걸리는 시간을 최소로 하는 경로로 움직인다. 시간은 거리를 속력으로 나누면 얻어지므로 선분 $\overline{\mathrm{PO}}$의 길이를 속력 v_1으로 나눈 것과 선분 $\overline{\mathrm{OQ}}$의 길이를 속력 v_2로 나눈 것의 합을 최소가 되도록 하는 경로가 페르마의 원리에 의한 빛이 움직이는 경로다.
이러한 최솟값은 미분에 의해 구할 수 있는데 $P(0,a)$, $O(x,0)$, $Q(b,c)$라 두면 이동하는데 걸리는 시간은 $t=\frac{\sqrt{x^2+a^2}}{v_1}+\frac{\sqrt{(b-x)^2+c^2}}{v_2}$이 되고 최소시간을 구하기 위해서 미분을 하면

$$\frac{dt}{dx}=\frac{x}{v_1\sqrt{x^2+a^2}}+\frac{x-b}{v_{2\surd}\sqrt{(x-b)^2+c^2}}$$

따라서 $\frac{x}{v_1\sqrt{x^2+a^2}}=+\frac{b-x}{v_{2\surd}\sqrt{(b-x)^2+c^2}}$ 인 x에서 최솟값을 갖는다. 이 식을 정리하면 $\frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2}=\frac{v_1}{v_2}$ 를 만족하는 x를 지나게 된다.

[2] 만약에 호수의 경계면이 평평하다고 가정하고 P 위치에 모래사장에 있는 사람이, Q의 위치에 호수에 빠진 다른 사람이 있다고 하면 이 사람을 최단시간에 구출하기 위해서는 이동하는데 걸리는 시간이 최소가 되는 경로를 따라서 이동해야 한다. 그러므로 P에서 호수와 땅의 경계면 위의 점 O까지의 거리를 모래 위에서 뛰는 속도로 나눈 것과 O에서 Q까지의 거리를 호수에서 수영하는 속도로 나눈 것을 합한 것이 최소가 되는 경로를 따라 움직여야 최단시간에 구출할 수 있을 것이다. 즉 v_1을 모래 위에서 뛰는 속도라 하고, v_2를 호수에서 수영하는 속도라 할 때, 스넬의 법칙과 같이 $\frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2}=\frac{v_1}{v_2}$ 를 만족하는 경로를 지나야 한다. 예를 들어 뛰는 속도가 수영하는 속도보다 빠르다면 $v1>v2$ 이고 따라서 $Q_1>Q_2$를 만족한다. 그러므로 뛰는 속도가 수영하는 속도보다 빠르다면 [그림 1]과 같은 경로로 이동하면 최단시간 안에 그 사람을 구할 수 있다.
[답안 작성시 유의점]
① 빛이 움직이는 경로는 걸리는 시간을 최소로 하는 경로에서 시간, 거리, 속력 간의 관계 설정을 분명히 서술하도록 한다(시간은 거리를 속력으로 나누면 얻어지므로 선분 $\overline{\mathrm{PO}}$의 길이를 속력 $v1$으로 나눈 것과 선분 $\overline{\mathrm{OQ}}$의 길이를 속력 v_2로 나눈 것의 합).
② 미분을 이용한 최솟값을 구하는 원리를 분명히 밝히도록 한다.

문제3.

■ 예시답안.

[1] n단계의 코흐곡선의 둘레의 길이를 L_n이라 하면

$$L_1 = 3\times4\times\left(\frac{1}{3}\right)=3\left(\frac{4}{3}\right),\ L_2 = 3\times4\times\left(4\times(\frac{1}{3}\times\frac{1}{3})\right)=3\left(\frac{4}{3}\right)^2,\ \cdots$$

이므로 4 단계의 코흐곡선의 둘레의 길이 L_4는

$$L_4 = 3\left(\frac{4}{3}\right)^4$$

[2] 선분의 길이를 $\epsilon=\dfrac{1}{3}$로 하면 삼각형은 $N=4$ 조각으로 나뉘므로 코흐 폐곡선의 차원은 $D=\dfrac{\log N(l)}{\log l}=\dfrac{\log N(\epsilon)}{\log(1/\epsilon)}=\dfrac{\log 4}{\log 3}$가 된다.

[3] n단계의 코흐곡선의 둘레의 길이를 L_n이라 하면 $L_n = 3\left(\dfrac{4}{3}\right)^n$이므로

$$\therefore \lim_{n\to\infty} L_n = \infty$$

n단계의 코흐곡선의 넓이를 S_n이라 하면 $S_0 = \dfrac{\sqrt{3}}{4}$이다.

1단계 도형의 넓이는 S_0에 길이가 $\dfrac{1}{3}$인 정삼각형 3개의 넓이의 합이므로

$$S_1 = S_1 + 3\left(\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{3\sqrt{3}}{4}\left(\frac{1}{3}\right)^2 4^0$$

2단계 도형의 넓이 S_2는 S_1에 길이가 $\left(\dfrac{1}{3}\right)^2$인 정삼각형 3×4개의 넓이의 합이므로

$$S_2 = S_1 + 3\left(\frac{1}{2}\times\frac{1}{9}\times\frac{1}{9}\times\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\times3\times4 = \frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{3\sqrt{3}}{4}\left(\frac{1}{3}\right)^2 4^0 + \frac{3\sqrt{3}}{4}\left(\frac{1}{3}\right)^4 4^1,\ ,\ \cdots\cdots\cdots$$

$n-1$단계의 코흐곡선의 넓이 S_{n-1}은

$$S_{n-1} = \frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{3\sqrt{3}}{4}\left\{\left(\frac{1}{3}\right)^2+\left(\frac{1}{3}\right)^4 4+\left(\frac{1}{3}\right)^6 4^2+\left(\frac{1}{3}\right)^8 4^3+\cdots+\left(\frac{1}{3}\right)^{2(n-1)} 4^{n-2}\right\}$$

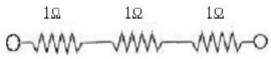
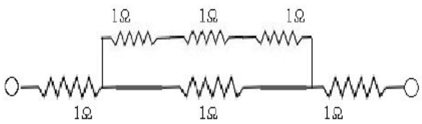
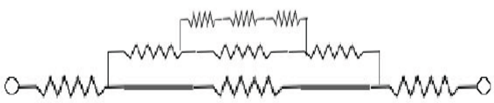
$$= \frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{3\sqrt{3}}{4}\,\frac{\frac{1}{9}\left(1-\left(\frac{4}{9}\right)^{n-1}\right)}{1-\frac{4}{9}} = \frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{3\sqrt{3}}{20}\left(1-\left(\frac{4}{9}\right)^{n-1}\right)$$

이므로 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} S_{n-1} = \frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{3\sqrt{3}}{20}=\frac{2\sqrt{3}}{5}$ (유한)이다. 즉, 둘레는 무한이고 넓이는 처음 정삼각형 넓이의 $\dfrac{8}{5}$배인 유한인 곡선이 나온다.

문제4.

■ 예시답안.

제시문에서 주어진 A와 B 사이의 합성 저항을 이해하기 쉽게 다시 그려보면 아래 그림과 같이 된다.

1단계	
2단계	
3단계	

즉, 1단계의 합성저항은 1Ω의 저항 3개를 직렬로 연결한 것이므로 3Ω이고, 2단계의 합성저항은 가운데 병렬로 3Ω와 1Ω로 연결되어 있어 나머지 2개의 1Ω짜리 저항이 직렬로 연결되어 있으므로

$$\frac{1}{\frac{1}{3}+1}+2=\frac{11}{4}\,(\Omega)$$

같은 방법으로 다음 단계의 저항을 계산할 수 있는데, 이것을 점화식으로 나타내면, 1단계를 $R_1=3$이라 하고 n단계의 합성저항 R_n과 $n+1$단계의 합성저항 R_{n+1} 사이에는

$$R_{n+1}=\frac{1}{\frac{1}{R_n}+1}+2$$

의 수학적 관계가 성립함을 알 수 있다. 이제 $R_{n+1}< R_n$인 관계를 수학적 귀납법으로 보이자.

먼저 $n=1$일 때, $R_2=\frac{11}{4}$이고 $R_1=3$이므로 $R_2< R_1$이 성립한다.

$n=k$일 때, $R_{k+1}< R_k$가 성립한다고 가정하면,

$R_{k+1}=\frac{R_k}{1+R_k}+2$, $R_{k+2}=\frac{R_{k+1}}{1+R_{k+1}}+2$에서

$$R_{k+2}-R_{k+1}=\left(\frac{R_{k+1}}{1+R_{k+1}}+2\right)-\left(\frac{R_k}{1+R_k}+2\right)$$

$$=\frac{R_{k+1}-R_k}{(1+R_{k+1})(1+R_k)}<0$$

이므로 $R_{k+2}< R_{k+1}$이 성립한다. 따라서 수학적 귀납법에 의해 $< R_n >$은 감소수열이다. 그리고 $2< R_n$이므로 $< R_n >$의 극한값이 존재한다는 것을 알 수 있다.

$$\lim_{n\to\infty} R_n = a$$라고 하면 $a = \dfrac{a}{a+1} + 2$ 즉, $a^2 - 2a - 2 = 0$

이다.

$a > 0$이므로 $a = 1 + \sqrt{3}$ 이다. 따라서 합성저항의 극한값은 $1 + \sqrt{3}\ \Omega$가 된다.

문제5.

■ 예시답안.

[1] p, q가 1보다 큰 실수이므로

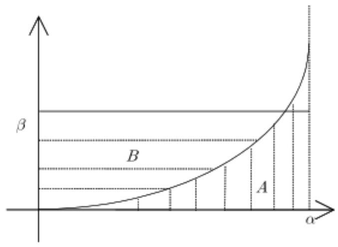
$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1 \Leftrightarrow \frac{1}{p-1}=q-1$$

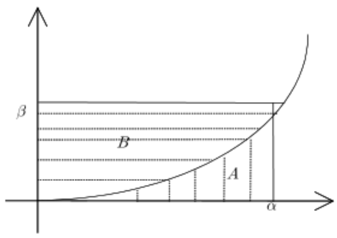
가 성립한다. 따라서 제시문 (다)에 의해 $y=x^{p-1}$의 역함수는

$$y=x^{q-1}$$

이다.

[2] $\int_0^{\alpha} x^{p-1}=\frac{\alpha^p}{p}=A$이고 $\int_0^{\beta} x^{q-1}dx=\frac{\beta^q}{q}=B$이다. (아래 그림 참조)





$\alpha\beta$는 직사각형의 넓이이므로 주어진 그림처럼 적분의 합이 더 크다.

[3] $\alpha=\frac{|a_1|}{c}$, $\beta=\frac{|b_1|}{d}$이라 두면 [2]에 의해

$$2|a_1||b_1| \le \frac{a_1^2 d}{c}+\frac{b_1^2 c}{d}$$

가 성립한다. 같은 방법으로

$$2|a_2||b_2| \le \frac{a_2^2 d}{c}+\frac{b_2^2 c}{d}$$

도 성립한다. 두 식의 양변을 각각 더하여 정리하면

$$|a_1||b_1|+|a_2||b_2| \le cd$$

가 된다. 그런데 $c=\sqrt{a_1^2+a_2^2}$, $d=\sqrt{b_1^2+b_2^2}$ 이므로

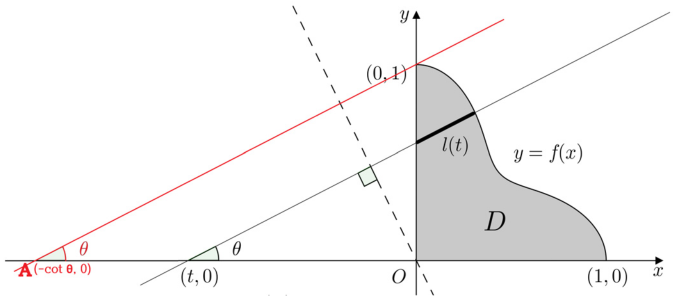
$$|a_1||b_1|+|a_2||b_2| \le \sqrt{a_1^2+a_2^2}\sqrt{b_1^2+b_2^2}$$

이다.

문제6.

■ 예시답안.

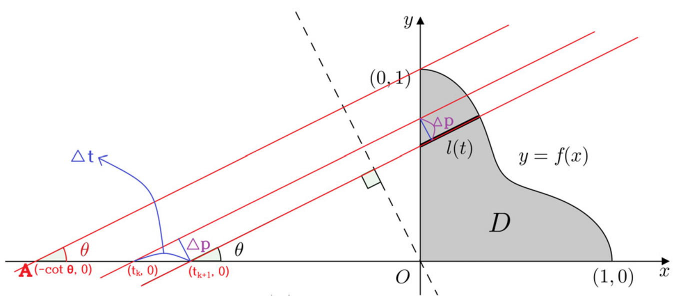
[1]



점 $(t,0)$을 지나고 기울기가 $\tan\theta$인 직선이 점 $(0,1)$을 지날 때를 생각해보자. 이 직선이 x축과 만나는 점을 A라 하면, $\tan\theta=\dfrac{1}{\overline{AO}}$이므로 $\overline{AO}=\cot\theta$이다. 따라서 점 A의 좌표는 $(-\cot\theta,0)$이다. 따라서 $S(\theta)=\displaystyle\int_{-\cot\theta}^{1}l(t)dt$의 의미는 t가 점 A에서 $(1,0)$까지 움직일 때 $l(t)$를 적분한 값이다.

1-1. $S(\theta)=\displaystyle\int_{-\cot\theta}^{1}l(t)dt$는 t가 점 $A(-\cot\theta,0)$에서 $(1,0)$까지 움직일 때 $l(t)$를 적분한 값이다. 따라서 $\theta\to\frac{\pi}{2}-0$일 때 $S(\theta)$는 t가 $(0,0)$에서 $(1,0)$까지 움직일 때 $l(t)$를 적분한 값이므로 $\displaystyle\lim_{\theta\to\frac{\pi}{2}-0}S(\theta)=D$이다.

1-2.



$-\cot\theta$부터 1까지 n등분하고, 각 점을 $-\cot\theta=t_0,t_1,t_2,\cdots,t_n=1$이라 하자. 그럼, $S(\theta)=\displaystyle\int_{-\cot\theta}^{1}l(t)dt=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}l(t_k)\Delta t$로 표현할 수 있다($\Delta t=t_{k+1}-t_k$). 그런데, $t=t_k$일 때의 직선과 $t=t_{k+1}$일 때의 직선 사이의 수직거리를 Δp라고 하면 $D=\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}l(t_k)\Delta p$임을 알 수 있다.

$\Delta p = \Delta t \times \sin\theta$이므로 $S(\theta)\sin\theta = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n} l(t_k)\Delta t\sin\theta = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n} l(t_k)\Delta p = D$이다. 따라서 $S(\theta)\sin\theta = D$이다.

[2] 함수 $f(x)$와 영역 D가 [문제1]에서 제시한 조건을 모두 만족하고, D를 x축 둘레로 회전시켜서 생기는 회전체의 부피가 y축 둘레로 회전시켜서 생기는 회전체의 부피와 같다고 하자.

2-1. 위 조건을 만족하는 함수는 $y=-x+1$을 예시로 들 수 있다. 영역 D를 x축 둘레로 회전시켜서 생기는 회전체의 부피는

$$\pi\int_0^1 f(x)^2dx = \pi\int_0^1(-x+1)^2dx = \pi\int_0^1(x^2-2x+1)dx = \frac{\pi}{3}$$

이다. 영역 D를 y축 둘레로 회전시켜서 생기는 회전체의 부피는

$$\int_0^1 2\pi x f(x)dx = \int_0^1 2\pi x(-x+1)dx = \frac{\pi}{3}$$

이다. 따라서 함수 $y=-x+1$는 x축 둘레로 회전시켜서 생기는 회전체의 부피와 y축 둘레로 회전시켜서 생기는 회전체의 부피가 같다. (함수 $y=x$ 대칭인 함수는 모두 위 조건을 만족한다.)

2-2.

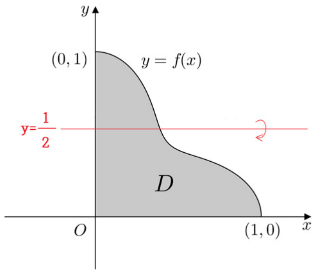
$$\begin{aligned}\int_0^1(f(x)-x)^2dx &= \int_0^1\left((f(x))^2-2xf(x)+x^2\right)dx \\ &= \frac{1}{\pi}\left(\int_0^1\pi(f(x))^2dx - \int_0^1 2\pi x f(x)dx + \int_0^1 \pi x^2dx\right)\end{aligned}$$

이다. 또한, 문제 2의 조건에서 D를 x축 둘레로 회전시켜서 생기는 회전체의 부피가 y축 둘레로 회전시켜서 생기는 회전체의 부피와 같다고 했으므로, $\int_0^1\pi(f(x))^2dx$ $= \int_0^1 2x\pi f(x)dx$이다. 따라서 위 식의 값은 $\frac{1}{\pi}\int_0^1\pi x^2dx = \frac{1}{3}$이다.

2-3.

$$\int_0^1 f(x)dx - \int_0^1(f(x))^2dx = \int_0^1\left(\frac{1}{4}-\left(f(x)-\frac{1}{2}\right)^2\right)dx = \frac{1}{4}-\int_0^1\left(f(x)-\frac{1}{2}\right)^2dx$$

이므로 이 함숫값이 최대가 되려면, $\int_0^1\left(f(x)-\frac{1}{2}\right)^2$이 최소가 되어야 한다. 따라서 함수 $y=f(x)$를 $y=\frac{1}{2}$를 중심으로 회전시킨 회전체의 부피가 최소가 되어야 한다. (함수 $y=f(x)$는 위의 조건을 모두 만족하는 함수이므로 $y=x$대칭 함수이다.)



직관적으로 생각해 봤을 때, 함수 $y=-x+1$는 위의 조건을 만족시키는 하나의 함수라는 것을 알 수 있다. 그런데,

$$\begin{aligned}
\int_0^1 f(x)dx-\int_0^1 (f(x))^2dx &= -\int_0^1 \left((f(x))^2-f(x)\right)dx \\
&= -\int_0^1 \{(f(x)-(1-x))^2+f(x)-2xf(x)-(1-x)^2\}dx \\
&= -\int_0^1 \left\{(f(x)-(1-x))^2+f(x)-\frac{1}{2}(f(x))^2-xf(x)-(1-x)^2\right\}dx
\end{aligned}$$

($\because$ x축 대칭 회전체 부피와 y축 대칭 회전체 부피가 같으므로

$$\int_0^1 2\pi x f(x)dx=\int_0^1 \pi(f(x))^2dx)$$

$$\begin{aligned}
&= -\int_0^1 \left\{(f(x)-(1-x))^2-\frac{1}{2}(f(x)-(1-x))^2-\frac{1}{2}(1-x)^2\right\}dx \\
&= -\int_0^1 \left\{\frac{1}{2}(f(x)-(1-x))^2-\frac{1}{2}(1-x)^2\right\}dx \\
&= -\frac{1}{2}\int_0^1 (f(x)-(1-x))^2dx-\frac{1}{6}
\end{aligned}$$

이므로, $\int_0^1 f(x)dx-\int_0^1 (f(x))^2dx$ 가 최대가 되는 함수 $f(x)$는 $f(x)=1-x$ 밖에 없음을 알 수 있다.

문제7.

■ 예시답안.

[1] 장난감 자동차의 평균 속도와 평균 이동거리를 추정하기 위해서는 장난감 자동차의 속도에 관한 함수를 알아야 한다. 그러나 주어진 자료는 5개의 실험결과만이 제시되어 있다. 이를 바탕으로 추정하기 위해서는, 측정하지 않은 시각의 속도를 가정하고 계산해야 한다. 그런데, 홍길동이 측정한 시각을 살펴보면, 일정한 규칙이 있음을 알 수 있다. 4초를 5개의 구간으로 나누면

0~0.8초, 0.8초~1.6초, 1.6초~2.4초, 2.4초~3.2초, 3.2초~4초

이다.

홍길동이 측정한 시각은 0.4초, 1.2초, 2.0초, 2.8초, 3.6초로 각 구간의 중간 값인 것이다. 이에 따라 장난감 자동차의 속도를 아래와 같이 생각하도록 하자.

측정시각	0.4초	1.2초	2.0초	2.8초	3.6초
속도	0.05m/s	-1.16m/s	4.00m/s	-6.34m/s	4.00m/s

위의 자료를 바탕으로 변위를 계산해 보면 $0.8\times(0.05-1.16+4.00-6.34+4.00)=0.44$, 즉 평균적인 변위는 $0.44\,\mathrm{m}$이다. 또한 이동거리를 계산해보면 $0.8\times(0.05+1.16+4.00+6.34+4.00)=12.44$이다. 즉 평균적인 이동거리는 $12.44\,\mathrm{m}$이다. 평균속도는 변위를 전체 시간값으로 나눈 수치이므로 $\frac{0.44\,\mathrm{m}}{4\,\mathrm{s}}=0.11\,\mathrm{m/s}$이다.

그러나, 평균변위, 평균이동거리, 평균속도의 값은 홍길동이 측정하지 않은 시각의 속도값을 가정하고 계산하였다는 점에서 한계를 지닌다.

[2] 장난감 자동차의 속도에 관한 함수가 있으므로 정확한 변위와 평균 속도를 추정해 볼 수 있다. 변위를 구하기 위해서는 0~4초까지의 각각의 시각과 그 시각에서의 속도값을 곱한 뒤, 모든 값을 합하여야 한다. 문제에서 제시된 v(t)함수를 그래프로 나타내면 x축은 시간 y축은 속도가 된다. 그런데 v(t)의 함수가 직선이 아닌 곡선이므로, 단순히 x축의 값과 y축의 값을 곱하여서 구할 수 없다. 따라서 제시문 3에서 제시된 정적분을 이용하여 변위의 값을 구해야 한다. 정적분을 이용하여 구한 값은 아래와 같다.

$$\int_0^4 t^2\cos(\pi t)=\left[\frac{1}{\pi}\sin\pi t\right]_0^4-\int_0^4\left(\frac{1}{\pi}\sin\pi t\times 2t\right)dt=\frac{8}{\pi^2}\fallingdotseq 0.81$$

이에 따라 평균속도는 $\frac{0.81\,\mathrm{m}}{4\,\mathrm{s}}\fallingdotseq 0.2\,\mathrm{m/s}$이다.

[2]의 다른 풀이

[부분적분법 $\int f'(x)g(x)dx=f(x)g(x)-\int f(x)g'(x)$ 이용]

$$\int_0^4 t^2 \cos(\pi t)dt \qquad \left(\begin{array}{ll} f'(x) = \cos(\pi t) & g(x) = t^2 \\ f(x) = \frac{1}{\pi}\sin(\pi t) & g'(x) = 2t \end{array} \right)$$

$$= \left[\frac{1}{\pi}\sin(\pi t) \cdot t^2 \right]_0^4 - \int_0^4 \frac{1}{\pi}\sin(\pi t) \cdot (2t)dt$$

$$= 0 - \frac{2}{\pi}\int_0^4 \sin(\pi t)\,dt$$

$$f'(x) = \sin(\pi t)$$

$$f(x) = -\frac{1}{\pi}\cos(\pi t)$$

$$g(x) = t$$

$$g'(x) = 1$$

$$= -\frac{2}{\pi}\left\{ \left[-\frac{1}{\pi}\cos(\pi t) \cdot t \right]_0^4 - \int_0^4 -\frac{1}{\pi}\cos(\pi t) \cdot 1\,dt \right.$$

$$= -\frac{2}{\pi}\left\{ \left(-\frac{1}{\pi} \cdot 1 \cdot 4 \right) - 0 - \int_0^4 -\frac{1}{\pi}\cos(\pi t) \cdot 1\,dt \right\}$$

$$= -\frac{2}{\pi}\left\{ -\frac{4}{\pi} + \frac{1}{\pi}\int_0^4 \cos(\pi t)\,dt \right\}$$

$$= \frac{8}{\pi^2} - \frac{2}{\pi^2}\int_0^4 \cos(\pi t)\,dt$$

$$= \frac{8}{\pi^2} - \frac{2}{\pi^2}\left[\frac{1}{\pi}\sin(\pi t) \right]_0^4$$

$$= \frac{8}{\pi^2} - 0 = \frac{8}{\pi^2} \fallingdotseq 0.81$$

문제8.

■ 예시답안.

[1] 제시문에서 수열 $\{a_n\}$이 일반항 $a_n = 2n-1$ 또는 점화식 $a_n = a_{n-1}+2$, $a_1 = 1$로 표현할 수 있는 것처럼, 수열은 일반항과 점화식의 두 가지 형태로 표현할 수 있다. 일반항은 수열의 n번째 항의 값을 n의 함수식으로 정의한 것으로 n번째 항을 직접 구할 수 있다는 점과 수열의 합과 같은 연산을 간단하게 표현할 수 있다는 장점이 있다. 점화식은 수열의 n번째 항과 n+1번째 항 사이의 관계를 수식으로 표현하여 정의하는 것으로, 피보나치수열이 점화식으로 표현된 대표적인 예이다. 수열들 간의 관계에 관하여 설명하는 데는 일반항으로 표현하는 것보다 점화식이 훨씬 유용하다.

[2] 피보나치수열의 연속하는 두 항의 비의 극한값이 존재하고 황금비와 일치함을 이용하여 황금비를 구하기 위해서 피보나치수열의 또 다른 형태의 점화식 $\frac{b_n}{b_{n-1}} = \frac{b_{n-2}}{b_{n-1}}+1$을 살펴보도록 한다. $\frac{b_n}{b_{n-1}}$과 $\frac{b_{n-1}}{b_{n-2}}$의 극한값은 동일하고, 이 극한값을 x라 하면 위의 점화식으로부터 방정식 $x = \frac{1}{x}+1$을 구할 수 있다. 이 방정식은 이차방정식 $x^2-x-1=0$으로 볼 수 있으며 이 방정식을 풀어서 x의 값을 구할 수 있다. 피보나치수열은 음수가 아니므로 근의 공식을 이용해서 얻어낸 두 근 중에서 양수인 값이 x가 되어야 한다. 따라서 위 방정식의 양의 실수 값이 황금비가 된다.

7.3 기하

문제1.

■ 예시답안.

[1] 선분 OC의 길이를 x라 하면 A와 C 사이의 거리는

$$\sqrt{30^2-(x-40)^2}=\sqrt{-x^2+80x-700}$$

이고, B와 C 사이의 거리는

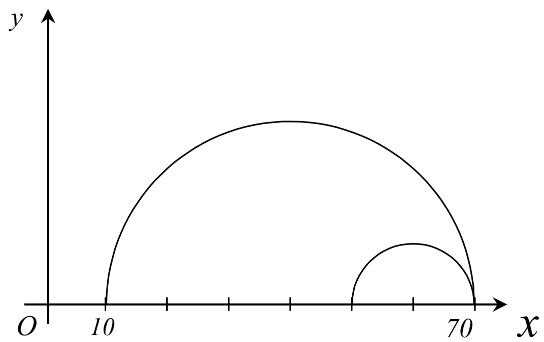
$$\sqrt{10^2-(x-60)^2}=\sqrt{-x^2+120x-3500}$$

이므로, A와 B 사이의 거리는

$$f(x)=\sqrt{-x^2+80x-700}-\sqrt{-x^2+120x-3500}$$

이다.

[2] $y_1=\sqrt{-x^2+80x-700}=\sqrt{30^2-(x-40)^2}$ 이고 $y_2=\sqrt{-x^2+120x-3500}=\sqrt{10^2-(x-60)^2}$ 라 하자. 제곱근 안의 값은 음이 아니어야 한다. 따라서 $30^2-(x-40)^2\geq 0$에서 $10\leq x\leq 70$임을 알 수 있고, $10^2-(x-60)^2\geq 0$에서 $50\leq x\leq 70$임을 알 수 있다. 따라서 $50\leq x\leq 70$이어야 한다.



위의 그림과 같이 y_1은 중심이 $x=40$이고 반지름이 30인 반원이고, y_2는 중심이 $x=60$이고 반지름이 10인 반원이다. 그러므로 두 값의 차가 최대가 되는 것은 $x=50$일 때 이고, 이때 A와 B 사이의 거리는

$$f(50)=\sqrt{30^2-10^2}-\sqrt{10^2-10^2}=20\sqrt{2}$$

이다.

문제2.

■ 예시답안.

1단계 – 문제의 이해

1) 고대 그리스의 수학자 아폴로니우스의 저서 《원뿔 곡선론》을 이해한다.

2) 포물선과 쌍곡선의 정의를 아는가?

3) 포물선과 쌍곡선의 유사점, 차이점을 아는가?

4) 포물선과 쌍곡선의 반사성질이 성립하는 이유를 아는가?

2단계 – 계획의 작성

1) 포물선과 쌍곡선의 정의를 생각하고 이를 원뿔곡선에 적용하여 본다.

2) 포물선과 쌍곡선을 비교하여 본다.

3) 카세그레인식 망원경의 구조를 잘 알아본다.

4) 포물선에서 빛의 반사성질을 알아본다.

5) 쌍곡선에서 빛의 반사성질을 알아본다.

6) 빛의 반사성질이 성립하는 이유를 이들의 정의를 이용하여 알아본다.

3단계 – 실행

1) 포물선과 쌍곡선의 유사점은 같은 원뿔을 이용하여 자른 단면에 의하여 파생한 곡선이라는 점, 둘째 식으로 표현할 때 이차방정식 $Ax^2+By^2+Cx+Dy+E=0$ 으로 표현할 수 있다. 그래서 이차곡선이라고 부른다는 점이다.

2) 차이점은 첫째, 원뿔의 밑면과 모선이 이루는 각을 θ_1, 원뿔의 밑면과 원뿔을 자르는 평면이 이루는 각을 θ_2라 하면 포물선은 $\theta_2=\theta_1$일 때 평면이 아래, 위의 두 원뿔 중 어느 하나와 만나게 되므로 포물선은 1개의 곡선이고 초점이 1개인데 반하여, 쌍곡선은 $\theta_2>\theta_1$일 때는 평면이 두 원뿔과 만나게 되므로 쌍곡선은 2개의 곡선으로 되어 있고 초점이 2개라는 점이다.

   둘째, 이차방정식 $Ax^2+By^2+Cx+Dy+E=0$에서 포물선은 $A=0,\ B\neq 0,\ C\neq 0$ 또는 $A\neq 0,\ B=0,\ D\neq 0$일 때 포물선의 식이 되고 $AB<0$일 때 쌍곡선의 식이 된다.

   셋째, 기하학적으로는 쌍곡선에는 점근선이 존재하지만 포물선에는 점근선이 없다.

4단계 – 반성

1) 검산 과정을 통해 결과가 맞는지 확인하도록 한다.

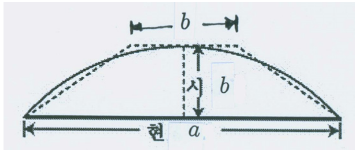
2) 다른 문제에 활용하도록 한다.

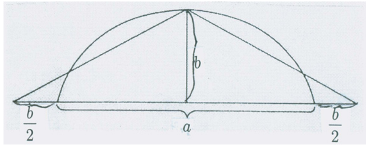
문제3.

■ 예시답안.

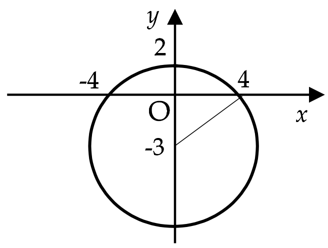
[1] 두 밑변의 길이가 a와 b이고 높이가 b인 사다리꼴의 넓이는 $S=\dfrac{ab+b^2}{2}$이다.

이런 사다리꼴을 주어진 활꼴과 겹쳐 그린 오른쪽 그림에서 두 도형의 넓이가 비슷함을 확인할 수 있다. 또는 밑변의 길이가 $a+b$이고 높이가 b인 이등변삼각형의 넓이도 $S=\dfrac{ab+b^2}{2}$이다. 이런 이등변삼각형과 주어진 활꼴을 겹쳐 그린 오른쪽 그림에서 두 두형의 넓이가 비슷함을 확인할 수 있다.





[2] 좌표평면에서 원 $x^2+(y+3)^2=25$의 중심은 (0, -3)이고 반지름의 길이는 5이며, x축을 두 점 (-4, 0)과 (4, 0)에서 지난다. 그러므로 구하는 활꼴의 현의 길이는 8이고 시의 길이가 2이다. 따라서 공식 ①에 따른 넓이는 $\dfrac{16+2^2}{2}=10$이다. 또 이 활꼴의 넓이를 정적분으로 구하는 식은 다음과 같다.



$$2\int_0^4 (\sqrt{5^2-x^2}-3)dx \quad \text{또는} \quad 2\int_0^4 \sqrt{5^2-x^2}\,dx-2\int_0^4 3\,dx$$

$x=5\sin\theta$로 치환하면 $\dfrac{dx}{d\theta}=5\cos\theta$이고, $x=0$일 때 $\theta=0$이며 $x=4$일 때 $\theta=0.925$이므로, 위의 정적분의 값은 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\begin{aligned}
2\int_0^4 \sqrt{5^2-x^2}\,dx-2\int_0^4 3\,dx &= 2\int_0^{0.925} \sqrt{5^2-5^2\sin^2\theta}\;5\cos\theta\,d\theta-2\,[3x]_0^4 \\
&= 2\int_0^{0.925} 5^2\cos^2\theta\,d\theta-24 \\
&= 5^2\int_0^{0.925} (1+\cos 2\theta)\,d\theta-24 \\
&= 5^2\left[\theta+\frac{\sin 2\theta}{2}\right]_0^{0.925}-24 \\
&= 5^2\,[\theta+\sin\theta\,\cos\theta]_0^{0.925}-24 \\
&= 5^2(0.925+0.8\cdot 0.6)-24 \\
&= 25\cdot 1.405-24=35.125-24=11.125
\end{aligned}$$

7.4 확률과 통계

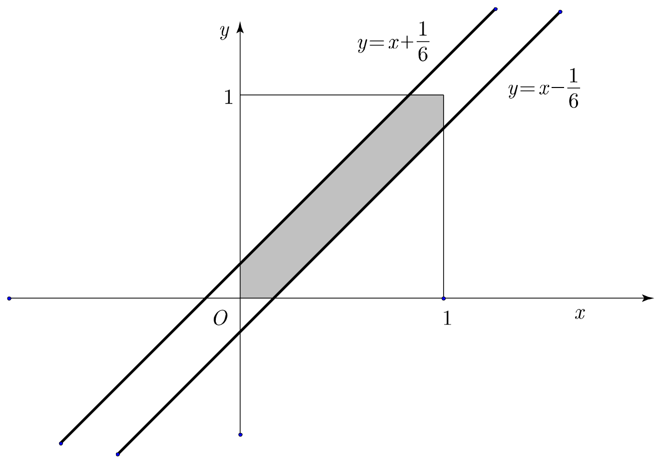
문제1.

■ 예시답안.

[1] 정오와 오후 1시 사이에 진우와 서희가 신촌역에 도착하는 시각을 각각 x, y라 하면, x축, y축을 진우, 서희가 각각 도착 가능한 시간 축으로 하는 표본공간을 아래 [그림 1]과 같이 가로, 세로의 길이가 1인 정사각형으로 구성할 수 있다. 여기서 두 사람이 만날 경우는 도착 시각의 차이가 10분 즉 $\frac{1}{6}$시간 이하일 때이므로 다음과 같은 식으로 나타낼 수 있다.

$$|x-y| \le \frac{1}{6} \ (\text{단, } 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1)$$

위 식을 정리 하면 $-\frac{1}{6} \le x-y \le \frac{1}{6}$ 이고 이것을 좌표평면 위에 나타내면 두 사람이 만날 경우는 [그림 1]의 색칠한 부분이 된다.

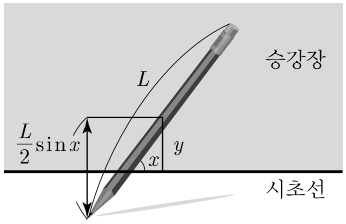


[그림 1]

따라서 두 사람이 만날 확률 $P = \dfrac{\text{색칠한 부분의 넓이}}{\text{정사각형의 넓이}} = \dfrac{1-\left(\frac{5}{6}\right)^2}{1} = \dfrac{11}{36}$ 이다.

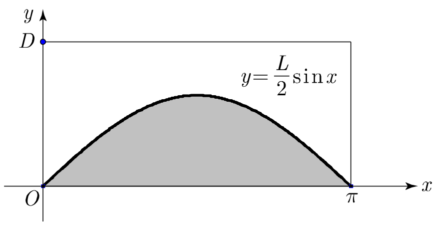
[2] 제시문 (라)의 내용을 [그림 2]를 이용해서 다음과 같은 내용으로 재구성할 수 있다. 연필의 중심에서 시초선까지의 거리를 y라 하고 연필과 시초선이 이루는 각을 x, 승강장 너비를 D라 하면 $0 \le y \le D, 0 \le x \le \pi$이다. 따라서 표본공간은 아래 [그림 3]과 같

이 가로의 길이가 π, 세로의 길이가 D인 직사각형으로 구성할 수 있다.



[그림 2]

이때, 위 [그림 2]와 같이 연필이 승강장의 가장자리에 걸칠 경우는 연필의 중심 에서 시초선까지의 거리가 연필 끝까지의 수직거리보다 짧을 때이므로 다음과 같은 식으로 나타낼 수 있다. 이를 바탕으로 승강장의 넓이를 표본공간으로 하는 연필이 승강장 가장자리에 걸치는 사건에 대한 확률을 [그림 3]과 같이 '기하적 확률'로 구할 수 있다.



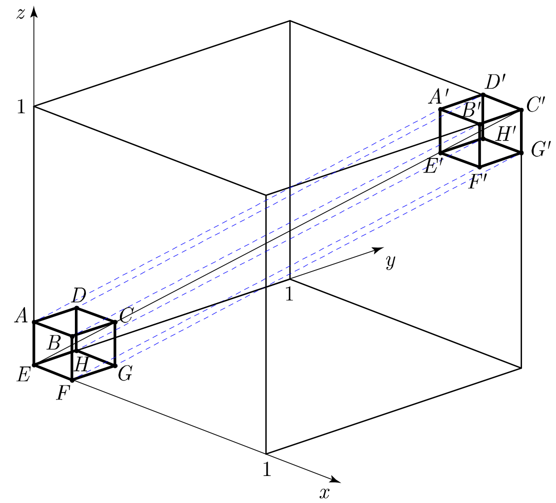
[그림 3]

따라서 두 사람이 만날 확률 P는

$$P=\frac{\text{색칠한 부분의 넓이}}{\text{직사각형의 넓이}}=\frac{\int_0^{\pi}\frac{L}{2}sin\,x\,dx}{D\pi}=\frac{L}{D\pi}$$

이다.

[3] [1]에서 두 사람이 만날 확률을 평면상 나타내는 표본공간에 대한 기하적 확률로 구한 것과 같은 방법으로 세 사람을 A, B, C라 하고, 각각이 약속 장소에 도착하는 시간을 x, y, z라 하면 $0\le x\le 1$, $0\le y\le 1$, $0\le z\le 1$이 되고 이것이 공간상의 표본공간이다. 즉 표본공간은 한 변의 길이가 1인 정육면체가 된다. 이때 세 사람이 만날 경우는 $|x-y|\le\frac{1}{6}$, $|y-z|\le\frac{1}{6}$, $|z-x|\le\frac{1}{6}$가 되므로 이것을 좌표공간에 나타내어 보면 아래의 [그림 4]에서 정육면체 $ABCD-EFGH$를 대각선 EC'을 따라 정육면체 $A'B'C'D'-E'F'G'H'$까지 평행이동하여 생긴 도형이 된다.

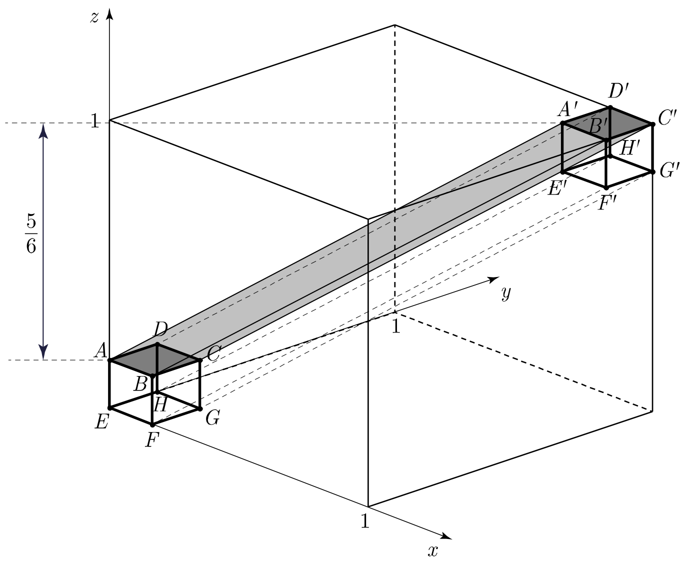


[그림 4]

따라서 세 사람이 정오에서 오후 1시 사이에 약속된 장소에서 만날 확률은 '기하적 확률'로

$$\frac{\text{정육면체를 평행이동하여 생긴 도형의 부피}}{\text{한 변의 길이가 1인 정육면체의 부피}}$$

가 된다.



[그림 4]

이제 정육면체 $ABCD-EFGH$을 대각선을 따라 평행이동했을 때 생기는 입체의 부피를 구하자. 이 부피는

(정사각형 $ABCD$를 대각선을 따라 정사각형 $A'B'C'D'$까지 평행이동하여 생긴 입

체의 부피)

+(정사각형 $DHGC$를 대각선을 따라 정사각형 $D'H'G'C'$까지 평행이동하여 생긴 입체의 부피)

+(정사각형 $BFGC$를 대각선을 따라 정사각형 $B'F'G'C'$까지 평행이동하여 생긴 입체의 부피)

+(정육면체 $ABCD-EFGH$의 부피)

가 된다.

이때, 정사각형 $ABCD$을 대각선을 따라 정사각형 $A'B'C'D'$까지 평행이동하여 생긴 입체의 부피는 다음 [그림 5]와 같이 밑면적이 $\left(\frac{1}{6}\right)^2$이고 높이가 $\frac{5}{6}$인 입체로 그 부피는 $\frac{5}{6^3}$가 된다. 마찬가지로 정사각형 $DHGC$을 대각선을 따라 정사각형 $D'H'G'C'$까지 평행이동하여 생긴 입체의 부피와 정사각형 $BFGC$을 대각선을 따라 정사각형 $B'F'G'C'$까지 평행이동하여 생긴 입체의 부피도 각각 $\frac{5}{6^3}$이다.

따라서 구하려는 확률 P는

$$P = \frac{\text{정육면체를 평행이동하여 생긴 도형의 부피}}{\text{한 변의 길이가 1인 정육면체의 부피}} = \frac{3\times\frac{5}{6^3}+\frac{1}{6^3}}{1^3} = \frac{2}{27}$$

이다.

문제2.

■ 예시답안.

[1] 문제에서 구하고자 하는 확률은 $n=6$, $p=3$일 때, 민수가 두 번째로 야구공을 선택할 때 결함이 없는 야구공을 선택할 확률과 같다. 이 상황의 확률을 구하자. 첫 번째 사람이 결함이 없는 야구공을 선택하고 민수가 결함이 없는 야구공을 선택할 확률은 $\frac{3}{6}\cdot\frac{3}{5}$이고, 첫 번째 사람이 결함이 없는 야구공을 선택했을 경우에 확률은 $\frac{3}{6}\cdot\frac{2}{5}$이다. 이 둘의 합은 $\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$이다.

[2] $A_{n,\,p}(k)$를 n개의 야구공 중에서 p개의 공에 결함이 있는 상황에서, k번째 사람이 결함이 있는 공을 뽑을 확률이라고 하자. $A_{n,\,0}(k)=0$이다. 이제 모든 n, p에 대해, $A_{n\,p}(k)=\frac{p}{n}$라는 사실을 k에 대한 수학적 귀납법을 사용하여 증명하자.

(i) $k=1$인 경우, $A_{n,\,p}(1)=\frac{p}{n}$임은 자명하다.

(ii) $k=k_0$일 때, 위의 사실이 성립한다고 가정하자. 이때 $A_{n\,p}(k_0+1)$는 첫 번째 사람이 결함이 있는 야구공을 뽑는 경우와 그렇지 않은 경우로 나뉜다. 각각의 경우가 발생할 확률은 $\frac{p}{n}$과 $\frac{n-p}{n}$이다.

첫 번째 경우에 남은 사람의 수는 $n-1$, 남은 결함을 가진 야구공은 $p-1$개, 그리고 원래 k_0+1번째 뽑기로 한 사람은 k_0번째 뽑게 된다. 이때 그 사람이 결함이 있는 야구공을 뽑을 확률은 $A_{n-1,\,p-1}(k_0)$이다.

이와 마찬가지로, 두 번째 경우에 원래의 k_0+1번째에 공을 뽑기로 한 사람이 결함이 있는 야구공을 뽑을 확률은 $A_{n-1,\,p}(k_0)$이다.

따라서 아래의 식이 성립한다.

$$A_{n,p}(k_0+1)=\frac{p}{n}A_{n-1,p-1}(k_0)+\frac{n-p}{n}A_{n-1,p}(k_0)$$

가정에 의해 $A_{n-1,p-1}(k_0)=\frac{p-1}{n-1}$이고 $A_{n-1,p}(k_0)=\frac{p}{n-1}$이다.

따라서 $A_{n,p}(k_0+1)=\frac{p}{n}\frac{p-1}{n-1}+\frac{n-p}{n}\frac{p}{n-1}=\frac{p}{n}$이다.

이로부터 우리는 결함이 있는 야구공을 뽑을 확률이 순서에 상관없이 항상 일정함을 알 수 있다.

문제3.

■ 예시답안.

[1]

1) 첫 번째 경기를 이기고 두 번째 경기를 지는 경우의 확률: $\frac{1}{5}\times\left(1-\frac{3}{5}\times\frac{13}{10}-\frac{1}{5}\right)=\frac{1}{250}$

2) 첫 번째 경기를 비기고 두 번째 경기를 지는 경우의 확률: $\frac{2}{5}\times\left(1-\frac{3}{5}\times\frac{11}{10}-\frac{1}{5}\right)=\frac{14}{250}$

3) 첫 번째 경기를 지고 두 번째 경기를 지는 경우의 확률: $\frac{2}{5}\times\left(1-\frac{3}{5}\times\frac{9}{10}-\frac{1}{5}\right)=\frac{26}{250}$

따라서 두 번째 경기를 질 확률은 $\frac{1}{250}+\frac{14}{250}+\frac{26}{250}=\frac{41}{250}$.

[2]

문제 [1]에 의해 B팀과의 경기에서 지지 않을 확률은 $1-\frac{41}{250}=\frac{209}{250}$이다. 한국 팀이 B팀과의 경기에서 지지 않았을 때, 모든 경기에서 지지 않으면서 두 경기 이상 이길 경우

첫 번째 경기	두 번째 경기	세 번째 경기	확률
승	승	승	$\frac{1}{5}\times(\frac{3}{5}\times\frac{13}{10})\times(\frac{1}{10}\times\frac{13}{10})=\frac{507}{25000}$
무	승	승	$\frac{2}{5}\times(\frac{3}{5}\times\frac{11}{10})\times(\frac{1}{10}\times\frac{13}{10})=\frac{858}{25000}$
승	무	승	$\frac{1}{5}\times\frac{1}{5}\times(\frac{1}{10}\times\frac{11}{10})=\frac{11}{2500}=\frac{110}{25000}$
승	승	무	$\frac{1}{5}\times(\frac{3}{5}\times\frac{13}{10})\times\frac{1}{5}=\frac{780}{25000}$
합			$\frac{507+858+110+780}{25000}=\frac{2255}{25000}=\frac{451}{5000}$

한국 팀이 B팀과의 경기에서 지지 않았을 때, 모든 경기에서 지지 않으면서 두 경기 이상 이길 확률은 $\frac{\frac{451}{5000}}{\frac{209}{250}}=\frac{41}{380}$이다.

[3]

두 번째 경기가 비겼으므로 앞 경기에 영향을 받지 않는 독립적인 사건이다. 그리고 마지막 경기에서 승리할 확률은 공통적으로 1.1배가 곱해지므로 지고, 비기고, 이기는 각 경우가 가장 높은 상황을 택하면 되므로 $C-A-B$ 경우이다.

[별해] 추점을 통해 나올 수 있는 경기의 가지 수는 총 여섯 가지, 즉 $A-B-C$, $A-C-B$, $B-A-C$, $B-C-A$, $C-A-B$, $C-B-A$이다. 각 경우에서 첫 번째 경기를 지고, 두 번째 경기를 비기고, 세 번째 경기를 이길 확률을 구하면 $\frac{22}{2500}$, $\frac{132}{2500}$, $\frac{22}{2500}$, $\frac{22}{2500}$, $\frac{462}{2500}$, $\frac{77}{2500}$이므로 정답은 $C-A-B$ 경우이다.

문제4.

■ 예시답안.

[1] 달러의 가치가 매년 2/3씩 감소한다고 하였으므로 10년 후에는 1달러 대비 원화 금액은 $1{,}000\times(2/3)^{10}$이 되고 20년 후에는 그 값이 $1{,}000\times(2/3)^{20}$이 된다. 따라서 각각의 경우 1달러 대비 원화 금액의 상용로그값은

$$3+10(\log 2-\log 3)=3+10(0.3010-0.4771)=1.239=1+0.239,$$
$$3+20(\log 2-\log 3)=3+20(0.3010-0.4771)=-0.522=-1+0.478$$

이고 가수는 각각 0.239와 0.478이다. 어떤 양수 N의 첫 번째 자리의 숫자가 d라는 것은 $N=a\times 10^n$ (n은 정수, $1\le a<10$)의 꼴로 나타냈을 때 $d\le a<d+1$라는 것이므로, $\log N$의 가수는 $\log d\le \log a<\log(d+1)$을 만족한다. 따라서 제시된 조건 $\log 2=0.3010$, $\log 3=0.4771$에 의하여 $\log 1=0<0.239<\log 2$이고 $\log 3<0.478<\log 4=2\log 2$임을 알 수 있으므로 첫 번째 자리의 숫자는 각각 1과 3이다.

-10년 후의 달러 환율의 첫 번째 자리의 숫자: 1

-10년 후의 달러 환율의 첫 번째 자리의 숫자: 3

[2] 자료의 단위를 다른 단위로 바꾸는 것은 자료의 값에 단위환산율을 곱한다는 것이다. 여기에 상용로그를 취하면 환산율의 로그를 더해준 값이 된다. 임의의 단위환산율을 곱하여 상용로그를 취해도 가수의 분포가 변하지 않는다고 제시문 (나)를 통하여 가정하였으므로 상용로그 가수의 확률변수 X는 다음을 만족한다.

$$P(a\le X\le b)=P(a+c\le X\le b+c)\qquad \text{단, } a,\ b,\ a+c,\ b+c\in[0,1)$$

주어진 가정에 의하여 X는 확률밀도함수 $f(x)$를 가진다고 하자. 제시문 (라)의 (3)에 의하여 $\int_a^b f(x)dx=\int_{a+c}^{b+c} f(x)dx$이고, 모든 a, $a+c\in[0,1)$에 대하여

$$f(a)=\lim_{b\to a}\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx=\lim_{b\to a}\frac{1}{b-a}\int_{a+c}^{b+c} f(x)dx=f(a+c)$$

이다. 즉, $f(x)$는 상수함수이다. $f(x)$는 제시문 (라)의 (2)에서 $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx=1$이고 $f(x)$는 $[0,1)$에서 정의된 함수이므로, $f(x)=1$ $(0\le x<1)$이다.

자료의 첫 번째 자리의 숫자가 2일 확률은 자료의 상용로그의 가수가 $\log 2$보다 크거나 같고 $\log 3$보다 작을 확률과 같으므로 $P(\log 2\le X<\log 3)=\int_{\log 2}^{\log 3} 1dx=\log 3-\log 2$이다.

– 확률밀도함수: $f(x)=1$, $0\le x<1$로 주어진 확률밀도함수

– 첫 번째 자리의 숫자가 2가 나올 확률: $\log 3-\log 2 \fallingdotseq 0.1761=17.61\%$

문제5.

■ 예시답안.

[1]에 대한 풀이에는 아래의 세 과정이 논리적으로 기술되어야 한다.

1) 제시문에서 언급한 것과 같이 다음 내용이 있어야 하며

$$\begin{aligned} P(\text{양성}) &= P(\text{암} \cap \text{양성}) + P(\text{정상} \cap \text{양성}) \\ &= P(\text{암})P(\text{양성} \mid \text{암}) + P(\text{정상})P(\text{양성} \mid \text{정상}) \\ &= 0.02 \times 0.98 + 0.98 \times p \end{aligned}$$

2) 발문의 내용이 다음의 식과 같이 표시될 수 있음을 보여야 하고

$$P(\text{암} \mid \text{양성}) = \frac{0.02 \times 0.98}{0.02 \times 0.98 + 0.98 \times p} \geq 0.4$$

3) 위의 식으로부터 다음을 유도하고

$$\frac{0.02}{0.02+p} \geq \frac{4}{10} \Rightarrow 0.2 \geq 0.08 + 4 \times p \Rightarrow 0.12 \geq 4 \times p \Rightarrow 0.03 \times p$$

정상일 때 양성반응이 나올 가능성의 최대 확률은 0.03 또는 3%가 되어야 함을 언급해야 한다.

[2]의 풀이에서는 다음과 같이 두 부분의 내용이 논리적으로 언급되어 있어야 한다.

1) c를 위의 조건을 만족하는 연령의 암 발생 확률이라고 할 때 S씨의 현재 연령이 a이고 위 조건을 만족하는 연령을 x라고 하면, 문제에서 요구하는 값은 다음과 같이 표시될 수 있다.

$$c = 0.002(x-a) + 0.02 \ \text{ 또는 } \ c = 0.002y + 0.02$$

여기서 $y = x - a$로 문제에서 알아보려고 하는 값이다.

2) 발문의 내용이 아래의 부등식으로 표시될 수 있음을 보이고

$$\frac{c \times 0.99}{c \times 0.99 + (1-c) \times 0.0099} > \frac{80}{99}$$

(왼쪽 식은 $\frac{c \times 0.99}{c \times 0.99 + (1-c) \times 0.0099} = \frac{c}{c + (1-c) \times 0.01} = \frac{c}{0.99 \times c + 0.01}$가 된다.)

분모를 부등식 오른쪽으로 넘기면 다음과 같은 식이 되는데

$$c > 0.8c + 0.01 \times \frac{80}{99} \Rightarrow 0.2c > 0.00808$$

결국 $c > 0.0404$가 된다. $c = 0.002y + 0.02$이므로

$$0.002y + 0.02 > 0.0404 \Rightarrow 0.002y > 0.0204 \Rightarrow y > \frac{0.0204}{0.002} = 10.2$$

가 되므로 S씨보다 **11살 많아야 한다(11년)**는 것을 언급해야 한다.

문제6.

[해석]

미국에서 농업전문가들은 농작물에 대한 치명적인 손상을 줄이기 위해 새 방해물을 개발하려고 노력하고 있다. 무독성이고 환경적으로 안전한 새 억제제로서의 효능을 연구하기 위해서 마늘 기름을 사용하여 한 실험이 시행될 예정이다. 그 실험은 매년 미국에서 옥수수 농작물에 상당한 손해를 입히는 새의 한 종류인 유럽산 찌르레기를 사용할 것이다. 옥수수에서 나온 낟알들에 마늘의 정도를 0 퍼센트, 2 퍼센트, 10 퍼센트, 25 퍼센트, 그리고 50 퍼센트로 각 5개로 나눈 마늘 기름을 주입한다. 연구원들은 밤새 음식 박탈 후에 따라오는 2시간동안 소비된 식품 낟알의 수를 측정함으로써 억제제에 대한 새들의 반(negative reaction)~~작용~~을 결정할 것이다. 그 실험에 쓸 수 있는 40마리의 새들이 있고, 그리고 연구원들은 각 마늘 농축에 따라 8마리의 새를 사용할 것이다. 각 새들은 분리된 새장에 가두어지고 같은 수의 식품 낟알이 제공될 것이다.

(a) 실험을 위한 확인사항

i. 처치

ii. 실험 단위

iii. 측정될 수 있는 반응

(b) 실험 수행 후에 연구가들이 아래 표에 보여지는 데이터를 기록했다.

기름 농축 농도	0%	2%	10%	25%	50%
소비된 옥수수 낟알의 평균	58	48	29	24	20
새의 수	8	8	8	8	8

i. 실험결과를 분석하기 위한 직선회귀모델의 적절성을 검사하기 위해 사용될 수 있는 데이터의 그래프를 구성하시오.

ii. 그래프를 바탕으로 하여 직선회귀모델이 적절한지 설명하시오.

■ 예시답안.

생략

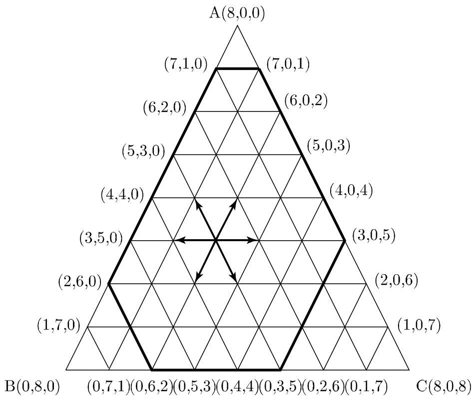
7.5 응용 수학

문제1.

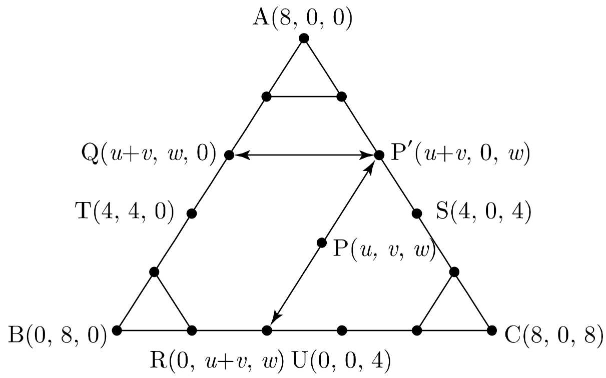
■ 예시답안.

[1] 직교좌표계에서는 임의의 x, y를 좌표로 하는 점 (x, y)가 존재하나 무게중심 좌표는 삼각형 ABC의 넓이를 배분하여 결정되었으므로 항상 $u+v+w=m$(m은 삼각형 ABC의 넓이)를 만족해야 한다. 따라서 임의의 u, v, w가 아니라 $u+v+w=m$를 만족하는 u, v, w에 대해서만 무게중심 좌표를 (u, v, w)로 하는 점이 존재한다.
삼각형 PBC의 넓이는 고정된 밑변 BC의 길이와 점 P에서 직선 BC까지의 거리에 의해 결정된다. 따라서 삼각형 PBC의 넓이인 u가 상수가 되기 위해서는 P에서 BC까지의 거리가 상수이어야 하고 이러한 P의 자취는 직선 BC와 평행한 직선이다. 마찬가지 이유로 v가 상수인 점의 자취는 직선 CA와 평행한 직선이고, w가 상수인 점의 자취는 직선 AB와 평행한 직선이다.

[2] 한 번의 옮겨 담기 과정에서 세 컵 중 하나는 그 물의 양이 변하지 않으므로, 삼각형 ABC 위의 점이 움직이는 방향은 〈그림 2〉의 Q처럼 항상 삼각형의 한 변과 평행하다. 한편 어느 한 컵이 완전히 차있거나 비워진 상태는 〈그림 2〉의 굵은 선 위의 점에 대응된다.



이제 용기의 물을 한쪽으로 전부 부은 상태를 무게중심 좌표로 표현하면 점 $\mathrm{P}(u, v, w)$가 점 $\mathrm{P}'(u+v, w, 0)$로 이동한 것으로 표현할 수 있다. 이것을 그림으로 표현하면 다음과 같다. (여기서 $u+v+w=8$이 항상 유지되어야 한다.)



또 P′은 Q 또는 R로 움직일 수 있다. 따라서 각 점의 이동은 따라서 논제 (2)의 조건으로 옮겨 담는 과정에서는 항상 굵은 선 위의 점으로 삼각형의 한 변과 평 행하게 이동한다. 또한 어느 한 컵을 완전히 채우거나 비워야 하므로 한 굵은 선분 위에서 다른 굵은 선분 위로 이동해야 한다. 위의 〈그림 3〉에서 P′으로 움직임을 참조.) 다만 이 조건이 두 선분의 교점으로 이동하는 경우도 포함하는 것에 유의) 굵은 선분 하나를 따라 이동할 때는 끝점으로 이동한다고 표현할 수도 있다. (여기 서 끝점은 〈그림 2〉에서 무게중심 좌표 $(7,1,0)$, $(1,7,0)$, $(0,3,5)$ 등과 같이 굵은 선분의 방향이 바뀌는 것을 의미한다.

그런데 옮겨 담기를 반복하여 어느 한 컵에 정확히 $4l$의 물을 담은 상태는 굵은선 위의 점들 중에서 적어도 하나의 좌표가 4인 점 $R(4,4,0)$, $S(0,4,4)$, $T(4,0,4)$에 대응된다. 이것은 $\triangle ABC$의 세변의 중점을 의미한다. 따라서 점 P 가 삼각형의 세 변 중 어느 한 변과 평행하게 움직이면서 이 점에 도달하려면 $u=4$ or $u+w=4$ 중 $w=4$ or $u+v=4$와 같은 형태의 점에 대응되어야 함을 알 수 있다. (삼각형의 중점연결정리를 생각하면 쉽게 이해할 수 있음.) 즉, 처음부터 어느 한 컵에 정확히 $4l$의 물이 담겨 있어야 한다.

문제2.

제시문 분석

• 제시문 (가)에서는 일대일 대응관계를 이용하여, 원소의 개수를 세기가 곤란한 집합의 경우, 원소의 개수를 세기가 보다 쉬운 다른 유한집합을 생각하여 해결할 수 있음을 말하고 있다.

• 제시문 (나)에서는 정보가 비트수열의 상태로 저장, 전송되는 상황을 예를 들어 제시하며, 두 사람 사이의 메시지 전송 시 비트의 총합의 최소화를 목표로 함을 언급하여 문제 상황을 설정하고 있다. 문자를 2회 만에 전송할 때 사용되는 비트 수의 효율성을 계산하는 능력을 평가하는 문제이다.

논제 분석

• [1]은 중복조합의 경우의 수를 일대일 대응관계에 있는 집합의 원소의 개수를 이용하여 구할 수 있는가 하는 문제이다. 즉 서로 다른 k개 중에서 중복을 허락해서 n개를 택하는 경우의 수는

$$A=\{(x_1,\,x_2,\,\cdots,\,x_k)\,|\,x_1+x_2+\cdots+x_k=n,\ x_i\text{는 음이 아닌 정수}\}$$

의 원소의 개수와 같으며 이는

$$B=\{(b_1,\,b_2,\,\cdots\,,\,b_k)|b_1+b_2+\cdots+b_k=n+k,\ b_i\text{는 양의 정수}\}$$

의 원소의 개수와 같음을 일대일 대응관계를 이용하여 보일 수 있는가 하는 문제이다.

• [2]에서는 중복조합을 계산하는 방법을 구체적 대상을 이용해서 설명할 수 있는가 하는 문제이다. 중복조합은 명칭은 조합이지만 실제로는 같은 것이 있는 순열을 계산하는 방법과 같다. 즉, $k-1$개의 구분자 |와 n개의 0를 일렬로 세우는 경우의 수와 일대일 대응관계에 있음을 설명할 수 있는 지를 묻는 문제이다.

• [3]은 문자를 전송할 때 사용되는 비트 수의 최솟값이 전송횟수에 따라 어떻게 달라지는지를 묻는 문제이다. 제시문 (나)와 연결하여 생각해야 문제를 해결할 수 있다.

■ 예시답안.

풀어보기

[1] 서로 다른 3개 중에서 중복을 허용하여 15개를 선택하는 문제와 같다. 즉, x_1을 선택하지 않은 경우, $x_1=0$이고, 두 번 선택한 경우 $x_2=2$이다. 중복조합을 이용하면 2개의 구분자 |과 15개의 0을 나열하는 경우의 수와 같으므로 $\frac{17!}{2!15!}=136$ 개이다.

[2] $x_1+x_2+x_3=15$, $x_i \ge 1,\ i=1, 2, 3$이므로, $x_1=y_1+1$, $x_2=y_2+1$, $x_3=y_3+1$이라고 하면 $y_1+y_2+y_3=12$의 음이 아닌 정수해의 개수와 같으므로 $\frac{14!}{2!13!}=91$개의 경우가 있다.

논제

[1] 집합 A를 k개의 원소로 이루어진 집합으로부터 중복을 허락하여 n개를 뽑아 만든 모든 중복 집합들의 모임이라고 하자. 이 때 서로 다른 k개의 원소를 각각 $x_1, x_2,\cdots,x_k$라고 하자. $x_i(i=1,\cdots,k)$를 선택하지 않으면, $x_i=0$에 대응시키고, 한 번 뽑았을 때 $x_i=1$에 대응시키고, $\cdots$, n번 뽑았을 때, $x_i=n$에 대응시키면, 집합 A와 집합

$$X=\{(x_1, x_2, \cdots, x_k) | x_1+x_2+\cdots+x_k=n,\ x_i\text{는 음이 아닌 정수}\}$$

는 일대일 대응관계에 있다. 여기서 $b_i=x_i+1$에 대응시키면,

$$b_1+b_2+\cdots b_k=(x_1+1)+(x_2+1)+\cdots+(x_k+1)=n+k$$

$$B=\{(b_1, b_2, \cdots, b_k) | b_1+b_2+\cdots+b_k=n+k,\ b_{i\text{는 양의 정수}}\}$$

가 된다. 따라서 집합 X와 집합 B는 일대일 대응이다. 이것은 집합 A와 집합 B가 일대일 대응 관계에 있음을 의미한다.

[2] A, B, C가 주어졌을 때, 중복을 허용해서 4개를 선택하는 경우를 다음과 같이 생각해 보자. A, BB, C를 0|00|0과 같이 생각할 수 있다. 즉, 서로 다른 세 가지를 구분하려면 '|' 이 두 개 필요하고 각각의 개수는 0의 개수로 표현할 수 있다. 따라서 서로 다른 k개 중에서 중복을 허락해서 n개를 택하는 경우의 수는 $k-1$개의 구분자 '|' 와 n개의 '0' 을 일렬로 세우는 경우의 수와 일대일 대응관계에 있음을 알 수 있다. 따라서 그 경우의 수는 같은 것을 포함하는 순열의 수로써 $\frac{(n-1+k)!}{(n-1)!k!}$로 계산할 수 있다. 그런데 $\frac{(n-1+k)!}{(n-1)!k!}={}_{n+k-1}C_k$로 표현할 수 있다. 이것은 집합 A의 원소의 개수가 $M(k,n)=\frac{(n-1+k)!}{(n-1)!k!}={}_{n+k-1}C_k$ 임을 의미한다.

문제3.

■ 예시답안.

[1] 1) 평면의 한 점 $(x,\ y)$는 원점을 중심으로 하여 반시계방향으로 90° 회전시키면 $\alpha(x,y)=(-y,x)$가 되고 다시 y축에 대하여 대칭이동을 시키면 $\beta(\alpha(x,y))=(y,x)$가 된다. 따라서 γ는 직선 $y=x$에 대한 대칭이동이다.

2) T는 α에 대한 대칭성을 가지므로 $\alpha(T)=T$이며 T는 β에 대한 대칭성을 가지므로 $(\beta(\alpha(T)))=(\beta(T))=T$이다. 따라서 집합 T는 변환 $\gamma=\beta\circ\alpha$에 대해서도 대칭성을 가진다.

3) 점 $Q(3,4)$를 원점으로 중심으로 반시계방향으로 90° 만큼 회전시키면 $\alpha(3,4)=(-4,3)$이므로 점 $Q_1(-4,3)$은 반드시 $S(A)$의 원소이어야 하며, $Q_1(-4,3)$을 90° 만큼 회전시킨 $Q_2(-3,-4)$도 $S(A)$의 원소이어야 한다. 마찬가지로 $\alpha(-3,-4)=(4,-3)$이므로 $Q_3(4,-3)$도 $S(A)$의 원소이어야 함을 알 수 있다. 이제 집합

$$A'=\{Q(3,4),\ Q_1(-4,3),\ Q_2(-3,-4),\ Q_3(4,-3)\}$$

은 변환 α에 대하여 대칭성을 가짐을 쉽게 알 수 있다. 이제 A'에 γ를 적용해보면

$$A''=\{(3,4),(-4,3),(-3,-4),(4,-3),(4,3),(3,-4),(-4,-3),(-3,4)\}$$

는 $S(A)$의 부분집합이어야 한다. A''은 α와 β에 대한 대칭성을 가지므로

$$S(A)=A''=\{(3,4),(-4,3),(-3,-4),(4,-3),(4,3),(3,-4),(-4,-3),(-3,4)\}$$

이다.

[2] 함수 F는 1을 2로, 2를 1로 바꾸는 일을 한다.

$F([1;1;2;3])=[2;2;1;3]$, $F([2;2;3;4])=[1;1;3;4]$, $F([3;3;4;5])=[3;3;4;5]$

$F([4;4;5;1])=[4;4;5;2]$, $F([5;5;1;2])=[5;5;2;1]$

이므로 $[2;2;1;3]$, $[1;1;3;4]$, $[4;4;5;2]$는 모두 $S(C)$의 원소이어야 한다. 이제 $S(C)\cup\{[2;2;1;3],[1;1;3;4],[4;4;5;2]\}$에 F를 적용하면 여전히 $S(C)\cup\{[2;2;1;3],[1;1;3;4],[4;4;5;2]\}$의 원소이므로 $S(C)=S\cup\{[1;2;2;3],[1;1;3;4],[2;4;4;5]\}$이다.

[3] $\tau_1=\phi_2\phi_1\phi_2$는 1과 3을 서로 바꾸어 주며 $\tau_2=\phi_3\tau\phi_3$는 1과 4를 그리고 $\tau_3=\phi_3\phi_2\phi_3$는 2와 4를 바꾸어 주는 $\{1,2,3,4\}$의 일대일 대응이다. 따라서

$[\tau_1(2),\tau_1(3),\tau_1(3),\tau_1(4)]=[2;1;1;4]\in S(D)$

$[\phi_1(2),\phi_1(1),\phi_1(1),\phi_1(4)]=[1;2;2;4]\in S(D)$

$[\phi_3(2),\phi_3(3),\phi_3(3),\phi_3(4)]=[2;4;4;3]\in S(D)$

이어야 한다. 따라서 중복되는 $1,2,3,4$가 모두 나타나며 중복되는 원소를 제외한 두 원소로 세 가지 조합이 모두 가능하다. 따라서 $S(D)$는 한 원소가 두 번 중복되어 나타나는 모든 중복조합들의 집합이다. $n(S(D))$는 중복조합에 두 번 나타나는 원소를 고르는 방법의 수 4와 나머지 수 중에서 두 원소를 선택하는 ${}_3C_2=3$의 곱인 12이다.

문제4.

■ 예시답안.

예시 1: $2.5t = 20n$ (즉 $t = 8n$)이며 $10(n-1) \le t = 8n < 10n$이다.

따라서, $10(n-1) \le 8n$에서 $n \le 5$이므로 $n = 5$, 즉, 5개이다.

예시 2: $f(t) = 20 + 20\left[\dfrac{t}{20}\right]$, $g(t) = 2.5t$이다.

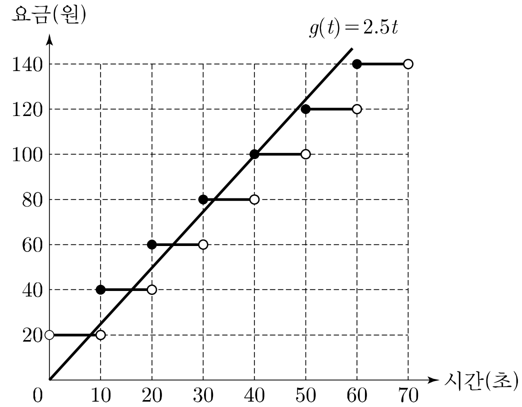
$t = 10n + m$ (여기서, $n = 0, 1, 2, 3, \cdots, 0 \le m < 10$)라 두면

$$2.5(10n+m) = g(t) = f(t) = 20 + 20\left[\frac{10n+m}{10}\right] = 20 + 20\left[n + \frac{m}{10}\right]$$

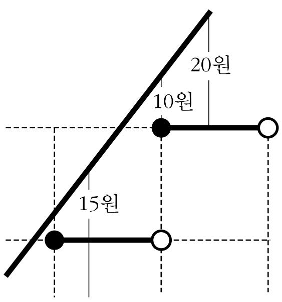
$$= 20 + 20n = 20(1+n)$$

따라서, $0 \le m < 10$이므로 $-2 < 2n = 8 - m \le 8$, 즉, $-2 < n \le 4$이다. n은 음이 아닌 정수이므로, 이를 만족하는 n은 총 5개다.

예시: 아래의 그래프를 그려 만나는 점이 다섯 개인 이유를 논리적으로 설명한다.



(2) 문제 1에서 40초 까지는 다섯 개의 점에서 두함수가 만나고, 그 이후에는 만나는 점이 없으므로, 54~64초에는 $f(t) < g(t)$이다. 따라서 민수는 한 통화 할 때마다 알뜰요금제보다 더 많은 요금을 지불한다. 왼쪽의 그림에서 보는 바와 같이 60초에서 통화당 알뜰요금제 요금과 절약요금제 요금의 차가 제일 적으며, 모든 통화를 60초로 했을 경우에는 $10 \times 99 = -990$원으로 기본요금에서 1000원의 이득을 생각하면, 매달 10원의 이득이 생겨 알뜰요금제가 유리하다. 하지만, 그림 2에서 보는 바와 같이 매달 통화는 60초가 아닌 시간에서의 통화가 있고, 60초가 아닌 시간에서의 통화에서는 10원을 초과하는 손해를 보므로 기본요금에서 1000원의 이득을 생각하면, 항상 매달 알뜰요금제가 손해이므로 민수가 절약요금제에서 알뜰요금제로 변경하는 것은 불리하다.



* 이 문제는 우리가 일상생활에서 항상 휴대하고 있는 휴대폰을 소재로 하여 문제에 친근하게 접근하게 하였다. 휴대폰 요금에 관한 문제로 실질적인 내용을 담고 있고 학생들의 흥미를 유발하는 데 적합한 문제이다.

문제5.

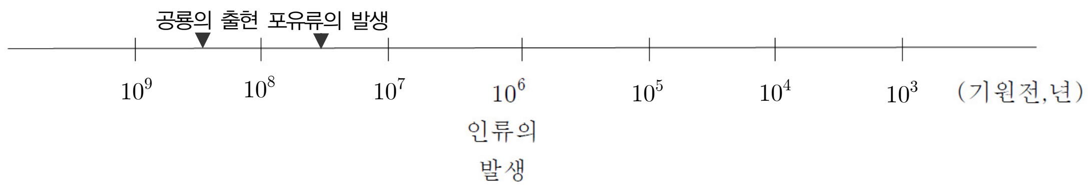
■ 예시답안.

문제 해설

로그함수와 지수함수의 성질을 이해하고 적용할 수 있는지 묻는 문제이다. 약 45억년의 지구의 역사에서 8개의 사건이 발생한 시점이 주어졌는데 그 가운데 (5)-(8)까지의 4개의 사건들이 1억년 이내에 발생한 것이다. [1]에서는 이 사건들이 발생한 시점을 수직선 위에 나타낼 때 생길 수 있는 문제점을 서술하도록 하여, 지문을 이해하고 서술하는 기본 능력을 묻고 있다. [2]에서는 로그눈금을 도입하고, 특정한 사건을 표시한 점이 두 눈금 사이의 중앙점을 기준으로 왼쪽, 오른쪽 중 어디에 나타나는지 판별하도록 하였다. [3]에서는 보낸 광자수를 N_t, 받은 광자수를 N_r이라 할 때, 로그함수를 지수함수로 변환하여 N_t와 N_r과의 관계식을 찾을 수 있는지, 지수함수의 성질을 이용하여 L km 전송 후의 관계를 아는지 묻고 있다.

[1] 1cm 간격이 100만년의 기간을 나타내면 사건 (1)과 사건(8)을 동일 직선에 나타내기 위해 44.49m의 종이가 필요하여 가로 30cm 크기의 종이에는 사건들을 나타낼 수 없다. 또 1cm 간격이 10억년의 기간을 나타낼 때는 사건 (7)과 사건(8)을 동일 직선에 나타내려면 0.004cm에 두 사건을 표시하여야 하는데 이는 불가능하다.

[2] 공룡의 출현 시점은 $2.45 \times 10^8 = 10^x$에서 $x = 8 + \log 2.45 < 8.47$를 얻어 위 직선에 표시한 바와 같이 10^9과 10^8의 정 중앙점($10^{8.5}$) 오른쪽에 있다. 같은 방법으로 (6)포유류의 발생 시점은 $36 \times 10^6 = 10^x$에서 $x = 6 + 2\log 6 = 7.54$를 얻어 위 직선에 표시한 바와 같이 10^8과 10^7의 정 중앙점($10^{7.5}$) 왼쪽에 있다. 또한 고조선의 성립 시점은 $2.3 \times 10 = 10^x$에서 $x = 3 + \log 2.3 < 3.47$를 얻어 위 직선에 표시한 바와 같이 정 중앙점($10^{3.5}$) 오른쪽에 있다.



[3] $10\log\frac{y}{x} = -0.2$에서 $y = x10^{\frac{-2}{100}}$를 얻으며 이것은 $1\,\mathrm{km}$마다 직전 광자수의 $10^{\frac{-2}{100}}$배만 전달되고 나머지 광자들은 소실됨을 의미하며 공비가 $10^{\frac{-2}{100}}$인 등비수열이다. 그러므로 10^{10}개의 광자가 $150\,\mathrm{km}$를 광섬유를 통해 소실되지 않고 받은 광자의 개수는 $10^{10}(10^{\frac{-2}{100}})^{150} = 10^7$개이다.

문제6.

■ 예시답안.

먼저 모인 19명의 악수 횟수가 모두 달랐으므로 가능한 경우의 수는 각자가 0회에서 18회까지가 가능하다. (자신과 자신의 부인은 제외되므로)
여기서 18회 악수를 나누 사람은 그 상대방도 악수 횟수가 1이 추가되므로 상대방 악수 횟수가 0이 될 수 없다. 따라서 악수 횟수가 0이 될 수 있는 사람은 18회 악수 한 사람의 부인이 될 수밖에 없다. 마찬가지로 17회 악수를 나눈 사람과 1회 악수를 나눈 사람은 부부사이다. 이런 식으로 묶게 되면 (18, 0), (17, 1), (16, 2), ..., (9, 9)가 된다.
그러나 19명의 악수 횟수가 모두 달라야 하므로 악수 횟수가 9인 사람이 두 명이 될 수는 없다. 따라서 집 주인이 9번 악수를 했고 집주인 부인이 9번 악수를 한 것이 된다.
이를 일반화 하면 n쌍의 부부를 파티에 초대했고 2n-1명의 악수 횟수가 모두 달랐다면

$$(2n-2,\ 0),\ (2n-3,\ 1),\ \ldots,\ (n,\ n)$$

이 모두 부부 사이가 된다. 따라서 집주인의 부인은 모두 n번 악수한 셈이 된다.

문제7.

■ 예시답안.

[1] 집합 A를 k개의 원소로 이루어진 집합으로부터 중복을 허락하여 n개를 뽑아 만든 모든 중복 집합들의 모임이라고 하자. 이때 서로 다른 k개의 원소를 각각 $x_1, x_2, \cdots, x_k$ 라고 하자. $x_i(i=1,\cdots,k)$를 선택하지 않으면, $x_i=0$에 대응시키고, 한 번 뽑았을 때 $x_i=1$에 대응시키고, $\cdots$, n번 뽑았을 때 $x_i=n$에 대응시키면, 집합 A와 집합 $X=\{(x_1, x_2, \cdots, x_k)|x_1+x_2+\cdots+x_k=n,\ x_i$는 음이 아닌 정수$\}$는 일대일 대응 관계에 있다. 여기서 $b_i=x_i+1$에 대응시키면, $b_1+b_2+b_3=(x_1+1)+(x_2+1)+\cdots+(x_k+1)=n+k$, $B=\{(b_1, b_2, \cdots, b_k)|b_1+b_2+\cdots+b_k=n+k_n,\ b_i$는 양의 정수$\}$가 된다. 따라서 집합 X와 집합 B는 일대일 대응이다. 이것은 집합 A와 집합 B가 일대일 대응 관계에 있음을 의미한다.

[2] A, B, C가 주어졌을 때, 중복을 허용해서 4개를 선택하는 경우를 다음과 같이 생각해보자. A, BB, C를 0|00|0과 같이 생각할 수 있다. 즉 서로 다른 세 가지를 구분하려면 ‘|’이 두 개 필요하고 각각의 개수는 0의 개수로 표현할 수 있다. 따라서 서로 다른 k개 중에서 중복을 허락해서 n개를 택하는 경우의 수는 $k-1$개의 구분자 ‘|’와 n개의 ‘0’을 일렬로 세우는 경우의 수와 일대일 대응관계에 있음을 알 수 있다.

따라서 그 경우의 수는 같은 것을 포함하는 순열의 수로서 $\dfrac{(n-1+k)!}{(n-1)!k!}$로 계산할 수 있다. 그런데 $\dfrac{(n-1+k)!}{(n-1)!k!}={}_{n+k-1}C_k$로 표현할 수 있다. 이것은 집합 A의 원소의 개수가 $M(k, n)=\dfrac{(n-1+k)!}{(n-1)!k!}={}_{n+k-1}C_k$임을 의미한다.

[3] 현옥이는 시합한 두 팀의 이름을 이미 알고 있고 그것을 비트로 표현한 이진법의 수를 이미 알고 있고 철수는 이긴 팀의 이진법 표현을 알고 있다는 것이 가정이다. 만약에 $[\log_2 L]=n$이라고 하자. 시합한 두 팀은 서로 다른 팀이므로 비트 수가 다른 $i(0\le i\le n)$번째 비트가 반드시 존재한다.

따라서 현옥이는 i번째 비트 수를 질문하면 되고 철수는 그것을 한 비트(0또는 1로 답하면 된다. 그런데 $C_1(X, Y)=[\log_2 L]=n$이므로 n까지의 수를 표현하기 위한 비트 수의 개수는 $[\log_2 n]=[\log_2[\log_2 L]]$이고 철수가 답하기 위한 비트 수는 1이다. 따라서 $C_2(X, Y)=[\log_2 n]+1=[\log_2[\log_2 L]]+1$이고, 첫 번째 메시지 전송 방향은 현옥$\rightarrow$철수, 두 번째 전송 방향은 철수$\rightarrow$현옥이다.

문제8.

■ 예시답안.

[1] 원금을 A원이라고 할 때, $1/n$년 이율 r_n을 적용한 1년 후의 원리합계와 연이율 r을 적용한 1년 후의 원리합계는 같아야 하므로 다음이 성립한다.

$$A(1+r_n)^n = A(1+r)$$

위 식으로부터 다음과 같이 r_n을 r에 관한 식으로 표현할 수 있다.

$$r_n = (1+r)^{\frac{1}{n}} - 1$$

[2] 이항정리는 다음과 같다.
임의의 실수 a, b와 자연수 n에 대하여 다음이 성립한다.

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} {}_nC_k a^k b^{n-k} \ (\text{또는} = \sum_{k=0}^{n} {}_nC_k a^{n-k} b^k)$$

월이율 r_{12}의 값을 계산할 수 있는 식은 다음과 같다.

$$(1+r_{12})^{12} = 1+r \quad \cdots (1)$$

여기에서 이항정리를 이용하여 좌변을 전개하면

$$(1+r_{12})^{12} = 1 + {}_{12}C_1(r_{12})^1 + {}_{12}C_2(r_{12})^2 + {}_{12}C_3(r_{12})^3 + \cdots + {}_{12}C_{12}(r_{12})^{12} \quad \cdots (2)$$

그런데 저금리의 경우에는 r_{12}의 값이 0에 가까운 값이므로, (2)의 우변에서 r_{12}의 2차항 이상인 제3항부터 마지막 항까지는 제1차항과 제2차항에 비해 무시할 수 있을 만큼 작은 것으로 생각할 수 있다. 따라서 우변의 제2항까지만을 좌변의 근삿값으로 놓고 이를 (1)의 우변과 비교하면 $1+r \approx 1+12r_{12}$이다. 이로부터 $r_{12} \approx r/12$를 월이율 r_{12}의 근삿값으로 사용할 수 있다.

[3] 임의의 실수 a에 대하여

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{a}{n}\right)^n = e^a$$

이 성립함을 이용함으로써 다음과 같이 W_1과 W_2의 값을 구할 수 있다.

$$W_1 = \lim_{n\to\infty}(1+s_n)^n/(1+r) = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{r}{n}\right)^n/(1+r) = e^r/(1+r)$$

$$W_2 = \lim_{n\to\infty}(1+t_n)^n/(1+r) = \lim_{n\to\infty}\left\{1+\frac{1}{n}\log(1+r)\right\}^n/(1+r) = e^{\log(1+r)}/(1+r)$$

$$= \frac{1+r}{1+r} = 1$$

$W \neq 1$, $W_2 = 1$이므로 $t_n = \frac{1}{n}\log(1+r)$이 $s_n = \frac{r}{n}$보다 초단기이율에 대한 근사효율 면에서 더 좋다고 할 수 있다.

문제9.

■ 예시답안.

[1] 김이화 과장이 첫 번째(65세 때) 받는 1000만원의 현재가치(2015년 1월 1일)를 a_1이라고 할 때 $a_1 = 1000(1.05)^{-36}$로 나타낼 수 있다. 김이화 과장은 100세까지 총 36번의 1000만원을 수령하였는데, 일반적으로 김이화 과장이 n번째 받는 1000만원의 현재가치는 $a_n = 1000(1.05)^{-(35+n)}$, $n = 1, \cdots, 36$으로 나타낼 수 있다. 어는 첫째항이 a_1, 공비가 $(1.05)^{-1}$인 등비수열이고, 총 36번 받은 1000만원의 현재가치의 합은 이 등비급수의 1항부터 36항까지의 합이므로 다음과 같이 계산된다.

$$S_a = a_1 \frac{1-1.05^{-36}}{1-1.05^{-1}} = 1000(1.05)^{-36} \frac{1-1.05^{-36}}{1-1.05^{-1}}$$

$$\approx 1000 \cdot 0.17 \cdot (1-0.17) \cdot 21 = 2963.1$$

(**별해**) 김이화 과장이 100세 말(2085년 12월 31일)까지 받은 돈의 원리합계를 구한 후

$$1000 \frac{1.05^{36}-1}{1.05-1}$$

이를 김이화 과장이 30세 초(2015년 1월 1일)일 때 가치로 환산한다.

$$S_a = 1000(1.05)^{-71} \frac{1.05^{36}-1}{1.05-1} = 1000(1.05)^{-36} \frac{1-1.05^{-36}}{1-1.05^{-1}}$$

$$\approx 1000 \cdot 0.17 \cdot (1-0.17) \cdot 21 = 2963.1$$

[2] 김이화 과장이 첫 번째(30세 때) 적립하는 적금액(300만원)의 현재(2015년 1월 1일)가치를 b_1이라고 할 때 $b_1 = 300(1.05)^{-1}$로 나타낼 수 있다. 김이화 과장은 64세까지 총 35번 매회 300만원씩을 적립하였는데, 일반적으로 김이화 과장이 n번째 적립한 금액의 현재가치는 $b_n = 300(1.05)^{-n}$, $n = 1, \cdots, 35$로 나타낼 수 있다. 이는 첫째항이 b_1 그리고 공비가 $(1.05)^{-1}$인 등비수열이고, 총 35번 적금의 현재가치의 합은 이 등비급수의 1항부터 35항까지 합이므로

$$S_b = b_1 \frac{1-1.05^{-35}}{1-1.05^{-1}} = 300(1.05)^{-1} \frac{1-1.05^{-35}}{1-1.05^{-1}}$$

$$\approx 300 \cdot 0.95 \cdot (1-0.18) \cdot 21 = 4907.7$$

로 구할 수 있다. [1]에서 구한 퇴직금의 현재가치는 $S_a = 2963.1$이고 $S_a < S_b$이므로 김이화 과장의 적금은 퇴직금을 충당하기에 충분함을 알 수 있다.
(**별해**) 김이화 과장이 100세 말(2085년 12월 31일)까지 받은 돈의 원리합계를 구한다.

$$A = 1000 \frac{1.05^{36}-1}{1.05-1}$$

이제 김이화 과장이 64세 말(2049년 12월 31일)까지 적립한 돈의 원리합계를 구한 후 이

적금의 2085년 12월 31일 가치로 환산하면

$$B = \left(300\frac{1.05^{35}-1}{1.05-1}\right)(1.05)^{36}$$

B가 A보다 크므로 이 적금은 퇴직금을 충당하기에 충분하다.

[3] 확률변수 X_1을 김이화 과장이 첫 번째 해에 적립한 금액의 현재가치라고 하면 X_1의 확률분포는

X_1	0	$K(1.05)^{-1}$
$P(X_1 = x)$	$1-\frac{95}{100}$	$\frac{95}{100}$

이므로 X_1의 기댓값은 $E[X_1] = K(1.05)^{-1}\frac{95}{100} + 0\cdot\left(1-\frac{95}{100}\right) = K\frac{95}{100}$이다.

일반적으로 확률변수 X_n을 김이화 과장이 n번째 해에 적립할 금액의 현재가치라고 하면 X_n의 확률분포는

X_1	0	$K(1.05)^{-1}$
$P(X_n = x)$	$1-\left(\frac{95}{100}\right)^n$	$\left(\frac{95}{100}\right)^n$

이므로 X_n의 기댓값은 $E[X_n] = K(1.05)^{-n}\left(\frac{95}{100}\right)^n + 0\cdot\left(1-\left(\frac{95}{100}\right)^n\right) = K\left(\frac{95}{105}\right)^n$이다.

김이화 과장은 최대 35번째 해까지 적립을 하는데 이때 적금액의 현재가치 S_1은 $S_1 = E[X_1] + \cdots + E[X_{35}]$로 나타낼 수 있고, 위 수열은 첫째항이 $K\frac{95}{100}$이고 공비가 $\frac{95}{105}$인 등비수열의 1항부터 35항까지의 합이므로

$$S_1 = E[X_1] + \cdots + E[X_{35}] = K\frac{95}{105}\frac{1-\left(\frac{95}{105}\right)^{35}}{1-\frac{95}{105}}$$

$$= K\cdot 0.90\cdot(1-0.030)\cdot 10.5 = K\cdot 9.1665$$

이다. 이제 확률변수 Y_1을 김이화 과장이 첫 번째(65세 때) 받을 퇴직금 수령액의 현재가치라고 하면 Y_1의 확률분포는

x	0	$1000(1.05)^{-36}$
$P(Y_1 = x)$	$1-\left(\frac{95}{100}\right)^{36}$	$\left(\frac{95}{100}\right)^{36}$

이므로 Y_1의 기댓값은 $E[Y_1] = 1000(1.05)^{-36}\left(\frac{95}{100}\right)^{36} = 1000\left(\frac{95}{105}\right)^{36}$이다. 일반적으로 확률변수 Y_n을 김이화 과장이 n번째 받을 퇴직금 수령액의 현재가치라고 하면 Y_1의 확률분포는

x	0	$1000(1.05)^{-(35+n)}$
$P(Y_n = x)$	$1-\left(\frac{95}{100}\right)^{35+n}$	$\left(\frac{95}{100}\right)^{35+n}$

이므로 Y_n의 기댓값은 $E[Y_n] = 1000(1.05)^{-(35+n)}\left(\frac{95}{100}\right)^{35+n} = 1000\left(\frac{95}{105}\right)^{35+n}$이다. 김이화 과장은 최대 36번까지 퇴직금 수령액 1000만원씩을 수령할 수 있는데, 이때 퇴직금액의 현재가치는 $S_2 = E[Y_1] + \cdots + E[Y_{36}]$로 나타낼 수 있고, 위 수열은 첫째항이 $1000\left(\frac{95}{105}\right)^{36}$이고 공비가 $\frac{95}{105}$인 등비수열의 1항부터 36항까지 합이므로

$$S_2 = E[Y_1] + \cdots + E[Y_{36}] = 1000\left(\frac{95}{105}\right)^{36}\frac{1-\left(\frac{95}{105}\right)^{36}}{1-\frac{95}{105}}$$

$$= 1000 \cdot 0.027 \cdot (1-0.027) \cdot 10.5 = 275.8455$$

이다. 퇴직금의 현재가치와 적립금의 현재가치가 같도록 납입금액 K를 책정한다고 하였으므로 $S_1 = S_2$가 되도록 K의 값을 정하면 대략 $\frac{275.8455}{9.1665} \approx 30.01$만원이 된다.

문제10.

■ 예시답안.

[1] 제시문 (나)에서 제시된 (소득이 a, b 사이에 있는 사람 수)= $\int_a^b x^{-p}dx$를 정적분의 정의에 따라 $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} x_k^{-p}\triangle x$ (단 $\triangle x=\frac{b-a}{n}$, $x_k=a+k\triangle x$)로 나타낼 수 있다.
우선 (소득이 x_k인 사람들의 소득의 총합)은 (소득 x_k)×(소득이 x_k인 사람 수)이므로 x_k^{1-p}로 추론할 수 있다. 따라서 정적분의 정의에 따라
(소득이 a, b 사이에 있는 사람들의 소득의 합)

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} x_k^{1-p}\triangle x \text{ (단 } \triangle x=\frac{b-a}{n},\ x_k=a+k\triangle x) = \int_a^b x^{1-p}dx$$

이다.

[2] (상위 20% 인구수)는 '(총 인구수)$\times\frac{1}{5}$'이므로 $\frac{1}{5}\int_1^{100} x^{\frac{-3}{2}}dx=\frac{1}{2}\left[-2\cdot x^{\frac{-1}{2}}\right]_1^{100}=\frac{1}{5}\cdot\frac{9}{5}=\frac{9}{25}$이다. 상위 20%가 갖는 소득이 '$b$부터 100까지'라고 하면 (상위 20% 인구수)= $\int_b^{100} x^{-\frac{3}{2}}dx=\frac{9}{25}\left[-2\cdot x^{-\frac{1}{2}}\right]_b^{100}=\frac{9}{25}-\frac{1}{5}+2\cdot\frac{1}{\sqrt{b}}=\frac{9}{25}$이므로 $\frac{1}{\sqrt{b}}=\frac{7}{25}$이다. 상위 20%가 갖는 소득은 '$b$부터 100까지'이므로 (상위 20%의 소득의 총합)은 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\int_b^{100} x^{-\frac{1}{2}}dx=\left[2\cdot x^{\frac{1}{2}}\right]_b^{100}=20-2\sqrt{b}=20-\frac{50}{7}=\frac{90}{7} \quad \cdots ①$$

반면 (총 소득의 80%)는 다음과 같다.

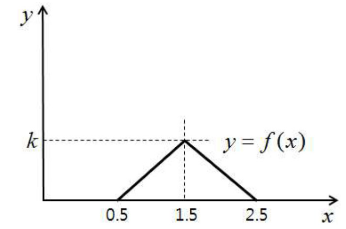
$$\frac{4}{5}\int_1^{100} x^{-\frac{1}{2}}dx=\frac{4}{5}\left[2\cdot x^{\frac{1}{2}}\right]_1^{100}=18\times\frac{4}{5}=\frac{72}{5} \quad \cdots ②$$

따라서 ① < ②이므로 파레토 법칙은 성립하지 않는다.

문제11.

■ 예시답안.

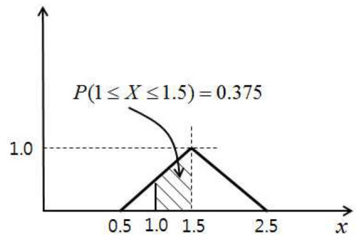
[1] 확률분포함수 $f(x)$를 총 구간 $0.5 \leq x \leq 2.5$에 대해 적분하면 1이 되어야 한다. 확률분포함수 $f(x)$가 아래와 같은 삼각형 모양임을 이용하면 다음과 같이 k값은 1로 구해진다.

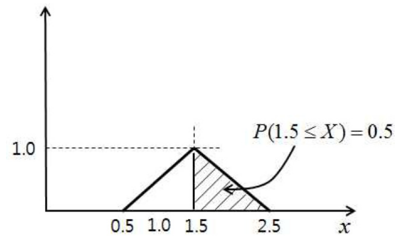


$$\int_{0.5}^{2.5} f(x)dx = \frac{1}{2}(2k) = k = 1$$

[2] ⅰ) 신형 항공기 도입에 따른 평균이득을 구하기 위해서는 평균효용과 평균비용을 각각 구한 후 이들의 차이를 계산하면 된다.

신형 항공기 1대를 통한 연료비 절감 효용은 향후 20년간 평균국제유가 X에 따라 달라지며 평균값은 $P(1 \leq X \leq 1.5) \times 5 + P(1.5 \leq X) \times 7$와 같이 구할 수 있다. X에 대한 확률분포함수가 삼각형 모양임을 이용하면 $P(1 \leq X \leq 1.5)$ 및 $P(1.5 \leq X)$는 아래와 같이 구할 수 있다.





여기에 구입 항공기 대수 20을 곱하면 항공기 도입에 따른 연료비절감 효용의 평균은 다음과 같다.

$$\text{평균효용} = (P(1 \leq X \leq 1.5) \times 5 + P(1.5 \leq X) \times 7) \times 20$$
$$= (0.375 \times 5 + 0.5 \times 7) \times 20 = 107.5(\text{백억 원})$$

신형 항공기 도입 대수가 30대 이하이므로 정비시설 구축에 필요한 비용은 없으며([표 2] 참조), 항공기 구입에 필요한 비용은 [표 1]의 한 대당 구입비용 5(백억 원/대)에 총 구입대수 20을 곱하여 얻을 수 있다.

$$\text{평균비용} = 5 \times 20 = 100(\text{백억 원})$$

따라서 항공기 20대를 신형으로 교체함으로 ○○항공사가 얻을 수 있는 이득의 기댓값(평균)은 평균효용과 평균비용의 차이인 7.5(백억 원)이다.

ⅱ) 항공사의 이득은 평균국제유가에 영향을 받는다. 평균국제유가에 따른 이득을 계

산하면

a) $0.5 \le X \le 1$

  이득 = 효용 − 비용 = $0 \times 20 - 5 \times 20 = -100$(백억 원)

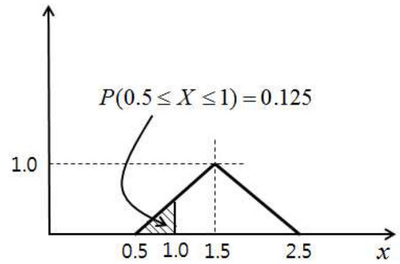
b) $1 \le X \le 1.5$

  이득 = 효용 − 비용 = $5 \times 20 - 5 \times 20 = 0$(백억 원)

c) $1.5 \le X$

  이득 = 효용 − 비용 = $7 \times 20 - 5 \times 20 = 40$(백억 원)

따라서 항공사가 음의 이득, 즉 손해를 보는 경우는 a)에 해당하며, 해당 확률은 아래 그림과 같이 0.125이다.



[3] i) 신형 항공기 교체대수를 y라 하면, 예상되는 효용의 평균은 아래와 같다.

$$평균효용 = (P(1 \le X \le 1.5) \times 5 + P(1.5 \le X) \times 7) \times y$$
$$= (0.375 \times 5 + 0.5 \times 7) \times y = 5.375y \qquad (식\ a)$$

신형 항공기로의 교체에 따른 비용은 교체되는 항공기의 대수에 따라 달라진다. 따라서 교체 항공기기 대수 y의 범위를 다음과 같이 구간별로 나눈 후 각각에 대해 평균비용 및 이득을 아래와 같이 계산한다.

a) $0 \le y \le 10$

평균비용 = 항공기 구입비용 + 정비시설 구축비용 = $5.5y$ (식 b)

(교체 항공기 대수가 30대 이하이므로 정비시설 구축에 필요한 비용은 없으며([표 2] 참조), 항공기 한 대당 구입단가는 [표 1]에 따라 5.5(백억 원/대)이다.)

평균이득은 평균효용(식 a)에서 평균비용(식 b)을 뺀 값으로서 $-0.125y$로 구해진다. 평균이득은 교체항공기 대수에 대한 감소함수이므로, 평균이득을 최대로 만드는 교체 항공기 대수는 $y = 0$이며 이때의 평균이득값은 0(백억 원)이다.

b) $11 \le y \le 30$

평균비용 = 항공기 구입비용 + 정비시설 구축비용 = $5y$ (식 c)

(교체 항공기 대수가 30대 이하이므로 정비시설 구축에 필요한 비용은 없으며([표 2] 참조), 항공기 한 대당 구입단가는 [표 1]에 따라 5(백억 원/대)이다.)

평균이득은 평균효용(식 a)에서 평균비용(식 c)를 뺀 값으로서 $0.375y$로 구해진다. 평균이득은 교체항공기 대수에 대한 증가함수이므로, 평균이득을 최대로 만드는 교체 항공기 대수는 $y = 30$이며 이때의 평균이득값은 11.25(백억 원)이다.

c) $31 \le y \le 50$

평균비용 = 항공기 구입비용 + 정비시설 구축비용 = $5y+7$ (식 d)

(교체 항공기 대수가 31대 이상이므로 정비시설 구축에 7(백억 원)의 비용이 발생하며([표 2] 참조), 항공기 한 대당 구입단가는 [표 1]에 따라 5(백억 원/대)이다.)

평균이득은 평균효용(식 a)에서 평균비용(식 d)를 뺀 값으로서 $0.375y-7$로 구해진다. 평균이득은 교체항공기 대수에 대한 증가함수이므로, 평균이득을 최대로 만드는 교체 항공기 대수는 $y=50$이며 이때의 평균이득값은 11.75(백억 원)이다.

a), b), c)의 내용을 조합하면, ○○항공사의 평균이득을 최대로 하는 신형 항공기 교체 대수는 50대이며 이때의 평균이득은 11.75(백억 원)이다.

ii) 신형 항공기 교체대수를 y라 하면, 교체 대수 및 평균국제유가의 범위에 따른 이득과 이득이 음수가 되는 확률은 다음과 같이 구해진다.

a) $1 \le y \le 10$ (교체항공기 대수가 1대 이상인 경우만 고려)

가) $0.5 \le X \le 1$

이득 $= 0 \cdot y - 5.5y = -5.5y < 0$

나) $1 \le X \le 1.5$

이득 $= 5y - 5.5y = -0.5y < 0$

다) $1.5 \le X$

이득 $= 7y - 5.5y = 1.5y > 0$

따라서 이득이 음수가 되는 확률 $= P(X \le 1.5) = 0.5$

b) $11 \le y \le 30$

가) $0.5 \le X \le 1$

이득 $= 0 \cdot y - 5y = -5y < 0$

나) $1 \le X \le 1.5$

이득 $= 5y - 5y = 0$

다) $1.5 \le X$

이득 $= 7y - 5y = 2y > 0$

따라서 이득이 음수가 되는 확률 $= P(X \le 1) = 0.125$

c) $31 \le y \le 50$

가) $0.5 \le X \le 1$

이득 $= 0 \cdot y - 5y - 7 = -5y - 7 < 0$

나) $1 \le X \le 1.5$

이득 $= 5y - 5y - 7 = -7 < 0$

다) $1.5 \le X$

이득 $= 7y - 5y - 7 = 2y - 7 > 0$ (왜냐하면 $31 \le y$)

따라서 이득이 음수가 되는 확률 $= P(X \le 1.5) = 0.5$

a), b), c)로부터 손해 확률을 최소로 하는 교체 대수의 범위는 $11 \le y \le 30$이다. 또한 이 범위에서 이익 기대치는 $0.375y$이며, $y = 30$에서 최댓값을 가진다.

내용을 종합하면 손해 확률을 최소로 하는 교체 대수 중 이익의 기대치가 가장 높은 30대가 가장 최선의 선택이라고 할 수 있으며, 이때 손해를 입게 될 확률은 0.125 그리고 이득의 기대치는 11.25(백억 원)이다.