위 상 수 학

연습문제 풀이집

(제5판 홀수형)

| 박대희 · 안승호 |

경문사

차례

제 1 장

집합론 †

1.1 기초논리

문제 1.1.1. 진리표를 사용하여 확인할 수 있으므로 생략한다.

문제 1.1.3. 우리는 수학적 귀납법을 사용하여 주어진 등식이 성립함을 보이자. 먼저 자연수 n에 관한 명제함수 $p(n)$을

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

로 놓자.

(i) $n = 1$일 때, $1^2 = \frac{1(1+1)(2+1)}{6}$ 이므로 $p(1)$은 참이다.

(ii) $n = k$일 때 $p(k)$가 참이라 가정하자. 즉,

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + k^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$$

이 성립한다고 가정하자. 이제 양변에 $(k+1)^2$을 더하면

$$\begin{aligned}
1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + k^2 + (k+1)^2 &= \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2 \\
&= \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + \frac{6(k+1)^2}{6} \\
&= \frac{(k+1)(2k^2+7k+6)}{6} \\
&= \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6} \\
&= \frac{(k+1)\{(k+1)+1\}\{2(k+1)+1\}}{6}
\end{aligned}$$

이 성립하므로 $p(k+1)$이 참이 된다.

따라서 수학적 귀납법에 의하여 모든 자연수 n에 대하여 $p(n)$은 참이다. 즉, 주어진 등식이 모든 자연수에 대하여 성립한다.

1.2 집합과 연산

문제 1.2.1. (1) $X = A \cap (B \cup C)$.

(2) $Y = (A \cap B) \cup C$.

(3) $Z = (A - B) \cup C$.

문제 1.2.3.

(1) $(A^c)^c = A$:

$$\begin{aligned} x \in (A^c)^c \quad &\Leftrightarrow \quad x \notin A^c \\ &\Leftrightarrow \quad \sim (x \in A^c) \\ &\Leftrightarrow \quad \sim (x \notin A) \\ &\Leftrightarrow \quad \sim (\sim (x \in A)) \\ &\Leftrightarrow \quad x \in A \end{aligned}$$

(2) (i) $\varnothing^c = U$: $x \in \varnothing^c \;\Leftrightarrow\; x \in U \wedge x \notin \varnothing \;\Leftrightarrow\; x \in U$.

(ii) $U^c = (\varnothing^c)^c = \varnothing$.

(3) (i) $A \cap A^c = \varnothing$: 먼저 $\varnothing \subset A \cap A^c$는 당연하다. 역으로

$$x \in A \cap A^c \;\Rightarrow\; x \in A \wedge x \notin A \;\Rightarrow x \in A \wedge \sim (x \in A)$$

이다. 그런데 $x \in A \wedge \sim (x \in A)$가 항상 거짓(F)이므로

$$x \in A \wedge \sim (x \in A) \;\Rightarrow x \in \varnothing$$

이 된다. 그리고 추이법칙에 의해

$$x \in A \cap A^c \;\Rightarrow\; x \in \varnothing$$

이므로 $A \cap A^c \subset \varnothing$이다.

(ii) $A \cup A^c = (A^c \cap A)^c = \varnothing^c = U$.

문제 1.2.5. (1) $(A-B)\cup(B-A)=(A\cup B)-(A\cap B)$:

$$\begin{aligned}(A-B)\cup(B-A) &= (A\cap B^c)\cup(B\cap A^c)\\ &= [(A\cap B^c)\cup B]\cap[(A\cap B^c)\cup A^c]\\ &= [(A\cup B)\cap(B^c\cup B)]\cap[(A\cup A^c)\cap(B^c\cup A^c)]\\ &= [(A\cup B)\cap U]\cap[U\cap(B^c\cup A^c)]\\ &= (A\cup B)\cap(A^c\cup B^c)\\ &= (A\cup B)\cap(A\cap B)^c\\ &= (A\cup B)-(A\cap B)\end{aligned}$$

(2) $(A-C)\cup(B-C)=(A\cap C^c)\cup(B\cap C^c)=(A\cup B)\cap C^c=(A\cup B)-C$.
(3) $(A-C)\cap(B-C)=(A\cap C^c)\cap(B\cap C^c)=(A\cap B)\cap C^c=(A\cap B)-C$.

문제 1.2.7. 먼저 $A\times\varnothing=\varnothing$임을 보이자. 만약 $A\times\varnothing\neq\varnothing$이라고 가정하면 $(x,y)\in A\times\varnothing$가 존재하여 $y\in\varnothing$이 된다. 이는 공집합의 정의에 모순이다. 따라서 $A\times\varnothing=\varnothing$이 되어야 한다. 같은 방법으로 $\varnothing\times A=\varnothing$도 보일 수 있다.

문제 1.2.9. $(X\times Y)-(A\times B)=[(X-A)\times Y]\cup[X\times(Y-B)]$:

$$\begin{aligned}&(x,y)\in(X\times Y)-(A\times B)\\ \Leftrightarrow\ &(x,y)\in X\times Y\wedge(x,y)\notin A\times B\\ \Leftrightarrow\ &(x\in X\wedge y\in Y)\wedge\sim((x,y)\in A\times B)\\ \Leftrightarrow\ &(x\in X\wedge y\in Y)\wedge\sim(x\in A\wedge y\in B)\\ \Leftrightarrow\ &(x\in X\wedge y\in Y)\wedge(x\notin A\vee y\notin B)\\ \Leftrightarrow\ &(x\in X\wedge y\in Y\wedge x\notin A)\vee(x\in X\wedge y\in Y\wedge y\notin B)\\ \Leftrightarrow\ &(x\in X-A\wedge y\in Y)\vee(x\in X\wedge y\in Y-B)\\ \Leftrightarrow\ &(x,y)\in(X-A)\times Y\vee(a,y)\in X\times(Y-B)\\ \Leftrightarrow\ &(x,y)\in[(X-A)\times Y]\cup[X\times(Y-B)]\end{aligned}$$

문제 1.2.11. 수학적 귀납법을 사용하여 보이자. 이를 위해 자연수 n에 관한 명제 $p(n)$을 다음과 같이 정의하자:

$p(n)$: 만약 집합 X의 원소의 개수가 n이면 $\mathscr{P}(X)$의 원소의 개수는 2^n이다.

(i) 특별히 원소의 개수가 0개인 집합은 $\varnothing$이고 $\mathscr{P}(\varnothing)=\{\varnothing\}$이므로 $\mathscr{P}(\varnothing)$의 원소의 개수는 1이다. 그리고 $2^0=1$이므로 $p(0)$이 성립한다.

그리고 X의 원소의 개수가 1이면 $X=\{x\}$이라 할 수 있다. 그러면 $\mathscr{P}(\{x\})=\{\varnothing,\{x\}\}$이므로 $\mathscr{P}(\{x\})$의 원소의 개수는 2이다. 그리고 $2^1=2$이므로 $p(1)$이 성립한다.

(ii) 이제 자연수 n에 대하여 $p(n)$이 성립한다고 가정하자. 그리고 X를 원소의 개수가 $n+1$인 집합이라 하자. 그러면 $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1}\}$이라 할 수 있다. 그리고 $Y = X - \{x_{n+1}\} = \{x_1, \ldots, x_n\}$이라 하자. 그러면 Y의 원소의 개수가 n이므로 귀납법 가정에 의해 $\mathscr{P}(Y)$의 원소의 개수는 2^n이다. 한편 모든 $A \subset Y$에 대하여 $A, A \cup \{x_{n+1}\} \subset X$이고 $A \neq A \cup \{x_{n+1}\}$이다. 더구나

$$\mathscr{P}(X) = \{A \mid A \in \mathscr{P}(Y)\} \cup \{A \cup \{x_{n+1}\} \mid A \in \mathscr{P}(Y)\}$$

이므로 $\mathscr{P}(X)$의 원소의 개수는 $\mathscr{P}(Y)$의 원소의 개수의 2배이다. 따라서 $\mathscr{P}(X)$의 원소의 개수는 $2^{n+1} (= 2 \times 2^n)$이다.

따라서 수학적 귀납법에 의하여 주어진 성질은 모든 집합에 대하여 성립한다.

1.3 동치관계와 분할

문제 1.3.1. 주어진 실수 $x \in \mathbb{R}$에 대한 동치류는

$$[x] = \{x + n \mid n \in \mathbb{Z}\} = x + \mathbb{Z}$$

이다. 그리고

$$\mathbb{R}/_\sim = \{[x] \mid 0 \leq x < 1\}$$

이다.

1.4 함수와 곱집합

문제 1.4.1. (1) $f(\varnothing) = \varnothing$: 만약 $f(\varnothing) \neq \varnothing$이라고 가정하면 $y \in f(\varnothing)$인 $y \in Y$가 존재한다. 그러면 $f(x) = y$를 만족하는 $x \in \varnothing$가 존재하여야 한다. 이는 모순이다. 따라서 $f(\varnothing) = \varnothing$이다.

(2) $f^{-1}(\varnothing) = \varnothing$: 만약 $f^{-1}(\varnothing) \neq \varnothing$이라 가정하면 $x \in f^{-1}(\varnothing)$인 $x \in X$가 존재한다. 그러면 $f(x) \in \varnothing$이 되어 모순이다.

(3) 만약 $A \subset B \subset X$이면 $f(A) \subset f(B)$이다: $A \subset B \subset X$이므로

$$\begin{aligned} y \in f(A) &\Rightarrow \exists x \in A \ \text{s.t.}\ f(x) = y \\ &\underset{(*)}{\Rightarrow} x \in B \ \text{s.t.}\ f(x) = y \\ &\Rightarrow y \in f(B) \end{aligned}$$

이 성립한다. 따라서 $f(A) \subset f(B)$이다. 우리는 $(*)$에서 $A \subset B$라는 조건을 사용하였다.

문제 1.4.3. (1) 성질 1.4.6(1)에 의해 $f(A-B) \subset f(A)-f(B)$임을 보이면 된다. 만약 $y \in f(A-B)$이면 $f(x)=y$를 만족하는 $x \in A-B$가 존재한다. 더구나 $x \in A$이므로 $y=f(x) \in f(A)$이다. 이제 $y \notin f(B)$임을 보이자. 만약 $y \in f(B)$라고 가정하면 $f(b)=y$를 만족하는 $b \in B$가 존재하여 $f(b)=f(x)$이다. 그런데 f가 단사이므로 $b=x$이다. 이는 $x \in A-B$에 모순이다. 따라서 $y \notin f(B)$이므로 $y \in f(A)-f(B)$이다 그러므로 $f(A-B) \subset f(A)-f(B)$이다.

(2) 편의상 $C = \bigcap_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha$이라 하자. 먼저 모든 $\alpha \in \Lambda$에 대해 $A_\alpha \supset C$이므로 기초정리 1.4.3(3)에 의해 $f(A_\alpha) \supset f(C)$이다. 그러므로 $\bigcap_{\alpha\in\Lambda} f(A_\alpha) \supset f(C)$이다. 역으로 만약 $y \in \bigcap_{\alpha\in\Lambda} f(A_\alpha)$이면 모든 $\alpha \in \Lambda$에 대해 $y \in f(A_\alpha)$이므로 $f(x_\alpha)=y$를 만족하는 $x_\alpha \in A_\alpha$가 존재한다. 더구나 f가 단사이므로 모든 x_α는 같다. 우리는 $x_* = x_\alpha(\forall\alpha \in \Lambda)$이라 하자. 그러면 $x_* \in C$이고 $y=f(x_*) \in f(C)$이다. 그래서 $\bigcap_{\alpha\in\Lambda} f(A_\alpha) \subset f(C)$이다. 따라서 $f(C) = \bigcap_{\alpha\in\Lambda} f(A_\alpha)$이다.

문제 1.4.5. (1) (반사율) 모든 $x \in X$에 대하여 $f(x)=f(x)$이므로 $x \sim x$이다.

(대칭률) 만약 $x \sim y$이면 $f(x)=f(y)$이므로 $f(y)=f(x)$이 되어 $y \sim x$이다.

(추이율) 만약 $x \sim y$이고 $y \sim z$이면 $f(x)=f(y)$이고 $f(y)=f(z)$이므로 $f(x)=f(z)$이 되어 $x \sim z$이다.

(2) 먼저 $\tilde{f}$가 전사임을 보이자. 임의로 주어진 $y \in Y$에 대하여 f가 전사이므로 $f(x)=y$인 점 $x \in X$가 존재한다. 그러면 이러한 x에 대하여 $[x] \in X/_\sim$이고 $\tilde{f}([x]) = f(x) = y$이므로 $\tilde{f}$는 전사이다.

한편 만약 $\tilde{f}([x]) = \tilde{f}([x'])$이면 $f(x)=f(x')$이므로 $x \sim x'$이 되어 $[x]=[x']$이다. 따라서 $\tilde{f}$는 단사이다.

문제 1.4.7. (1) (2) 임의의 점 $y \in Y$에 대하여 $f \circ h = \mathrm{id}_Y$이므로 $f(h(y)) = y$이다. 그리고 $g \circ f = \mathrm{id}_X$이므로 $g(y) = g(f(h(y))) = h(y)$이다. 따라서 $g=h$이다.

문제 1.4.9.

(1) (i) $n=m$인 경우에는 항등함수 $f\colon X^n \to X^n$, $f(x)=x$가 단사이다.

(ii) $n<m$인 경우에는 함수

$$f\colon X^n \to X^m, \quad f(x_1,x_2,\ldots,x_n) = (x_1,x_2,\ldots,x_n,p,\ldots,p)$$

가 단사이다.

(2) $g(x_1,\ldots,x_n,x_{n+1},\ldots,x_{n+m}) = ((x_1,\ldots,x_n),(x_{n+1},\ldots,x_{n+m}))$.

(3) $h(x_1,\ldots,x_n) = (x_1,\ldots,x_n,p,p,p,\ldots)$.

(4) $k((x_1,\ldots,x_n),(y_1,y_2,\ldots)) = (x_1,\ldots,x_n,y_1,y_2,\ldots)$.

(5) $l((x_1, x_2, \ldots), (y_1, y_2, \ldots)) = (x_1, y_1, x_2, y_2, \ldots)$.

(6) (i) $A = B$인 경우에는 $\varphi\colon X^A \to X^B$, $\varphi(f) = f$가 전단사이다.

(ii) 이제 $A \subsetneq B$인 경우를 생각하자. 먼저 주어진 함수 $f\colon A \to X$에 대하여 함수 $\tilde{f}\colon B \to X$를

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x), & x \in A \\ p, & x \in B - A \end{cases}$$

로 정의하자. 그러면 함수 $\varphi\colon X^A \to X^B$, $\varphi(f) = \tilde{f}$는 단사이다.

문제 1.4.11. (1) $(\Pi_{\alpha\in\Lambda} X_\alpha) \cap (\Pi_{\alpha\in\Lambda} Y_\alpha) = \Pi_{\alpha\in\Lambda}(X_\alpha \cap Y_\alpha)$:

$$\begin{aligned} (x_\alpha) \in (\Pi_{\alpha\in\Lambda} X_\alpha) \cap (\Pi_{\alpha\in\Lambda} Y_\alpha) \quad &\Leftrightarrow \quad (x_\alpha) \in \Pi_{\alpha\in\Lambda} X_\alpha \wedge (x_\alpha) \in \Pi_{\alpha\in\Lambda} Y_\alpha \\ &\Leftrightarrow \quad (\forall \alpha \in \Lambda, x_\alpha \in X_\alpha) \wedge (\forall \alpha \in \Lambda, x_\alpha \in Y_\alpha) \\ &\Leftrightarrow \quad \forall \alpha \in \Lambda, x_\alpha \in X_\alpha \wedge x_\alpha \in Y_\alpha \\ &\Leftrightarrow \quad \forall \alpha \in \Lambda, x_\alpha \in X_\alpha \cap Y_\alpha \\ &\Leftrightarrow \quad (x_\alpha) \in \Pi_{\alpha\in\Lambda}(X_\alpha \cap Y_\alpha) \end{aligned}$$

(2) 만약 $(x_\alpha) \in (\Pi_{\alpha\in\Lambda} X_\alpha) \cup (\Pi_{\alpha\in\Lambda} Y_\alpha)$이면 $(x_\alpha) \in \Pi_{\alpha\in\Lambda} X_\alpha$ 또는 $(x_\alpha) \in \Pi_{\alpha\in\Lambda} Y_\alpha$이다. 우리는 일반성을 잃지않고 $(x_\alpha) \in \Pi_{\alpha\in\Lambda} X_\alpha$이라 할 수 있다. 그러면 모든 $\alpha \in \Lambda$에 대해 $x_\alpha \in X_\alpha$이므로 $x_\alpha \in X_\alpha \cup Y_\alpha$이다. 그러므로 $(x_\alpha) \in \Pi_{\alpha\in\Lambda}(X_\alpha \cup Y_\alpha)$이다. 따라서 $(\Pi_{\alpha\in\Lambda} X_\alpha) \cup (\Pi_{\alpha\in\Lambda} Y_\alpha) \subset \Pi_{\alpha\in\Lambda}(X_\alpha \cup Y_\alpha)$이다.

1.5 선택공리와 순서집합

문제 1.5.1. 먼저 $\preceq_d$의 정의에 의해 다음이 동치임은 자명하다:

$$(x_1, y_1) \preceq_d (x_2, y_2) \;\Leftrightarrow\; x_1 \preceq_X x_2 \text{이고 } y_1 \preceq_Y y_2$$

(i) 모든 $(x, y) \in X \times Y$에 대해 $x \preceq_X x$이고 $y \preceq_Y y$이므로 $(x, y) \preceq_d (x, y)$이다.

(ii) 이제 $(x_1, y_1) \preceq_d (x_2, y_2)$이고 $(x_2, y_2) \preceq_d (x_3, y_3)$이라 하자. 그러면 $x_1 \preceq_X x_2$이고 $x_2 \preceq_X x_3$이므로 $x_1 \preceq_X x_3$이다. 그리고 $y_1 \preceq_Y y_2$이고 $y_2 \preceq_Y y_3$이므로 $y_1 \preceq_Y y_3$이다. 따라서 $(x_1, y_1) \preceq_d (x_3, y_3)$이다.

(iii) 이제 $(x_1, y_1) \preceq_d (x_2, y_2)$이고 $(x_2, y_2) \preceq_d (x_1, y_1)$이라 하자. 그러면 그러면 $x_1 \preceq_X x_2$이고 $x_2 \preceq_X x_1$이므로 $x_1 = x_2$이다. 그리고 $y_1 \preceq_Y y_2$이고 $y_2 \preceq_Y y_1$이므로 $y_1 = y_2$이다. 따라서 $(x_1, y_1) = (x_2, y_2)$이다.

(iv) 임의의 $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in X \times Y$에 대해 $x_1 \preceq_X x_2$ 또는 $x_2 \preceq_X x_1$이고 $y_1 \preceq_Y y_2$ 또는 $y_2 \preceq_Y y_1$이다.

- $x_1 \preceq_X x_2$, $y_1 \preceq_Y y_2$인 경우; $(x_1, y_1) \preceq_d (x_2, y_2)$이다.
- $x_1 \preceq_X x_2$, $y_2 \preceq_Y y_1$인 경우; 만약 $x_1 \prec_X x_2$이면 $(x_1, y_1) \prec_d (x_2, y_2)$이다. 그리고 만약 $x_1 = x_2$이면 $(x_2, y_2) \preceq_d (x_1, y_1)$이다.
- $x_2 \preceq_X x_1$, $y_1 \preceq_Y y_2$인 경우; 만약 $x_2 \prec_X x_1$이면 $(x_2, y_2) \prec_d (x_1, y_1)$이다. 그리고 만약 $x_1 = x_2$이면 $(x_1, y_1) \preceq_d (x_2, y_2)$이다.
- $x_2 \preceq_X x_1$, $y_2 \preceq_Y y_1$인 경우; $(x_2, y_2) \preceq_d (x_1, y_1)$이다.

따라서 사전식순서 $\preceq_d$는 곱집합 $X \times Y$상의 전순서이다.

문제 1.5.3. (i) A의 상계는 $\{a, b\} \subset B$, $\{a, c\} \subset B$를 만족하는 $B \in \mathscr{P}(X)$들이다. 따라서 A의 상계는 $\{a, b\} \cup \{a, c\} = \{a, b, c\} \subset B$를 만족하는 $B \subset X$들이다. 따라서 A의 상계는 $\{a, b, c\}$, $\{a, b, c, d\}$, $\{a, b, c, e\}$, X이다.

(ii) (i)에 의해 A의 최소상계는 $\{a, b, c\}$이다.

(iii) A의 하계는 $D \subset \{a, b\}$, $D \subset \{a, c\}$를 만족하는 $D \in \mathscr{P}(X)$들이다. 따라서 A의 하계는 $D \subset \{a\} = \{a, b\} \cap \{a, c\}$를 만족하는 $D \subset X$들이다. 따라서 A의 하계는 $\varnothing$, $\{a\}$이다.

(iv) (iii)에 의해 A의 최대하계는 $\{a\}$이다.

문제 1.5.5. $A = \{x \in X \mid a \preceq x\}$이라 하자. 그러면 $(A, \preceq)$도 부분순서집합이고 $(A, \preceq)$의 전순서 부분집합 C는 X의 전순서 부분집합이므로 상계 $v \in X$가 존재한다. 그리고 $a \preceq v$이므로 $v \in A$이다. 따라서 A의 모든 전순서 부분집합은 상계를 갖는다. 따라서 정리 1.5.16(Zorn 보조정리)에 의해 $(A, \preceq)$의 극대원소 $u \in A$가 존재한다. 자명하게 $a \preceq u$이다. 이제 우리는 u가 X의 극대원소임을 보이면 충분하다. 만약 u가 X의 극대원소가 아니면 $u \prec u_*$인 $u_* \in X$가 존재한다. 그러면 $a \preceq u_*$이므로 $u_* \in A$이다. 이는 u가 A의 극대원소라는 사실에 모순이다. 따라서 u는 X의 극대원소이고 $a \preceq u$를 만족한다.

1.6 가산집합

문제 1.6.1. 만약 $\mathbb{Q}^c$이 가산이라고 가정하면 $\mathbb{Q}$도 가산이므로 정리 1.6.12에 의해 $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{Q}^c$도 가산이다. 이는 $\mathbb{R}$이 비가산이라는 사실에 모순이다(보기 1.6.15). 따라서 $\mathbb{Q}^c$는 비가산이다.

문제 1.6.3. 먼저 $B \subset A$에 대하여 $\chi_B(x) = \begin{cases} 1, & x \in B \\ 0, & x \notin B \end{cases}$이라 하고

$$\phi\colon \mathscr{P}(A) \to X^n, \quad \phi(B) = (\chi_B(1), \chi_B(2), \ldots, \chi_B(n))$$

이라 하자. 역으로

$$\psi\colon X^n \to \mathcal{P}(A), \quad \psi(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \{i \mid x_i = 1\}$$

이라 하자. 그러면 $\psi \circ \phi = \mathrm{id}_{\mathscr{P}(A)}$, $\phi \circ \psi = \mathrm{id}_{X^n}$이므로 ϕ는 전단사이다. 따라서 $\mathscr{P}(A) \sim X^n$이다.

문제 1.6.5. (1) $\mathcal{A} = \{A \subset \mathbb{N} \mid A$는 유한집합$\}$이라 하자. 그리고 각각의 자연수 n에 대해 $\mathcal{A}_n = \{A \mid A \subset \{1, 2, \ldots, n\}\}$이라 하자. 그러면 $|\mathcal{A}_n| = 2^n$이므로 $\mathcal{A}_n$은 유한인 가산집합이다. 그리고 $\mathcal{A} = \cup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{A}_n$이므로 정리 1.6.12에 의해 $\mathcal{A}$도 가산집합이다. 그리고 모든 $n \in \mathbb{N}$에 대해 $\{n\} \in \mathcal{A}$이므로 $\mathcal{A}$는 무한집합이다. 따라서 $\mathcal{A}$는 가부번집합이다.

(3) 먼저 $\mathbb{N} \sim \mathbb{Q}$이므로 $\mathscr{P}(\mathbb{N}) \sim \mathscr{P}(\mathbb{Q})$이다(보기 1.6.13 참조). 즉, $\mathrm{card}(\mathscr{P}(\mathbb{N})) = \mathrm{card}(\mathscr{P}(\mathbb{Q}))$이다. 그리고 문제 1.6.4에 의해 $\mathscr{P}(\mathbb{N}) \sim \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$이므로

$$\mathrm{card}(\mathscr{P}(\mathbb{N})) = \mathrm{card}(\{0, 1\}^{\mathbb{N}})$$

이다.

- 함수 $f \colon \mathbb{R} \to \mathscr{P}(\mathbb{Q})$, $f(a) = \{x \in \mathbb{Q} \mid x < a\}$가 단사이므로 $\mathrm{card}(\mathbb{R}) \preceq \mathrm{card}(\mathscr{P}(\mathbb{Q}))$이다. 그러므로 $\mathrm{card}(\mathbb{R}) \preceq \mathrm{card}(\mathscr{P}(\mathbb{N}))$이다.
- 한편 $\psi \colon \{0, 1\}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}$, $\psi(f) = 0.f(1)f(2)f(3)\cdots$ 가 단사이므로 $\mathrm{card}(\{0, 1\}^{\mathbb{N}}) \preceq \mathrm{card}(\mathbb{R})$이다. 그러므로 $\mathrm{card}(\mathscr{P}(\mathbb{N})) \preceq \mathrm{card}(\mathbb{R})$이다.

따라서 $\mathrm{card}(\mathscr{P}(\mathbb{N})) = \mathrm{card}(\mathbb{R})$이므로 $\mathscr{P}(\mathbb{N}) \sim \mathbb{R}$이다.

(2) $\mathcal{B} = \{A \subset \mathbb{N} \mid A$는 무한집합$\}$이라 하자. 그러면 $\mathscr{P}(\mathbb{N}) = \mathcal{A} \cup \mathcal{B}$이다. 만약 $\mathcal{B}$가 가산이라 가정하면 (1)에 의해 $\mathcal{A}$도 가산이므로 $\mathscr{P}(\mathbb{N})$은 가산이다. 그리고 (3)에 의해 $\mathscr{P}(\mathbb{N}) \sim \mathbb{R}$이므로 $\mathscr{P}(\mathbb{N})$은 비가산이므로 모순이다.

(4) 우리는 $\mathbb{N}^{\mathbb{N}} = \{f \mid f \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$는 함수$\}$임을 상기하자. 그리고 $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \sim \mathbb{N}$임을 상기하자(보기 1.6.11). 따라서 $\mathscr{P}(\mathbb{N} \times \mathbb{N}) \sim \mathscr{P}(\mathbb{N})$이다. 또한 $\{0, 1\} \sim \{1, 2\}$이므로 문제 1.6.4와 (3)에 의해 $\mathbb{R} \sim \mathscr{P}(\mathbb{N}) \sim \{1, 2\}^{\mathbb{N}}$이다.

- 함수 $\phi \colon \{1, 2\}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, $\phi(f) = f$가 단사이므로 $\mathrm{card}(\{1, 2\}^{\mathbb{N}}) \preceq \mathrm{card}(\mathbb{N}^{\mathbb{N}})$이다. 따라서

  $$\mathrm{card}(\mathbb{R}) = \mathrm{card}(\mathscr{P}(\mathbb{N})) = \mathrm{card}(\{1, 2\}^{\mathbb{N}}) \preceq \mathrm{card}(\mathbb{N}^{\mathbb{N}})$$

  이다.
- 한편 $\psi \colon \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \to \mathscr{P}(\mathbb{N} \times \mathbb{N})$, $\psi(f) = \{(n, f(n)) \mid n \in \mathbb{N}\}$가 단사이므로 $\mathrm{card}(\mathbb{N}^{\mathbb{N}}) \preceq \mathrm{card}(\mathscr{P}(\mathbb{N} \times \mathbb{N}))$이 되어

  $$\mathrm{card}(\mathbb{N}^{\mathbb{N}}) \preceq \mathrm{card}(\mathscr{P}(\mathbb{N} \times \mathbb{N})) = \mathrm{card}(\mathscr{P}(\mathbb{N})) = \mathrm{card}(\mathbb{R})$$

  이다.

따라서 $\mathrm{card}(\mathbb{N}^{\mathbb{N}}) = \mathrm{card}(\mathbb{R})$이므로 $\mathbb{N}^{\mathbb{N}} \sim \mathbb{R}$이다.

제 2 장

유클리드 공간

2.1 실수 집합 $\mathbb{R}$의 성질 †

문제 2.1.1. 두 함수 $f\colon [a,b] \to [c,d]$, $f(x) = \frac{b-a}{d-c}(x-a)+c$가 역함수 $f^{-1}\colon [c,d] \to [a,b]$, $f^{-1}(y) = \frac{d-c}{b-a}(y-c)+a$를 가지므로 f는 전단사이다.

문제 2.1.3. $\mathbb{R}$의 위로 유계인 부분집합 A는 상계 M을 갖는다. 그러면 모든 실수 $r > M$은 A의 상계이다.

2.2 $\mathbb{R}^n$상의 열린집합

문제 2.2.1. $\mathbb{N}^c = (-\infty,1) \bigcup (\cup_{n=1}^{\infty}(n,n+1))$와 같이 열린집합들의 합집합으로 표현되므로 $\mathbb{N}^c$은 $\mathbb{R}$의 열린집합이다(정리 2.2.6). 따라서 $\mathbb{N}$은 $\mathbb{R}$의 닫힌집합이다.

문제 2.2.3. B의 여집합이 $B^c = (-\infty,0) \bigcup (1,\infty) \bigcup (\cup_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{n+1},\frac{1}{n}))$와 같이 열린집합들의 합집합으로 표현되므로 B^c은 $\mathbb{R}$의 열린집합이다(정리 2.2.6). 따라서 B는 $\mathbb{R}$의 닫힌집합이다.

이제 B가 $\mathbb{R}$의 열린집합이 아님을 보이자. 점 $0 \in B$에 대하여 $0 \in B(0,r) = (-r,r) \subset B$을 만족하는 양의 실수 r이 존재하지 않는다. 따라서 B는 $\mathbb{R}$의 열린집합이 아니다.

문제 2.2.5. (방법 1) 임의로 주어진 점 $(x,y) \in X$에 대하여 $r = y$로 택하면 $(x,y) \in B((x,y),r) \subset X$가 되므로 X는 $\mathbb{R}^2$의 열린집합이다.

(방법 2) 함수 $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = y$는 연속이다. 그리고 $(0,\infty)$는 $\mathbb{R}$의 열린집합이므로 성질 2.2.19에 의해 $X = f^{-1}((0,\infty))$는 $\mathbb{R}^2$의 열린집합이다.

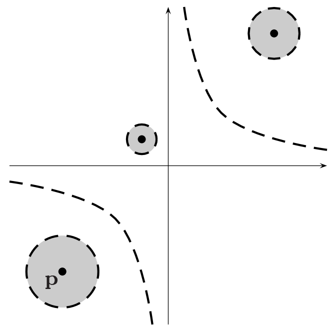


그림 2.1: Y^c은 $\mathbb{R}^2$의 열린집합이다

문제 2.2.7. (방법 1) 다음 그림 2.1과 같이 임의로 주어진 점 $\mathbf{p} \in Y^c$를 중심으로 하는 열린구 $B(\mathbf{p}, r) \subset Y^c$가 존재하므로 Y^c은 $\mathbb{R}^2$의 열린집합이다. 따라서 Y는 $\mathbb{R}^2$의 닫힌집합이다.

(방법 2) 함수 $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = xy - 1$는 다항함수이므로 연속이다. 그리고 $\{0\}$는 $\mathbb{R}$의 닫힌집합이므로 문제 2.2.4에 의해 $Y = f^{-1}(\{0\})$는 $\mathbb{R}^2$의 닫힌집합이다.

문제 2.2.9. 먼저 $2 \in Z$이지만 $B(2, r) = (2 - r, 2 + r) \subset Z$를 만족하는 양의 실수 r이 존재하지 않으므로 Z는 $\mathbb{R}$의 열린집합이 아니다.

한편 $-1 \in Z^c$이지만 $B(-1, r) = (-1 - r, -1 + r) \subset Z^c$를 만족하는 양의 실수 r이 존재하지 않으므로 Z^c는 $\mathbb{R}$의 열린집합이 아니다. 따라서 Z는 $\mathbb{R}$의 닫힌집합이 아니다.

문제 2.2.11. (방법 1) 편의상 $X = \mathbb{R}^k \times \mathbf{0}$라 하자.

먼저 $k = n$인 경우는 $X = \mathbb{R}^n$이므로 X는 $\mathbb{R}^n$의 닫힌집합이다.

이제 $k < n$이라 가정하자. 임의의 점 $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_k, x_{k+1}, \ldots, x_n) \in X^c$에 대하여 $x_i \neq 0$인 $i \geq k+1$가 존재한다. 그리고 이러한 i에 대해 $r = |x_i|$이라 하면 $\mathbf{x} \in B(\mathbf{x}, r) \subset X^c$이므로 X^c는 $\mathbb{R}^n$의 열린집합이다. 따라서 X는 $\mathbb{R}^n$의 닫힌집합이다.

(방법 2) $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f(x_1, \ldots, x_n) = x_{k+1}^2 + x_{k+2}^2 + \cdots + x_n^2$은 연속사상이다. 그리고 한 점 집합 $\{0\}$은 $\mathbb{R}$의 닫힌집합이므로 $\mathbb{R}^k \times \mathbf{0} = f^{-1}(\{0\})$은 $\mathbb{R}^n$의 닫힌집합이다.

문제 2.2.13. (1) $\varepsilon = \frac{1}{2}$와 임의의 $\delta > 0$에 대하여 $x = -\frac{\delta}{2}$가 존재하여 $|x - 0| < \delta$이지만

$$|f(x) - f(0)| = |-\frac{\delta}{2} - 1| = \frac{\delta}{2} + 1 > 1 = \varepsilon$$

이다. 따라서 g는 점 $x = 0$에서 연속이 아니다.

(2) 이제 $p \neq 0$이라 하자.

먼저 $p > 0$인 경우에는 주어진 $\varepsilon > 0$에 대하여 양의 실수 $\delta = \min\{\varepsilon, p\}$를 택하자. 만약 $|x - p| < \delta$이면 $x > 0$임을 주의하자. 따라서

$$|x - p| < \delta \;\Rightarrow\; |f(x) - f(p)| = |(x + 1) - (p + 1)| = |x - p| < \delta \leq \varepsilon$$

를 만족하므로 g는 점 p에서 연속이다.

한편 $p < 0$인 경우에는 주어진 $\varepsilon > 0$에 대하여 양의 실수 $\delta = \min\{\varepsilon, |p|\}$를 택하자. 만약 $|x-p| < \delta$이면 $x < 0$임을 주의하자. 따라서

$$|x-p| < \delta \;\Rightarrow\; |f(x) - f(p)| = |x-p| < \delta \le \varepsilon$$

를 만족하므로 g는 점 p에서 연속이다.

문제 2.2.15. (1) 먼저 x가 A의 고립점이면 $A \cap U = \{x\}$인 $\mathbb{R}$의 열린집합 U가 존재한다. 그리고 $x \in U$이므로 $x \in (x-r, x+r) \subset U$를 만족하는 양의 실수 r이 존재한다. 이러한 r에 대해 $A \cap (x-r, x+r) = \{x\}$이 성립한다.

역으로 $A \cap (x-r, x+r) = \{x\}$를 만족하는 양의 실수 r이 존재하면 $U = (x-r, x+r)$는 $\mathbb{R}$의 열린집합으로서 $A \cap U = \{x\}$를 만족한다. 따라서 x는 A의 고립점이다.

(2) I를 A의 고립점들의 집합이라 하자. 그러면 $I \subset A$이다. 임의의 점 $a \in I$에 대하여 a가 A의 고립점이므로 $U_a \cap A = \{a\}$인 열린집합 U_a가 존재한다. 이제 $W = \bigcup_{a \in I} U_a$이라 하면 $I \subset W$이다. 그리고 성질 2.2.22에 의해 $\{U_a \mid a \in I\}$의 가산 부분모임 $\{U_{a_n} \mid n \in \mathbb{N}\}$이 존재하여 $W = \bigcup_{n=1}^{\infty} U_{a_n}$이다. 그리고

$$I \subset A \cap W = A \cap (\bigcup_{n=1}^{\infty} U_{a_n}) = \bigcup_{n=1}^{\infty} (A \cap U_{a_n}) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{a_n\} = \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$$

이다. 따라서 $\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$이 가산집합이므로 I도 가산집합이다.

제 3 장

위상공간

3.1 위상공간(topological space)

문제 3.1.1. (i) 정의에 의하여 $\varnothing \in \mathscr{T}_c$이고, $X^c = \varnothing$이 가산집합이므로 $X \in \mathscr{T}_c$이다.

(ii) 만약 $U_\alpha \in \mathscr{T}_c$ $(\alpha \in \Lambda)$이면 모든 $\alpha \in \Lambda$에 대하여 U_α^c는 가산집합 이거나 X 전체이다. 먼저 모든 $\alpha \in \Lambda$에 대하여 $U_\alpha^c = X$인 경우 $U_\alpha = \varnothing$ $(\forall \alpha \in \Lambda)$이므로 $\bigcup_{\alpha\in\Lambda} U_\alpha = \varnothing \in \mathscr{T}_c$이다. 한편 만약 $U_{\alpha_0}^c \neq X$인 $\alpha_0 \in \Lambda$가 존재하는 경우 $U_{\alpha_0}^c$는 가산집합이고,

$$(\bigcup_{\alpha\in\Lambda} U_\alpha)^c \subset U_{\alpha_0}^c$$

이므로 $(\bigcup_{\alpha\in\Lambda} U_\alpha)^c$도 가산집합이 된다. 따라서 $\bigcup_{\alpha\in\Lambda} U_\alpha \in \mathscr{T}_c$이다.

(iii) 이제 $U_1, \ldots, U_n \in \mathscr{T}_c$이라 하자. 먼저 $U_k^c = X$인 $k \in \{1, \ldots, n\}$가 존재하는 경우에는 $U_k = \varnothing$이므로 $\bigcap_{i=1}^n U_i = \varnothing$이다. 따라서 $(\bigcap_{i=1}^n U_i)^c = X$이므로 $\bigcap_{i=1}^n U_i \in \mathscr{T}_c$이다. 한편 모든 i에 대하여 $U_i^c \neq X$인 경우에는 모든 U_i^c가 가산집합이므로 $\bigcup_{i=1}^n U_i^c$도 가산집합이다. 그런데

$$(\bigcap_{i=1}^n U_i)^c = \bigcup_{i=1}^n U_i^c$$

이므로 $\bigcap_{i=1}^n U_i \in \mathscr{T}_c$이다.

따라서 $\mathscr{T}_c$는 집합 X상의 위상이다.

문제 3.1.3. X를 실수 집합 $\mathbb{R}$이라 하자. 그리고 $U = (-\infty, 0)$, $V = (0, \infty)$라 하자. 그러면 $U^c = [0, \infty)$, $V^c = (-\infty, 0]$이 모두 무한집합이므로 $U, V \in \mathscr{T}_\infty$이다. 그러나 $(U \cup V)^c = \{0\}$은 무한집합이 아니므로 $U \cup V \notin \mathscr{T}_\infty$이다. 따라서 $\mathscr{T}_\infty$는 집합 $\mathbb{R}$상의 위상이 아니다.

문제 3.1.5.

(1) 먼저 $\mathscr{T}'$을 생각하자.

(i) 만약 f가 전사가 아니면 모든 $U \in \mathscr{T}$에 대해 $f(U) \neq Y$이므로 $Y \notin \mathscr{T}'$이 되어 $\mathscr{T}'$은 집합 Y상의 위상이 아니다.

(ii) 일반적으로 f가 단사가 아니면 $f(U \cap V) \neq f(U) \cap f(V)$이 되어 $\mathscr{T}'$은 위상이 되지 않는다. 예를 들어 집합 $X = \{a, b, c, d\}$상에 위상 $\mathscr{T} = \{\varnothing, \{a, b\}, \{c, d\}, X\}$를 주자. 그리고 $Y = \{1, 2, 3\}$이라 하자. 이제 함수 $f\colon X \to Y$를 $f(a) = 1$, $f(b) = f(c) = 2$, $f(d) = 3$으로 정의하면 $\mathscr{T}' = \{\varnothing, \{1, 2\}, \{2, 3\}, Y\}$은 집합 Y상의 위상이 아니다.

(iii) 따라서 $\mathscr{T}'$이 집합 Y상의 위상이 되기 위한 필요조건은 f가 전단사인 것이다. 그리고 f가 전단사이면 당연히 $\mathscr{T}'$은 집합 Y상의 위상이 된다.

(2) 이제 $\mathscr{T}''$이 집합 Y상의 위상이 됨을 보이자.

(i) $f^{-1}(\varnothing) = \varnothing$, $f^{-1}(Y) = X \in \mathscr{T}$이므로 $\varnothing, Y \in \mathscr{T}''$이다.

(ii) 이제 $V_\alpha \in \mathscr{T}''$ $(\forall \alpha \in \Lambda)$라 하자. 그러면 모든 $\alpha \in \Lambda$에 대해 $f^{-1}(V_\alpha) \in \mathscr{T}$이므로 $f^{-1}(\cup_\alpha V_\alpha) = \cup_\alpha f^{-1}(V_\alpha) \in \mathscr{T}$이다. 따라서 $\cup_\alpha V_\alpha \in \mathscr{T}''$이다.

(iii$'$) 만약 $U, V \in \mathscr{T}''$이면 $f^{-1}(U), f^{-1}(V) \in \mathscr{T}$이므로

$$f^{-1}(U \cap V) = f^{-1}(U) \cap f^{-1}(V) \in \mathscr{T}$$

이다. 따라서 $U \cap V \in \mathscr{T}''$이다.

문제 3.1.7. $\mathscr{T}_1$과 $\mathscr{T}_2$를 포함하는 가장 작은 위상은

$$\{\varnothing, X, \{a\}, \{a, b\}, \{b, c\}, \{b\}\}$$

이다. 그리고 $\mathscr{T}_1$과 $\mathscr{T}_2$에 포함되는 가장 큰 위상은

$$\mathscr{T}_1 \cap \mathscr{T}_2 = \{\varnothing, X, \{a\}\}$$

이다.

문제 3.1.9. 먼저 $\mathscr{T}$를 이산위상이라 하자. 즉, $\mathscr{T} = \mathscr{P}(X)$이라 하자. 그러면 모든 $x \in X$에 대해 $\{x\} \in \mathscr{T}$이다.

역으로 모든 $x \in X$에 대해 $\{x\} \in \mathscr{T}$이라 하자. 그러면 임의의 부분집합 $A \subset X$에 대해 $A = \bigcup_{x \in A} \{x\} \in \mathscr{T}$이므로 $\mathscr{T} = \mathscr{P}(X)$가 되어 $\mathscr{T}$는 이산위상이다.

문제 3.1.11. (a)⇒(b) 먼저 $\mathscr{T} \subset \mathscr{T}'$이라 하자. 이제 주어진 $U \in \mathscr{T}$와 점 $x \in U$에 대하여 $\mathscr{T} \subset \mathscr{T}'$이므로 $V_x = U \in \mathscr{T}'$이 존재하여 $x \in V_x = U \subset U$를 만족한다.

(b)⇒(a) 만약 $U \in \mathscr{T}$이면 (b)에 의해 임의의 점 $x \in U$에 대해 $x \in V_x \subset U$인 $V_x \in \mathscr{T}'$이 존재한다. 그리고 $\cup_{x\in U} V_x \in \mathscr{T}'$이고 $U = \cup_{x\in U} V_x$이므로 $U \in \mathscr{T}'$이다. 따라서 $\mathscr{T} \subset \mathscr{T}'$이다.

문제 3.1.13. 먼저 $\mathscr{T} = \{(-\infty, x) \subset \mathbb{R} \mid x \in \mathbb{R}\} \cup \{(-\infty, x] \subset \mathbb{R} \mid x \in \mathbb{R}\} \cup \{\varnothing, \mathbb{R}\}$이다.

(i) 자명하게 $\varnothing, \mathbb{R} \in \mathscr{T}$이다.

(ii) 주어진 $U_\alpha \in \mathscr{T}(\alpha \in \Lambda)$에 대해 $U = \cup_{\alpha\in\Lambda} U_\alpha$이라 하자. 만약 $x \in U$, $y < x$이면 $x \in U_{\alpha_0}$인 $\alpha_0 \in \Lambda$이 존재한다. 그리고 $U_{\alpha_0} \in \mathscr{T}$이므로 $y \in U_{\alpha_0}$이 되어 $y \in U$이다. 따라서 $U \in \mathscr{T}$이다.

(iii) 주어진 $U, V \in \mathscr{T}$에 대해 $x \in U \cap V$, $y < x$이라 하자. 그러면 $x \in U$, $x \in V$이고 $U, V \in \mathscr{T}$이므로 $y \in U$, $y \in V$가 되어 $y \in U \cap V$이다. 따라서 $U \cap V \in \mathscr{T}$이다.

문제 3.1.15.

(1) (i) 먼저 $\varnothing \in \mathscr{T}$임을 보이자. $a \in \varnothing$이 거짓이므로 명제

$$a \in \varnothing \Rightarrow \exists b > 0 \text{ s.t. } a \in N_{a,b} \subset \varnothing$$

은 항상 참이다. 따라서 $\varnothing \in \mathscr{T}$이다.

그리고 임의의 $a \in \mathbb{Z}$에 대해 $a \in N_{a,1} = \mathbb{Z} \subset \mathbb{Z}$이므로 $\mathbb{Z} \in \mathscr{T}$이다.

(ii) 먼저 $U_\alpha \in \mathscr{T}(\alpha \in \Lambda)$이라 하자. 임의의 점 $a \in \cup_{\alpha\in\Lambda} U_\alpha$에 대하여 $a \in U_{\alpha_0}$인 $\alpha_0 \in \Lambda$가 존재한다. 그리고 $U_{\alpha_0} \in \mathscr{T}$이므로 $a \in N_{a,b} \subset U_{\alpha_0} \subset \cup_{\alpha\in\Lambda} U_\alpha$를 만족하는 양의 정수 b가 존재한다. 따라서 $\cup_{\alpha\in\Lambda} U_\alpha \in \mathscr{T}$이다.

(iii) 이제 $U, V \in \mathscr{T}$이라 하자. 임의의 점 $a \in U \cap V$에 대해

$$a \in N_{a,b_1} \subset U, \quad a \in N_{a,b_2} \subset V$$

를 만족하는 양의 정수 b_1, b_2가 존재한다. 그리고 $a \in N_{a,b_1 b_2} \subset N_{a,b_1} \cap N_{a,b_2} \subset U \cap V$이 성립하므로 $U \cap V \in \mathscr{T}$이다.

(2) 만약 U가 공집합이 아닌 열린집합이면 $a \in U$가 존재한다. 그리고 $a \in N_{a,b} \subset U$를 만족하는 양의 정수 b가 존재한다. 그런데 $N_{a,b}$가 무한집합이므로 U도 무한집합이다.

(3) (i) 먼저 $N_{a,b}$이 열린집합임을 보이자. 임의의 점 $c \in N_{a,b}$에 대해 $c = a + nb$인 정수 $n \in \mathbb{Z}$이 존재하므로 $N_{c,b} = N_{a,b}$이다. 그래서 $c \in N_{c,b} \subset N_{a,b}$이므로 $N_{a,b}$는 열린집합이다.

(ii) 이제 $N_{a,b}$이 닫힌집합임을 보이자.

$$N_{a,b} = \mathbb{Z} - \bigcup_{i=1}^{b-1} N_{a+i,b}$$

가 성립하여 $N_{a,b}$이 열린집합의 여집합이므로 $N_{a,b}$는 닫힌집합이다.

(4) 1 또는 -1이 아닌 정수 n은 적당한 소수 p를 약수로 갖기 때문에 $n \in N_{0,p}$이다. 그러므로

$$\mathbb{Z} - \{1, -1\} = \bigcup_{p \in \mathbb{P}} N_{0,p}$$

이다. 단, 여기서 $\mathbb{P}$는 모든 소수의 집합이다. 만약 $\mathbb{P}$가 유한집합이라 가정하면 (3)에 의해 $\mathbb{Z} - \{1, -1\}$는 닫힌집합이다. 그러므로 $\{1, -1\}$은 열린집합이다. 그런데 이는 (2)에 모순이다. 따라서 $\mathbb{P}$는 무한집합이어야 한다.

3.2 기저(basis)와 부분기저(subbasis)

문제 3.2.1. 집합 $X = \{a, b, c\}$상의 다음과 같은 두 기저

$$\mathscr{B}_1 = \{\{a\}, \{b, c\}\}, \quad \mathscr{B}_2 = \{\{a, b\}, \{c\}\}$$

를 생각하자. 먼저 교집합 $\mathscr{B}_1 \cap \mathscr{B}_2 = \varnothing$이 집합 X상의 기저가 되지 않음은 자명하다. 그리고 합집합 $\mathscr{B}_1 \cup \mathscr{B}_2 = \{\{a\}, \{c\}, \{a, b\}, \{b, c\}\}$은 $b \in \{a, b\} \cap \{b, c\}$이지만 $b \in B \subset \{a, b\} \cap \{b, c\}$을 만족하는 $B \in \mathscr{B}_1 \cup \mathscr{B}_2$가 존재하지 않는다. 따라서 합집합 $\mathscr{B}_1 \cup \mathscr{B}_2$도 집합 X상의 기저가 아니다.

문제 3.2.3. 먼저 $\mathscr{T}_{\mathscr{B}} = \{\mathscr{B}$의 원소들의 합집합$\}$임을 상기하자. 따라서

$$\mathscr{T}_{\mathscr{B}} = \{\varnothing, \{b\}, \{d\}, \{a, b\}, \{b, c\}, X, \{b, d\}, \{a, b, d\}, \{b, c, d\}, \{a, b, c\}\}$$

이다.

문제 3.2.5. (1) 먼저 $\mathscr{B}$가 집합 $\mathbb{R}^2$상의 기저가 됨을 보이자:

(i) 임의로 주어진 점 $(x, y) \in \mathbb{R}^2$에 대하여

$$x - 1 < a < x < b < x + 1, \quad y - 1 < c < y < d < y + 1$$

를 각각 만족하는 유리수 $a, b, c, d \in \mathbb{Q}$가 존재하여 $(x, y) \in (a, b) \times (c, d) \in \mathscr{B}$를 만족한다.

(ii) 주어진 $(a_1, b_1) \times (c_1, d_2)$, $(a_2, b_2) \times (c_2, d_2) \in \mathscr{B}$와 점 $(x, y) \in (a_1, b_1) \times (c_1, d_2) \cap (a_2, b_2) \times (c_2, d_2)$에 대해

$$a_3 = \max\{a_1, a_2\},\ b_3 = \min\{b_1, b_2\},\ c_3 = \max\{c_1, c_2\},\ d_3 = \min\{d_1, d_2\}$$

라 하면 $(a_3, b_3) \times (c_3, d_3) \in \mathscr{B}$이고

$$(x, y) \in (a_3, b_3) \times (c_3, d_3) \subset (a_1, b_1) \times (c_1, d_2) \cap (a_2, b_2) \times (c_2, d_2)$$

를 만족한다.

(2) $\mathscr{U}$ 를 $\mathbb{R}^2$ 상의 보통위상이라 하자. 우리는 보기 3.2.11(1)에서 기저

$$\mathscr{B}' = \{(x, y) \times (z, w) \mid x < y,\ z < w,\ x, y, z, w \in \mathbb{R}\}$$

이 $\mathbb{R}^2$ 상의 보통위상 $\mathscr{U}$ 를 생성함을 보았다.

(i) 먼저 $\mathscr{B} \subset \mathscr{B}'$ 이므로 $\mathscr{T}_{\mathscr{B}} \subset \mathscr{T}_{\mathscr{B}'} = \mathscr{U}$ 이다.

(ii) 이제 정리 3.2.9를 이용하여 $\mathscr{U} \subset \mathscr{T}_{\mathscr{B}}$임을 보이자: 임의로 주어진 $(x, y) \times (z, w) \in \mathscr{B}'$와 $(u, v) \in (x, y) \times (z, w)$에 대하여

$$x < a < u < b < y,\quad z < c < v < d < w$$

인 유리수 $a, b, c, d \in \mathbb{Q}$를 택하면 $(a, b) \times (c, d) \in \mathscr{B}$이고

$$(u, v) \in (a, b) \times (c, d) \subset (x, y) \times (z, w)$$

를 만족한다. 그래서 정리 3.2.9에 의해 $\mathscr{U} \subset \mathscr{T}_{\mathscr{B}'} \subset \mathscr{T}_{\mathscr{B}}$이다.

따라서 (i), (ii)에 의해 $\mathscr{T}_{\mathscr{B}} = \mathscr{U}$ 이다.

문제 3.2.7. $\mathscr{B}$를 하극한공간 $\mathbb{R}_l$ 의 기저라 하자. 임의의 실수 x에 대하여 $[x, x+1)$이 $\mathbb{R}_l$ 의 열린집합으로서 x를 포함하므로 $x \in B_x \subset [x, x+1)$를 만족하는 $B_x \in \mathscr{B}$가 존재한다. 한편 $x \neq y$이면 우리는 $x < y$라 할 수 있고, $x \in B_x$이지만 $x \notin B_y$이므로 $B_x \neq B_y$이다. 그리고 $\{B_x \mid x \in \mathbb{R}\} \subset \mathscr{B}$이므로 $\mathscr{B}$의 개수는 $\mathbb{R}$의 개수보다 많다. 즉, $\mathrm{card}(\mathbb{R}) \leq \mathrm{card}(\mathscr{B})$이다. 따라서 $\mathscr{B}$는 비가산집합이어야 한다.

문제 3.2.9. (귀류법) $(\mathbb{R}, \mathscr{T}_c)$이 가산개로 이루어진 기저 $\mathscr{B}'$을 갖는다고 가정하자. 그러면 $\mathscr{B} = \mathscr{B}' - \{\varnothing\}$도 $(\mathbb{R}, \mathscr{T}_c)$의 가산기저이다. 그러면 모든 $B \in \mathscr{B}(\subset \mathscr{T}_c)$가 공집합이 아닌 열린집합이므로 B^c은 가산집합이다. 그리고 합집합 $\cup_{B \in \mathscr{B}} B^c$는 가산개의 가산집합들의 합집합이므로 가산이다. 그리고 $\mathbb{R}$이 비가산이므로 $\cap_{B \in \mathscr{B}} B = \mathbb{R} - (\cup_{B \in \mathscr{B}} B^c)$은 비가산집합이다. 따라서 서로 다른 두 점 $p, q \in \cap_{B \in \mathscr{B}} B$이 존재한다.

한편 한 점 집합 $\{q\}$이 가산집합이므로 $\{q\}^c$은 열린집합이고 $p \in \{q\}^c$이다. 그런데 $\mathscr{B}$가 기저이므로 $p \in B_0 \subset \{q\}^c$를 만족하는 기저의 원소 $B_0 \in \mathscr{B}$가 존재하여야 한다. 그러면 $q \notin B_0$이 되어 모순이다.

문제 3.2.11. 먼저 $\mathscr{T}_* = \cap\{\mathscr{T} \mid \mathscr{B} \subset \mathscr{T}$ 인 X상의 위상$\}$이라 하자.

정리 3.1.6에 의해 $\mathscr{T}_*$는 $\mathscr{B}$를 포함하는 X상의 위상이다. 그리고 정리 3.2.3(2)에 의해 $\mathscr{T}_{\mathscr{B}}$는 $\mathscr{B}$를 포함하는 최소의 위상이므로 $\mathscr{T}_{\mathscr{B}} \subset \mathscr{T}_*$이다.

한편 $\mathscr{T}_{\mathscr{B}} \in \{\mathscr{T} \mid \mathscr{B} \subset \mathscr{T}$ 인 X상의 위상$\}$이므로 $\mathscr{T}_* \subset \mathscr{T}_{\mathscr{B}}$이다. 따라서 $\mathscr{T}_{\mathscr{B}} = \mathscr{T}_*$이다.

문제 3.2.13. (i) 먼저 임의로 주어진 점 $a \in \mathbb{Z}$에 대해 $a = a + 0p^1 \in U_1(a)$이다.

(ii) 이제 $x \in U_n(a) \cap U_m(b)$라 하자. 우리는 $n \geq m$이라 할 수 있다. 그러면 적당한 $k, l \in \mathbb{Z}$이 존재하여

$$x = a + kp^n, \quad x = b + lp^m$$

이다. 우리는 x를 소거하여 $a = b + (l - kp^{n-m})p^m$임을 알 수 있다.

이제 $U_n(a) \subset U_m(b)$임을 보이자: 만약 $y \in U_n(a)$이면 적당한 $t \in \mathbb{Z}$가 존재하여 $y = a + tp^n$을 만족한다. 그래서 $y = b + (l - kp^{n-m} + tp^{n-m})p^m$으로 표현되므로 $y \in U_m(b)$이다.

따라서 $x \in U_n(a) \subset U_n(a) \cap U_m(b)$이 된다.

문제 3.2.15. 문제 3.2.14에 의해 자명하다.

문제 3.2.17. (i) 집합 $X = \{a, b, c, d\}$에 대하여 $\mathcal{S}_1 = \{\{a\}, \{b, c, d\}\}$, $\mathcal{S}_2 = \{\{a, b\}, \{c, d\}\}$는 모두 X상의 부분기저이다. 그러나 교집합 $\mathcal{S}_1 \cap \mathcal{S}_2 = \varnothing$은 X상의 기저가 아니다.

(ii) $\mathcal{S}_1$, $\mathcal{S}_2$를 X상의 부분기저라 하자. 그리고 $\mathcal{S}_3 = \mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2$라 하자. 그러면

$$\bigcup_{C \in \mathcal{S}_3} C = (\bigcup_{A \in \mathcal{S}_1} A) \cup (\bigcup_{B \in \mathcal{S}_2} B) = X \cup X = X$$

이므로 $\mathcal{S}_3 = \mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2$도 X상의 부분기저가 된다.

문제 3.2.19. (i) 임의의 점 $x \in \mathbb{R}$에 대하여 $x \in (x - 1, \infty) \in \mathcal{S}$이므로 $\mathcal{S}$는 집합 $\mathbb{R}$상의 기저가 된다.

(ii) 이제 $\mathscr{U}$를 집합 $\mathbb{R}$상의 보통위상이라 하자.

먼저 $\mathcal{S} \subset \mathscr{U}$이므로 문제 3.2.14에 의해 $\mathscr{T}_{\mathcal{S}} \subset \mathscr{U}$이다.

한편 임의의 두 실수 $a < b$에 대해 $(a, b) = (a, \infty) \cap (-\infty, b) \in \mathscr{B}_{\mathcal{S}}$이므로

$$\mathscr{B}'' = \{(a, b) \subset \mathbb{R} \mid a < b,\ a, b \in \mathbb{R}\} \subset \mathscr{B}_{\mathcal{S}}$$

이다. 그리고 보기 3.2.5에 의해

$$\mathscr{U} = \mathscr{T}_{\mathscr{B}''} \subset \mathscr{T}_{\mathscr{B}_{\mathcal{S}}} = \mathscr{T}_{\mathcal{S}}$$

이다.

따라서 $\mathscr{T}_{\mathcal{S}} = \mathscr{U}$이다.

문제 3.2.21. 먼저 $f_{1,0}(x) = x$, $f_{-1,0}(x) = -x$이다. 임의의 점 $p \in \mathbb{R}$에 대하여 $[p, p+1)$와 $[-p, -p+1)$이 $\mathscr{T}_l$의 원소이므로 $f_{1,0}^{-1}([p, p+1)) = [p, p+1)$와 $f_{-1,0}^{-1}([-p, -p+1)) = (p-1, p]$는 $\mathcal{S}$의 원소이다. 따라서 $\{p\} = (p-1, p] \cap [p, p+1) \in \mathscr{B}_{\mathcal{S}}$이므로 $\{p\} \in \mathscr{T}_{\mathcal{S}}$이다. 따라서 $\mathscr{T}_{\mathcal{S}}$는 이산위상이다.

3.3 거리공간(metric space)

문제 3.3.1. (X, d)를 거리공간, $A = \{a_1, \ldots, a_n\} \subset X$이라 하자. 이제 임의로 주어진 점 $x \in A^c$에 대하여 $r = \min\{d(x, a_i) \mid i = 1, \ldots, n\}$이라 하면 $x \in B_d(x, r) \subset A^c$이다. 따라서 A^c은 열린집합이고, A는 닫힌집합이다.

문제 3.3.3. 서로 다른 두 점 $(1,2)$, $(1,3)$에 대하여 $d((1,2),(1,3)) = 0$이므로 d는 거리가 아니다.

문제 3.3.5. (1) (대우) 만약 $A \cap B \neq \varnothing$이면 $x \in A \cap B$가 존재하여 $0 \leq d(A, B) \leq d(x, x) = 0$이므로 $d(A, B) = 0$이다.

(2) 보통거리공간 $\mathbb{R}$의 두 부분집합 $A = (-2, 0)$, $B = (0, 2)$를 택하자. 그러면 $A \cap B = \varnothing$이다. 이제 $d(A, B) = 0$임을 보이자. 임의의 자연수 n에 대하여 $-\frac{1}{n} \in A$, $\frac{1}{n} \in B$이므로 $0 \leq d(A, B) \leq d(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}) = \frac{2}{n}$이 성립한다. 따라서 $d(A, B) = 0$이다.

(3) 보통거리공간 $\mathbb{R}$의 두 부분집합 $A = [-2, 1]$, $B = [0, 2]$를 택하자. 그러면

$$\operatorname{diam}(A) = 3, \quad \operatorname{diam}(B) = 2, \quad \operatorname{diam}(A \cup B) = \operatorname{diam}([-2, 2]) = 4$$

이므로 $\operatorname{diam}(A \cup B) \neq \operatorname{diam}(A) + \operatorname{diam}(B)$이다.

(4) $A \subset B$이므로 $\{d(x, y) \mid x, y \in A\} \subset \{d(x, y) \mid x, y \in B\}$이다. 따라서

$$\operatorname{diam}(A) = \sup\{d(x, y) \mid x, y \in A\} \leq \sup\{d(x, y) \mid x, y \in B\} = \operatorname{diam}(B)$$

이 성립한다.

문제 3.3.7. (a)⇒(b) 만약 A가 유계인 부분집합이면 $\operatorname{diam}(A) = \sup\{d(a, b) \mid a, b \in A\} < r$인 양수 r가 존재한다. 이제 임의의 한 점 $p \in A$를 택하면 $A \subset B_d(p, r)$이 성립한다.

(b)⇒(a) $\operatorname{diam}(B_d(x, r)) = 2r$이므로 $\operatorname{diam}(A) \leq \operatorname{diam}(B_d(x, r)) = 2r$이다. 따라서 A는 유계집합이다.

문제 3.3.9. (i) 모든 i에 대하여 $a_i \geq 0$이고 $d_i(x,y) \geq 0$이므로 $d(x,y) = \sum_{i=1}^n a_i d_i(x,y) \geq 0$이다.

(ii) 만약 $x = y$이면 모든 i에 대해 $d_i(x,y) = 0$이므로 $d(x,y) = 0$이 된다.

역으로 $d(x,y) = 0$이라 하자. 그리고 a_i가 동시에 0이 아니므로 $a_j > 0$이라 하자. 그러면 $d_j(x,y) = 0$이 되어야 하므로 $x = y$이다.

(iii) 모든 i에 대해 $d_i(x,y) = d_i(y,x)$이므로 $d(x,y) = d(y,x)$이다.

(iv) 주어진 $x, y, z \in X$에 대해 $d_i(x,z) \leq d_i(x,y) + d_i(y,z)$이고 $a_i \geq 0$이므로

$$
\begin{aligned}
d(x,z) &= \textstyle\sum_{i=1}^n a_i d_i(x,z) \\
&\leq \textstyle\sum_{i=1}^n a_i \{d_i(x,y) + d_i(y,z)\} \\
&= \textstyle\sum_{i=1}^n a_i d_i(x,y) + \sum_{i=1}^n a_i d_i(y,z) \\
&= d(x,y) + d(y,z)
\end{aligned}
$$

이 성립한다.

문제 3.3.11.

(1) d는 집합 X상의 거리가 됨을 다음과 같이 보일 수 있다:

(i) 모든 $d_i(x,y) \geq 0$이므로 $d(x,y) \geq 0$이 된다.

(ii) 만약 $d(x,y) = 0$이면 $0 \leq d_i(x,y) \leq d(x,y) = 0$이므로 $d_i(x,y) = 0$이다. 따라서 $x = y$이다. 역으로 만약 $x = y$이면 모든 $d_i(x,y) = 0$이므로 $d(x,y) = 0$이다.

(iii) 모든 i에 대해 $d_i(x,y) = d_i(y,x)$이므로

$$d(x,y) = \max\{d_1(x,y), \ldots, d_n(x,y)\} = \max\{d_1(y,x), \ldots, d_n(y,x)\} = d(y,x)$$

이 성립한다.

(iv) 주어진 $x, y, z \in X$에 대하여 $d_i(x,z) \leq d_i(x,y) + d_i(y,z) (\forall i)$이므로

$$
\begin{aligned}
d(x,z) &= \max\{d_1(x,z), \ldots, d_n(x,z)\} \\
&\leq \max\{d_1(x,y) + d_1(y,z), \ldots, d_n(x,y) + d_n(y,z)\} \\
&\leq \max\{d_1(x,y), \ldots, d_n(x,y)\} + \max\{d_1(y,z), \ldots, d_n(y,z)\} \\
&= d(x,y) + d(y,z)
\end{aligned}
$$

이다.

(2) $d_1(x,y) = |x_1 - y_1| + 2|x_2 - y_2|$, $d_2(x,y) = 2|x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|$은 집합 $\mathbb{R}^2$상의 거리가 됨을 쉽게 보일 수 있다.

이제 $d(x,y) = \min\{d_1(x,y), d_2(x,y)\}$이 집합 $\mathbb{R}^2$상의 거리가 아님을 보이자. 세점 $x = (1,0)$, $y = (1,1)$, $z = (0,1) \in \mathbb{R}^2$에 대하여 $d(x,y) = 1$, $d(y,z) = 1$, $d(x,z) = 3$이므로 삼각 부등식이 성립하지 않는다.

문제 3.3.13. 먼저 $p = 1, 2$인 경우 두 거리 d_1과 d_2는 각각 $\mathbb{R}^n$상의 택시거리와 보통거리가 됨을 참조하자.

편의상 점 $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$에 대해

$$\|x\|_p = \sqrt[p]{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p} = (\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p)^{\frac{1}{p}}$$

이라 하자. 그러면 임의의 두 점 $x, y \in \mathbb{R}^n$에 대해 다음과 같은 Minkowski 부등식

$$\|x + y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p$$

이 성립한다. 그리고 두 점 $x, y \in \mathbb{R}^n$에 대해 $d_p(x, y) = \|x - y\|_p$이다.

(1) 먼저 d_p가 집합 $\mathbb{R}^n$상의 거리가 됨을 보이자. 이를 위해 $x, y, z \in \mathbb{R}$이라 하자.

(i) $d_p(x, y) \geq 0$임은 자명하다.

(ii)

$$\begin{aligned} d_p(x,y) = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \textstyle\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^p = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad |x_i - y_i| = 0 \ \forall i \\ &\Leftrightarrow \quad x_i = y_i \ \forall i \\ &\Leftrightarrow \quad x = y \end{aligned}$$

(iii) 모든 $i = 1, 2, \ldots, n$에 대해 $|x_i - y_i| = |y_i - x_i|$이므로 $d_p(x, y) = d_p(y, x)$이다.

(iv) Minkowski 부등식에 의해

$$\begin{aligned} d(x,z) &= \|x - z\|_p = \|(x - y) + (y - z)\|_p \\ &\leq \|x - y\|_p + \|y - z\|_p = d_p(x, y) + d_p(y, z) \end{aligned}$$

이 성립한다.

(2) 이제 거리 d_p가 보통위상 $\mathscr{U}$를 생성함을 보이자. 이를 위해 임의의 $p \in \mathbb{N}$, $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}$와 $0 < r \in \mathbb{R}$이 주어졌다고 하자.

성질 1. *$B_{d_p}(x, r) \subset \Pi_{i=1}^{n}(x_i - r, x_i + r)$이다.*

(풀이) 다음과 같이 보일 수 있다.

$$\begin{aligned} y \in B_{d_p}(x,r) \quad &\Rightarrow \quad \|x - y\|_p = (\textstyle\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^p)^{\frac{1}{p}} < r \\ &\Rightarrow \quad \textstyle\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^p < r^p \\ &\Rightarrow \quad |x_i - y_i|^p < r^p \quad \forall i = 1, \ldots, n \\ &\Rightarrow \quad |x_i - y_i| < r \quad \forall i = 1, \ldots, n \\ &\Rightarrow \quad x_1 - r < y_i < x_i + r \quad \forall i = 1, \ldots, n \\ &\Rightarrow \quad y \in \Pi_{i=1}^{n}(x_i - r, x_i + r). \qquad \square \end{aligned}$$

성질 2. $B_{d_p}(x,r) \subset B_{d_{p+1}}(x,r)$이다.
(풀이) 다음과 같이 보일 수 있다.

$$\begin{aligned} y \in B_{d_p}(x,r) &\Rightarrow \|x-y\|_p = (\textstyle\sum_{i=1}^n |x_i - y_i|^p)^{\frac{1}{p}} < r \\ &\Rightarrow \textstyle\sum_{i=1}^n |x_i - y_i|^p < r^p \\ &\Rightarrow \textstyle\sum_{i=1}^n |x_i - y_i|^{p+1} < \sum_{i=1}^n r|x_i - y_i|^p \qquad (\because \text{성질 } 1) \\ &\quad = r\textstyle\sum_{i=1}^n |x_i - y_i|^p < r \cdot r^p = r^{p+1} \\ &\Rightarrow \|x-y\|_{p+1} = (\textstyle\sum_{i=1}^n |x_i - y_i|^{p+1})^{\frac{1}{p+1}} < r \\ &\Rightarrow y \in B_{d_{p+1}}(x,r). \qquad \square \end{aligned}$$

성질 3. 모든 p에 대해 $\mathscr{T}_{d_p} = \mathscr{T}_{d_1}$이다.
(풀이) 성질 2에 의해 임의의 $x \in \mathbb{R}^n$와 $\varepsilon > 0$에 대해 $B_{d_1}(x,\varepsilon) \subset B_{d_p}(x,\varepsilon)$이므로 $\mathscr{T}_{d_p} \subset \mathscr{T}_{d_1}$이다(성질 3.3.16).

역으로 임의로 주어진 $x \in \mathbb{R}^n$와 $\varepsilon > 0$에 대해 $\delta = \frac{\varepsilon}{2n}$이라 하면 $\Pi_{i=1}^n [x_i - \delta, x_i + \delta] \subset B_{d_1}(x,\varepsilon)$이 된다. 그리고 성질 1에 의해

$$B_{d_p}(x,\delta) \subset \Pi_{i=1}^n [x_i - \delta, x_i + \delta] \subset B_{d_1}(x,\varepsilon)$$

이다. 따라서 $\mathscr{T}_{d_1} \subset \mathscr{T}_{d_p}$이다(성질 3.3.16). $\square$

특별히 $p = 2$인 경우, d_2가 집합 $\mathbb{R}^n$상의 보통(유클리드)거리이므로 $\mathscr{T}_{d_2}$는 보통위상 $\mathscr{U}$이다. 따라서 모든 p에 대해 $\mathscr{T}_{d_p} = \mathscr{T}_{d_1} = \mathscr{T}_{d_2} = \mathscr{U}$이다.

3.4 부분공간(subspace)

문제 3.4.1. 정의에 의해 $\mathscr{T}_Y = \{Y \cap U \mid U \in \mathscr{T}\} = \{\varnothing, Y, \{c,d\}\}$이다.

문제 3.4.3. X를 집합이라 하고 $A \subset X$이라 하자.

(1) 먼저 여유한공간 $(X, \mathscr{T}_f)$의 부분공간 $(A, \mathscr{T}_A)$를 생각하자.

(i) 만약 $V \in \mathscr{T}_A$이면 $V = U \cap A$를 만족하는 $U \in \mathscr{T}_f$가 존재한다. 그런데 $U = \varnothing$ 이거나 $U^c = X - U$이 유한집합이므로 $V = \varnothing \cap A = \varnothing$ 이거나 $A - V = A \cap (X - U)$이 유한집합이 된다.

(ii) 역으로 먼저 $V \subset A$에 대해 $V = \varnothing$인 경우는 $U = \varnothing \in \mathscr{T}_f$가 존재하여 $V = \varnothing = \varnothing \cap A = U \cap A$이므로 $V \in \mathscr{T}_A$이다. 그리고 $V \subset A$에 대해 $A - V$가 유한집합인 경우는 $U = A^c \cup V = (X - A) \cup V$를 생각하자. 그러면 $U^c = X - U = A - V$가 유한집합이 되어 $U \in \mathscr{T}_f$이고, $U \cap A = V$를 만족하므로 $V \in \mathscr{T}_A$이다.

(iii) 따라서 $\mathscr{T}_A = \{V \subset A \mid A - V\text{이 유한집합}\} \cup \{\varnothing\}$이므로 A상의 부분공간위상 $\mathscr{T}_A$는 집합 A상의 여유한위상과 같다.

(2) 이제 여가산공간 $(X, \mathscr{T}_c)$의 부분공간 $(A, \mathscr{T}_A)$를 생각하자.

(i) 만약 $V \in \mathscr{T}_A$이면 $V = U \cap A$를 만족하는 $U \in \mathscr{T}_c$가 존재한다. 그런데 $U = \varnothing$ 이거나 $U^c = X - U$이 가산집합이므로 $V = \varnothing \cap A = \varnothing$ 이거나 $A - V = A \cap (X - U)$이 가산집합이 된다.

(ii) 역으로 먼저 $V \subset A$에 대해 $V = \varnothing$인 경우는 $U = \varnothing \in \mathscr{T}_c$가 존재하여 $V = \varnothing = \varnothing \cap A = U \cap A$이므로 $V \in \mathscr{T}_A$이다. 그리고 $V \subset A$에 대해 $A - V$가 가산집합인 경우는 $U = A^c \cup V = (X - A) \cup V$를 생각하자. 그러면 $U^c = X - U = A - V$가 가산집합이 되어 $U \in \mathscr{T}_c$이고, $U \cap A = V$를 만족하므로 $V \in \mathscr{T}_A$이다.

(iii) 따라서

$$\mathscr{T}_A = \{V \subset A \mid A - V \text{는 가산집합}\} \cup \{\varnothing\}$$

이므로 A상의 부분공간위상 $\mathscr{T}_A$는 집합 A상의 여가산위상과 같다.

문제 3.4.5. (1) (i) 정의에 의해 $\varnothing \in \mathscr{T}^*$이다. 그리고 $X \in \mathscr{T}$이므로 $X^* = X \cup \{p\} \in \mathscr{T}^*$이다.

(ii) $V_\alpha \in \mathscr{T}^*(\alpha \in \Lambda)$라 하자. 먼저 모든 $\alpha \in \Lambda$에 대해 $V_\alpha = \varnothing$인 경우는 $\cup_{\alpha\in\Lambda} V_\alpha = \varnothing$이므로 $\cup_{\alpha\in\Lambda} V_\alpha \in \mathscr{T}^*$이다. 그리고 $V_\alpha \neq \varnothing$인 $\alpha \in \Lambda$가 존재하는 경우는

$$\Lambda_1 = \{\alpha \in \Lambda \mid V_\alpha \neq \varnothing\}$$

이라 하자. 그러면 각각의 $\alpha \in \Lambda_1$에 대해 $V_\alpha = U_\alpha \cup \{p\}$인 $U_\alpha \in \mathscr{T}$가 존재하여

$$\cup_{\alpha\in\Lambda} V_\alpha = \cup_{\alpha\in\Lambda_1} V_\alpha = (\cup_{\alpha\in\Lambda_1} U_\alpha) \cup \{p\}$$

이고 $\cup_{\alpha\in\Lambda_1} U_\alpha \in \mathscr{T}$이므로 $\cup_{\alpha\in\Lambda} V_\alpha \in \mathscr{T}^*$이다.

(iii) $V_1, \ldots, V_n \in \mathscr{T}^*$라 하자. 먼저 $V_i = \varnothing$인 i가 존재하는 경우는 $\cap_{i+1}^n V_i = \varnothing$이므로 $\cap_{i+1}^n V_i \in \mathscr{T}^*$이다. 그리고 모든 i에 대해 $V_i \neq \varnothing$인 경우에는 각각의 i에 대해 $V_i = U_i \cup \{p\}$인 $U_i \in \mathscr{T}$가 존재하여

$$\cap_{i=1}^n V_i = (\cap_{i=1}^n U_i) \cup \{p\}$$

이고 $\cap_{i=1}^n U_i \in \mathscr{T}$이므로 $\cap_{i=1}^n V_i \in \mathscr{T}^*$이다.

따라서 $\mathscr{T}^*$는 X^*상의 위상이다.

(2) $A \subset X$가 주어졌다 하자.

만약 A가 X^*의 닫힌집합이면 $X^* - A \in \mathscr{T}^*$이다. 그리고 $X^* - A \neq \varnothing$이므로 $X^* - A = U \cup \{p\}$인 $U \in \mathscr{T}$가 존재한다. 그런데 $(X - A) \cup \{p\} = X^* - A = U \cup \{p\}$이고 $X - A$, $U \subset X$(즉 $(X - A) \cap \{p\} = \varnothing$, $(X - A) \cap \{p\} = \varnothing$)이므로 $X - A = U$이다. 따라서 $A = X - U$는 X의 닫힌집합이다.

역으로 A가 X의 닫힌집합이라 하자. 그러면 $X - A \in \mathscr{T}$이므로 $(X - A) \cup \{p\} \in \mathscr{T}^*$이다. 그런데 $(X - A) \cup \{p\} = X^* - A$이므로 $X^* - A \in \mathscr{T}^*$가 되어 A는 X^*의 닫힌집합이다.

(3) $\mathscr{T}_X = \{X \cap V \mid V \in \mathscr{T}^*\}$이라 하자. 우리는 $\mathscr{T}_X = \mathscr{T}$임을 보이면 된다.

먼저 만약 $U \in \mathscr{T}_X$이면 $U = X \cap V$인 $V \in \mathscr{T}^*$가 존재한다. 먼저 $V = \varnothing$인 경우는 $U = X \cap \varnothing = \varnothing$이므로 $U \in \mathscr{T}$이다. 그리고 $V \neq \varnothing$인 경우에는 적당한 $W \in \mathscr{T}$가 존재하여 $V = W \cup \{p\}$이므로

$$U = X \cap V = X \cap (W \cup \{p\}) = W \in \mathscr{T}$$

이다. 따라서 $\mathscr{T}_X \subset \mathscr{T}$이다.

역으로 만약 $U \in \mathscr{T}$이면 $V = U \cup \{p\} \in \mathscr{T}^*$이므로 $U = X \cap V \in \mathscr{T}_X$이다. 따라서 $\mathscr{T} \subset \mathscr{T}_X$이다.

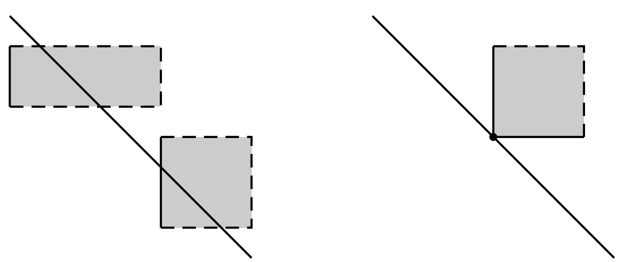
문제 3.4.7. $\mathscr{T}' \subset \mathscr{T}$이므로 자명하게

$$\mathscr{T}'_Y = \{Y \cap U \mid U \in \mathscr{T}'\} \subset \{Y \cap U \mid U \in \mathscr{T}\} = \mathscr{T}_Y$$

이다. 따라서 $\mathscr{T}_Y$는 $\mathscr{T}'_Y$ 보다 세밀하다.

문제 3.4.9. 우리는 $\mathscr{A}^* = \mathscr{A} - \{\varnothing\}$가 가산임을 보이면 된다. 편의상 $\mathscr{A}^* = \{U_\alpha \mid \alpha \in \Lambda\}$이라 하자. 각각의 $\alpha \in \Lambda$에 대해 $x_\alpha \in U_\alpha$를 만족하는 유리수 $x_\alpha \in \mathbb{Q}$를 하나씩 택하자. 그리고 함수 $f\colon \Lambda \to \mathbb{Q}$, $f(\alpha) = x_\alpha$를 생각하자. 그러면 $\{U_\alpha \mid \alpha \in \Lambda\}$가 쌍마다 서로소이므로 f는 단사이다. 그리고 $\mathbb{Q}$이 가산이므로 Λ도 가산집합이다. 따라서 $\mathscr{A}^*$가 가산이므로 $\mathscr{A}$도 가산이다.

문제 3.4.11. (i) 먼저 $(\mathbb{R}^2, \mathscr{T}_1)$의 부분공간 L상의 위상 $\mathscr{T}_{1L}$을 먼저 생각하자. 성질 3.4.9에 의해 $\mathscr{T}_{1L}$의 기저는 $\mathscr{B}_{1L} = \{L \cap B \mid B \in \mathscr{B}_1\}$이고 $L \cap B$는 그림 3.1(a)처럼 표현된다. 따라서 보기 3.2.12에서와 같이 L상의 부분공간위상은 집합 $\mathbb{R}$상의 하극한위상과 같은 형태이다.



(a) (b)

그림 3.1: L의 기저

(ii) 이제 $(\mathbb{R}^2, \mathscr{T}_2)$의 부분공간 L상의 위상 $\mathscr{T}_{2L}$을 생각하자. 성질 3.4.9에 의해 $\mathscr{T}_{2L}$의 기저는 $\mathscr{B}_{2L} = \{L \cap B \mid B \in \mathscr{B}_2\}$이다. 임의로 주어진 점 $(x, -x) \in L$에 대하여 $B = [x, x+1) \times [-x, -x+1) \in \mathscr{B}_2$가 존재하여 그림 3.1(b)처럼 $\{(x, -x)\} = L \cap B$이 되므로 $\{(x, -x)\}$는 부분공간 L의 열린집합이 된다. 따라서 부분공간 L은 이산공간이다.

문제 3.4.13. (1) (a)⇒(b) 정의 3.4.1에 의해 자명하다.

(b)⇒(a) $A \cap U$는 A의 열린집합이고 A가 X의 열린집합이므로 정리 3.4.8에 의해 $A \cap U$는 X의 열린집합이다. 같은 방법으로 $B \cap U$도 X의 열린집합이다. 따라서

$$(A \cap U) \cup (B \cap U) = (A \cup B) \cap U = X \cap U = U$$

도 X의 열린집합이다.

(2) (a)⇒(b) 정의 3.4.1에 의해 자명하다.

(b)⇒(a) $A \cap U$는 A의 열린집합이므로 $A - (A \cap U)$는 A의 닫힌집합이다. 한편 A가 X의 닫힌집합이므로 정리 3.4.8에 의해 $A - (A \cap U)$는 X의 닫힌집합이다. 같은 방법으로 $B - (B \cap U)$도 X의 닫힌집합이다. 따라서 $[A - (A \cap U)] \cup [B - (B \cap U)]$는 X의 닫힌집합이다. 그리고

$$\begin{aligned}
[A - (A \cap U)] \cup [B - (B \cap U)] &= [A \cap (A \cap U)^c] \cup [B \cap (B \cap U)^c] \\
&= [A \cap (A^c \cup U^c)] \cup [B \cap (B^c \cup U^c)] \\
&= [(A \cap A^c) \cup (A \cap U^c)] \cup [(B \cap B^c) \cup (B \cap U^c)] \\
&= (A \cap U^c) \cup (B \cap U^c) \\
&= (A \cup B) \cap U^c = X \cap U^c = U^c
\end{aligned}$$

이므로 U는 X의 열린집합이다.

문제 3.4.15. (1) 만약 B가 $X_1 \cup X_2$의 열린집합이면 $B = U \cap (X_1 \cup X_2)$를 만족하는 X의 열린집합 U가 존재한다. 이러한 U에 대하여 $B \cap X_1 = U \cap X_1$, $B \cap X_2 = U \cap X_2$이 성립하므로 $B \cap X_1$은 X_1의 열린집합이고 $B \cap X_2$는 X_2의 열린집합이다.

(2) $X = \mathbb{R}$이라 하고 $X_1 = [-2, 0]$, $X_2 = (0, 2]$라 하자. 그리고 $B = (-1, 0]$이라 하자. 그러면 $B \cap X_1 = (-1, 0] = X_1 \cap (-1, 1)$이므로 $B_1 \cap X_1$은 X_1의 열린집합이다. 그리고 $B \cap X_2 = \varnothing$이므로 $B \cap X_2$는 X_2의 열린집합도 된다. 그러나 $B = (-1, 0]$는 $X_1 \cup X_2 = [-2, 2]$의 열린집합은 아니다.

(3) (1)의 풀이와 비슷하게 보이면 된다. 구체적으로 (1)의 풀이 과정에서 “열린”을 “닫힌”으로 바꾸면 된다.

(4) $X = \mathbb{R}$이라 하고 $X_1 = [-2, 0]$, $X_2 = (0, 2]$라 하자. 그리고 $B = (0, 1]$이라 하자. 그러면 $B \cap X_1 = \varnothing$이므로 $B \cap X_1$은 X_1의 닫힌집합이다. 그리고 $B \cap X_2 = (0, 1] = X_2 \cap [-1, 1]$이므로 $B_1 \cap X$는 X_2의 닫힌집합이다. 그러나 $B = (0, 1]$은 $X_1 \cup X_2 = [-2, 2]$의 닫힌집합이 아니다.

3.5 순서위상(order topology)†

문제 3.5.1. 만약 순서공간 $(X, \leq)$이 이산공간이라 가정하면 한 점 집합 $\{0\}$이 $(X, \leq)$의 열린집합이 되어야 한다. 그러므로 $0 \in [0, \frac{1}{k}) \subset \{0\}$을 만족하는 기저의 원소 $[0, \frac{1}{k})$이 존재한다. 여기서 0이 $(X, \leq)$의 최소원임을 상기하자. 그런데 $[0, \frac{1}{k})$이 무한집합이므로 모순이다. 따라서 순서공간 $(X, \leq)$은 이산공간이 아니다.

문제 3.5.3. (1)과 (3)은 이산공간이고, (2)와 (4)는 이산공간이 아니다.

문제 3.5.5. X가 전순서집합이므로 우리는 $x \prec y$라 할 수 있다.

먼저 $x \prec a \prec y$인 $a \in X$가 존재하는 경우에는

$$U = (-\infty, a) = \{z \in X \mid z \prec a\}, \ V = (a, \infty) = \{z \in X \mid z \succ a\}$$

로 택하면 된다.

그리고 $x \prec a \prec y$인 $a \in X$가 존재하지 않는 경우에는

$$U = (-\infty, y) = \{z \in X \mid z \prec y\}, \ V = (x, \infty) = \{z \in X \mid z \succ x\}$$

로 택하면 된다. 참고로 $U = (-\infty, x]$이고 $V = [y, \infty)$이다.

제 4 장

열린집합과 닫힌집합

4.1 열린집합과 내부

문제 4.1.1. (1) 점 $2 \in A = [-2,-1) \cup (1,2]$에 대해 $2 \in (2-r, 2+r) \subset A$를 만족하는 양수 r이 존재하지 않으므로 2는 A의 내부점이 아니다. 따라서 A는 $\mathbb{R}$의 열린집합이 아니다.

(2) 자명하게 $B = (-3,-2) \cup (2,3)$은 열린집합이다.

(3) 점 $1 \in C$에 대하여 $1 \in (1-r, 1+r) \subset C$를 만족하는 양수 r이 존재하지 않으므로 1는 C의 내부점이 아니다. 따라서 C는 $\mathbb{R}$의 열린집합이 아니다.

(4) 점 $1 \in D$에 대하여 $1 \in (1-r, 1+r) \subset D$를 만족하는 양수 r이 존재하지 않으므로 1는 D의 내부점이 아니다. 따라서 D는 $\mathbb{R}$의 열린집합이 아니다.

(5) 점 $0 \in E = \mathbb{R} - \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{Z} - \{0\}\}$에 대하여 $0 \in (-r, r) \subset E$를 만족하는 양수 r이 존재하지 않으므로 0는 E의 내부점이 아니다. 따라서 E는 $\mathbb{R}$의 열린집합이 아니다.

문제 4.1.3. $n = 1, 2, 3, \ldots$에 대해 U_n이 $(X, \mathscr{T}_c)$의 열린집합이라 하자.

먼저 공집합인 U_n이 존재하는 경우에는 $\cap_{n=1}^{\infty} U_n = \varnothing$이 되어 $\cap_{n=1}^{\infty} U_n$는 열린집합이다.

이제 모든 U_n이 공집합이 아닌 경우를 생각하자. 이 경우 모든 U_n^c은 가산집합이 된다. 그러므로

$$(\cap_{n=1}^{\infty} U_n)^c = \cup_{n=1}^{\infty} U_n^c$$

은 가산개의 가산집합들의 합집합이므로 가산집합이다. 따라서 $\cap_{n=1}^{\infty} U_n$은 열린집합이다.

문제 4.1.5. (1) $\mathbb{R}^2$의 열린집합 $U = (0,1) \times \mathbb{R}$이 존재하여 $A = U \cap H$이 되므로 A는 H의 열린집합이다.

(2) $\mathbb{R}^2$의 열린집합 $U = (0,1) \times (-1,1)$이 존재하여 $V = U \cap H$이 되므로 $V = (0,1) \times [0,1)$는 H의 열린집합이다. 따라서 $V \subset \mathrm{int}_H(B)$이다. 그리고 모든 점 $(x,y) \in B - V$이 B의 내부점이 아니므로 $\mathrm{int}_H(B) = V = (0,1) \times [0,1)$이다.

(3) 자명하게 $\mathrm{int}_{\mathbb{R}^2}(B) = (0,1) \times (0,1)$이다.
(4) $\mathrm{int}_{\mathbb{R}^2}(B) \cap H = (0,1) \times (0,1) \neq (0,1) \times [0,1) = \mathrm{int}_H(B)$이다.

4.2 닫힌집합과 폐포

문제 4.2.1.

(1) 먼저 X가 가산집합이면 $\mathscr{T}_c$는 이산위상이므로 X의 모든 부분집합 A는 열린집합인 동시에 닫힌집합이다. 따라서 $A^\circ = A$이고 $\overline{A} = A$이다. 한편 임의의 점 $x \in X$에 대해 $\{x\}$는 x의 열린근방이고 $A \cap \{x\} - \{x\} = \varnothing$이므로 $x \notin A'$이다. 따라서 $A' = \varnothing$이다.

(2) 이제 X를 비가산집합이라 하자.

(a) $A \subset X$가 가산집합인 경우:

(i) A°는 $A^\circ \subset A$인 열린집합이므로 $(A^\circ)^c \supset A^c$이다. 그런데 A가 가산집합이고 X가 비가산집합이므로 A^c은 비가산집합이다. 따라서 $(A^\circ)^c$도 비가산집합이므로 $A^\circ = \varnothing$이 되어야 한다.

(ii) 임의의 점 $x \in X$에 대하여 $A - \{x\}$는 가산집합이므로 $U = (A - \{x\})^c$는 x의 열린근방이다. 그런데

$$(U \cap A) - \{x\} = U \cap (A - \{x\}) = \varnothing$$

이므로 $x \notin A'$이다. 따라서 $A' = \varnothing$이다.

(iii) $\overline{A} = A \cup A'$이므로 $\overline{A} = A$이다.

(b) $A \subset X$가 비가산집합인 경우: 임의의 점 $x \in X$에 대하여 만약 U가 x의 열린근방이면 $U \neq \varnothing$이므로 U^c은 가산집합이다. 그리고 $U \cap A = A - U^c$이므로 $U \cap A$은 비가산집합이고 $U \cap A - \{x\} \neq \varnothing$이다. 따라서 $x \in A'$이다. 우리는 x를 임의로 택하였으므로 $A' = X$이다.

한편 $\overline{A} = A \cup A'$이므로 $\overline{A} = X$이다.

(c) A^c이 비가산집합인 경우: A°는 $A^\circ \subset A$인 열린집합이므로 $(A^\circ)^c \supset A^c$이다. 그런데 A^c이 비가산집합이므로 $(A^\circ)^c$도 비가산집합이다. 따라서 $A^\circ = \varnothing$이 되어야 한다.

(d) A^c이 가산집합인 경우: A^c이 가산집합이므로 A는 열린집합이다. 따라서 $A^\circ = A$이다.

문제 4.2.3. 성질 4.2.35 참조.

(1) 만약 A가 열린집합이면 $A = A^\circ$이다. 그러므로 $\partial A = \overline{A} - A^\circ = \overline{A} - A$이다. 역으로 만약 $\partial A = \overline{A} - A$이면 $\overline{A} - A^\circ = \partial A = \overline{A} - A$이고 $A^\circ, A \subset \overline{A}$이므로 $A^\circ = A$이다. 따라서 A는 열린집합이다.

(2) (1)에 의하여 성립한다.

(3) 먼저 $\partial A = \varnothing$이면 $\overline{A} - A^\circ = \partial A = \varnothing$이므로 $\overline{A} \subset A^\circ$이다. 그러므로 $A \subset \overline{A} \subset A^\circ \subset A$가 성립하여 $A^\circ = A = \overline{A}$이 성립한다. 따라서 A는 열린집합인 동시에 닫힌집합이다.

역으로 A가 열린집합인 동시에 닫힌집합이면 $A^\circ = A = \overline{A}$이다. 따라서 $\partial A = \overline{A} - A^\circ = A - A = \varnothing$이다.

(4) 성질 4.2.18(5)에 의하여 성립한다.

문제 4.2.5. 만약 $A \cap U = \varnothing$이면 $A \subset U^c$이고 U^c이 닫힌집합이므로 성질 4.2.9에 의해 $\overline{A} \subset U^c$이다. 따라서 $\overline{A} \cap U^c = \varnothing$이다.

문제 4.2.7. $\mathrm{cl}_A(B) = A \cap \mathrm{cl}_X(B)$이므로 $\mathrm{cl}_A(B) \subset \mathrm{cl}_X(B)$이다. 그리고 $\mathrm{cl}_A(B)$는 A의 닫힌집합이고 A가 X의 닫힌집합이므로 $\mathrm{cl}_A(B)$는 X의 닫힌집합이다. 그런데 $\mathrm{cl}_X(B)$이 B를 포함하는 가장 작은 X의 닫힌집합이므로 $\mathrm{cl}_X(B) \subset \mathrm{cl}_A(B)$이다. 따라서 $\mathrm{cl}_A(B) = \mathrm{cl}_X(B)$이다.

문제 4.2.9. A°는 A에 포함되는 가장 큰 열린집합이므로 $A^\circ = \{a, b\}$이다. 그리고 $e(A) = (A^c)^\circ$이고 $A^c = \{d, e\}$이므로 $e(A) = (A^c)^\circ = \varnothing$이다. 마지막으로 $\partial A = X - [A^\circ \cup e(A)] = \{c, d, e\}$이다.

문제 4.2.11. 그림을 그려 생각해 보면 쉽다.

(1) $A = \{(x, y) \mid xy > 0\}$가 $\mathbb{R}^2$의 열린집합이므로 $A^\circ = A$이다. 그리고

$$\begin{aligned}
&\overline{A} = \{(x, y) \mid xy \geq 0\}, \\
&e(A) = (A^c)^\circ = (\overline{A})^c = \{(x, y) \mid xy < 0\}, \\
&\partial(A) = \overline{A} - A^\circ = \{(x, y) \mid xy = 0\}
\end{aligned}$$

이다.

(2) $B = \{(x, y) \mid 1 \leq x^2 + y^2 < 2\}$에 대하여

$$\begin{aligned}
&B^\circ = \{(x, y) \mid 1 < x^2 + y^2 < 2\}, \\
&\overline{B} = \{(x, y) \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 2\}, \\
&e(B) = (\overline{B})^c = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 < 1\} \cup \{(x, y) \mid x^2 + y^2 > 2\}, \\
&\partial(B) = \overline{B} - B^\circ = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 1\} \cup \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 2\}
\end{aligned}$$

이다.

(3) $C = \{(x, \sin\frac{1}{x}) \mid 0 < x \in \mathbb{R}\}$에 대하여

$$\begin{aligned}
&C^\circ = \varnothing,\\
&\overline{C} = C \cup (\{0\} \times [-1,1]),\\
&e(C) = (\overline{C})^c,\\
&\partial(C) = \overline{C} - C^\circ = \overline{C} = C \cup (\{0\} \times [-1,1])
\end{aligned}$$

이다.

(4) $D = \{(r, s) \mid r, s \in \mathbb{Q}\}$에 대하여

$$\begin{aligned}
&D^\circ = \varnothing,\\
&\overline{D} = \mathbb{R}^2,\\
&e(D) = (\overline{D})^c = \varnothing,\\
&\partial(D) = \overline{D} - D^\circ = \mathbb{R}^2
\end{aligned}$$

이다.

(5) $E = \{(x, 0) \mid 0 < x \leq 1\} = (0,1] \times \{0\}$에 대하여

$$\begin{aligned}
&E^\circ = \varnothing,\\
&\overline{E} = [0,1] \times \{0\},\\
&e(E) = (\overline{E})^c = \mathbb{R}^2 - ([0,1] \times \{0\}),\\
&\partial(E) = \overline{E} - E^\circ = [0,1] \times \{0\}
\end{aligned}$$

이다.

(6) $F = \{(\frac{1}{n}, 0) \mid n \in \mathbb{N}\}$에 대하여

$$\begin{aligned}
&F^\circ = \varnothing,\\
&\overline{F} = F \cup \{(0,0)\},\\
&e(F) = (\overline{F})^c = \mathbb{R}^2 - \overline{F},\\
&\partial(F) = \overline{F} - F^\circ = F \cup \{(0,0)\}
\end{aligned}$$

이다.

(7) $G = \{(1-\frac{1}{n}, \frac{1}{2}) \mid n \in \mathbb{N}\}$에 대하여

$$\begin{aligned}
&G^\circ = \varnothing, \\
&\overline{G} = G \cup \{(1, \tfrac{1}{2})\}, \\
&e(G) = (\overline{G})^c = \mathbb{R}^2 - \overline{G}, \\
&\partial(G) = \overline{G} - G^\circ = G \cup \{(1, \tfrac{1}{2})\}
\end{aligned}$$

이다.

문제 4.2.13. $A' = \{(\frac{1}{m}, 0) \mid m \in \mathbb{N}\} \cup \{(0, \frac{1}{n}) \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{(0,0)\}$이다.

문제 4.2.15. (a) 집합 $\{a+\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$의 극한점이 a 뿐이므로 집합 $A = \{\frac{1}{m}+\frac{1}{n} \mid m, n \in \mathbb{N}\}$의 도집합은 $A' = \{\frac{1}{m} \mid m \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$이다.

(b) $\frac{\sin n}{n} \to 0$이므로 $B = \{\frac{\sin n}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$의 도집합은 $B' = \{0\}$이다.

문제 4.2.17.

(1) (i) 정의에 의해 $\mathbb{R} \in \mathscr{T}$이고, $0 \notin \varnothing$이므로 $\varnothing \in \mathscr{T}$이다.

(ii) $U_\alpha \in \mathscr{T}(\alpha \in \Lambda)$라 하자. 먼저 $U_\alpha = \mathbb{R}$인 U_α가 존재하는 경우는 $\cup_{\alpha\in\Lambda} U_\alpha = \mathbb{R} \in \mathscr{T}$이다. 이제 모든 $\alpha \in \Lambda$에 대해 $U_\alpha \neq \mathbb{R}$이라 하자. 그러면 $0 \notin U_\alpha (\forall \alpha \in \Lambda)$이므로 $0 \notin \cup_{\alpha\in\Lambda} U_\alpha$이다. 따라서 $\cup_{\alpha\in\Lambda} U_\alpha \in \mathscr{T}$이다.

(iii) $U, V \in \mathscr{T}$라 하자. 먼저 $0 \notin U$ 또는 $0 \notin V$인 경우는 $0 \notin U \cap V$이므로 $U \cap V \in \mathscr{T}$이다. 그리고 $0 \in U$이고 $0 \in V$인 경우는 $U = V = \mathbb{R}$이므로 $U \cap V = \mathbb{R} \in \mathscr{T}$이다.

따라서 $\mathscr{T}$는 집합 $\mathbb{R}$상의 위상이다.

(2) $0 \notin A = (1,2)$이므로 A는 열린집합이다. 따라서 $A^\circ = A = (1,2)$이다. 한편 공집합이 아닌 닫힌집합은 0을 포함하여야 하므로 $\overline{A} = \{0\} \cup (1,2)$이다.

이제 도집합 A'을 구해보자. 만약 $x \neq 0$이면 $\{x\}$는 x의 열린근방이고 $A \cap \{x\} - \{x\} = \varnothing$이므로 $x \notin A'$이다. 그리고 0의 열린근방은 $\mathbb{R}$ 뿐이고 $A \cap \mathbb{R} - \{0\} \neq \varnothing$이므로 $0 \in A'$이다. 따라서 $A' = \{0\}$이다.

(3) $\mathbb{R}$이 아닌 열린집합은 0을 포함하지 않아야 하므로 집합 $B = (-1,1)$의 내부 $B^\circ = (-1,0) \cup (0,1)$이다. 그리고 $0 \in B = (-1,1)$이므로 B는 닫힌집합이다. 따라서 $\overline{B} = B = (-1,1)$이다.

이제 도집합 B'을 구해보자. 만약 $x \neq 0$이면 $\{x\}$는 x의 열린근방이고 $B \cap \{x\} - \{x\} = \varnothing$이므로 $x \notin B'$이다. 그리고 0의 열린근방은 $\mathbb{R}$ 뿐이고 $B \cap \mathbb{R} - \{0\} \neq \varnothing$이므로 $0 \in B'$이다. 따라서 $B' = \{0\}$이다.

문제 4.2.19. (1) ($\subset$) 먼저 $x \in B'_A$이라 하자. 그러면 정의에 의해 $x \in A$이다. 이제 $x \in B'_X$임을 보이면 된다. U를 x를 포함하는 X의 열린집합이라 하자. 그러면 $U \cap A$는 x를 포함하는 A의 열린집합이다. 그리고 $x \in B'_A$이므로 $B \cap (U \cap A) - \{x\} \neq \varnothing$이다. 그런데 $B \cap (U \cap A) - \{x\} \subset B \cap U - \{x\}$이므로 $B \cap U - \{x\} \neq \varnothing$이다. 따라서 $x \in B'_X$이다.

($\supset$) 이제 $x \in B'_X \cap A$이라 하자. 그리고 V를 x를 포함하는 A의 열린집합이라 하자. 그러면 $V = A \cap U$인 X의 열린집합 U가 존재하여 $x \in U$이다. 그리고 $x \in B'_X$이므로 $B \cap U - \{x\} \neq \varnothing$이다. 그런데 $B \subset A$이므로 $B \cap V - \{x\} = B \cap (A \cap U) - \{x\} = B \cap U - \{x\} \neq \varnothing$이다. 따라서 $x \in B'_A$이다.

(2) 정의에 의해 $\mathrm{bdy}_A(B) \subset A$이다.

그리고 성질 4.1.9(1)과 성질 4.2.18(1)에 의해 $\mathrm{int}_A(B) \supset \mathrm{int}_X(B)$, $\mathrm{cl}_A(B) \subset \mathrm{cl}_X(B)$이므로

$$\mathrm{bdy}_A(B) = \mathrm{cl}_A(b) - \mathrm{int}_A(B) \subset \mathrm{cl}_X(B) - \mathrm{int}_X(B) = \mathrm{bdy}_X(B)$$

이다. 따라서 $\mathrm{bdy}_A(B) \subset \mathrm{bdy}_X(B) \cap A$이다.

문제 4.2.21. 임의의 점 $a \in A$에 대하여 $a \notin A'$이므로 $U_a \cap A = \{a\}$인 a의 열린근방 U_a가 존재한다. 이제 $W = \bigcup_{a \in A} U_a$이라 하면 $A \subset W$이다. 그리고 성질 2.2.22에 의해 $\{U_a \mid a \in A\}$의 가산 부분모임 $\{U_{a_n} \mid n \in \mathbb{N}\}$이 존재하여 $W = \bigcup_{n=1}^{\infty} U_{a_n}$이다. 그리고 $A \subset W$이므로

$$A = A \cap W = A \cap (\bigcup_{n=1}^{\infty} U_{a_n}) = \bigcup_{n=1}^{\infty} (A \cap U_{a_n}) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{a_n\} = \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$$

이다. 따라서 A는 가산집합이다.

문제 4.2.23. 두 점 이상으로 이루어진 집합 X상의 이산거리 $d(x,y) = \begin{cases} 0, & x = y \\ 1, & x \neq y \end{cases}$ 를 생각하자. 그러면 X는 이산공간이다. 그리고 $a \in X$라 하자.

(1) $B_d(a,1) = \{x \in X \mid d(a,x) < 1\} = \{a\}$이고, X가 이산공간이므로 $\{a\}$는 닫힌집합이다. 따라서 $\overline{B_d(a,1)} = \overline{\{a\}} = \{a\}$이다. 그런데 $\{x \in X \mid d(a,x) \leq 1\} = X$이므로 $\overline{B_d(a,1)} \neq \{x \in X \mid d(a,x) \leq 1\}$이다.

(2) $B_d(a,1) = \{a\}$이고, X가 이산공간이므로 $(B_d(a,1))^\circ = (\{a\})^\circ = \{a\}$이고 $\overline{B_d(a,1)} = \overline{\{a\}} = \{a\}$이다. 따라서

$$\partial B_d(a,1) = \overline{B_d(a,1)} - (B_d(a,1))^\circ = \{a\} - \{a\} = \varnothing$$

이다. 그런데 $\{x \in X \mid d(a,x) = 1\} = X - \{a\}$이므로 $\partial B_d(a,1) \neq \{x \in X \mid d(a,x) = 1\}$이다.

문제 4.2.25.

(1) 먼저 $t = r - s$라 하자. 만약 $x \in \overline{B_d(a,s)}$이면 x의 열린근방 $B_d(x,t)$에 대해 $B_d(a,s) \cap B_d(x,t) \neq \varnothing$이 되어 점 $y \in B_d(a,s) \cap B_d(x,t)$가 존재한다. 그러면

$$d(a,x) \leq d(a,y) + d(y,x) < s + t = s + (r-s) = r$$

이 되어 $x \in B_d(a,r)$이다. 따라서 $\overline{B_d(a,s)} \subset B_d(a,r)$이다.

(2) (대우) $d(a,x) > s$라 가정하고, $r = d(a,x) - s > 0$라 하자. 먼저 우리는 $B_d(a,s) \cap B_d(x,r) = \varnothing$임을 보이자: 만약 $B_d(a,s) \cap B_d(x,r) \neq \varnothing$이라 가정하면 점 $y \in B_d(a,s) \cap B_d(x,r)$이 존재한다. 그러면

$$d(a,x) \leq d(a,y) + d(y,x) < s + r = s + (d(a,x) - s) = d(a,x)$$

이 되어 모순이다.

따라서 $B_d(x,r)$은 x의 열린근방으로서 $B_d(a,s) \cap B_d(x,r) = \varnothing$이므로 $x \notin \overline{B_d(a,s)}$이다.

(3) ($\supset$)

$$\begin{aligned} x \notin \overline{A} \quad &\Rightarrow \quad \exists r > 0 \text{ s.t. } B_d(x,r) \cap A = \varnothing \\ &\Rightarrow \quad \forall a \in A,\ d(x,a) \geq r \\ &\Rightarrow \quad d(x,A) = \inf\{d(x,a) \mid a \in A\} \geq r > 0 \\ &\Rightarrow \quad d(x,A) \neq 0 \\ &\Rightarrow \quad x \notin \{x \in X \mid d(x,A) = 0\} \end{aligned}$$

($\subset$)

$$\begin{aligned} x \notin \{x \in X \mid d(x,A) = 0\} \quad &\Rightarrow \quad r := d(x,y) > 0 \\ &\Rightarrow \quad \forall a \in A,\ d(x,a) \geq d(x,A) = r > 0 \\ &\Rightarrow \quad \forall a \in A,\ a \notin B_d(x,r) \\ &\Rightarrow \quad B_d(x,r) \cap A = \varnothing \\ &\Rightarrow \quad x \notin \overline{A} \end{aligned}$$

문제 4.2.27.

(1) (i) 임의로 주어진 점 $n \in X$에 대해 $n \in B_n$이다.

(ii) $k \in B_n \cap B_m$이라 하자. 그러면 k는 n의 약수이므로 $B_k \subset B_n$이다. 그리고 k는 m의 약수도 되므로 $B_k \subset B_n$이다. 따라서 $k \in B_k \subset B_n \cap B_m$이다.

(2) (귀류법) $U = \{2,4,6,7\}$가 열린집합이라 가정하자. 그러면 $6 \in U$이므로 $6 \in B_n \subset U$인 B_n이 존재하여야 한다. 그래서 n이 6의 배수이므로 3은 n의 약수이다. 따라서 $3 \in B_n$이고 $3 \notin U$이므로 모순이다. 그러므로 U는 열린집합이 아니다.

(3) 임의로 주어진 소수 $p \in P$에 대해 $B_p = \{p\}$이므로 한 점 집합 $\{p\}$는 열린집합이다. 따라서 $P = \cup_{p\in P}\{p\}$는 열린집합이다.

(4) 임의로 주어진 점 $n \in X$과 n의 열린근방 U에 대해 $n \in B_k \subset U$를 만족하는 B_k가 존재한다. 그리고 k의 소인수 분해를 $p_1^{\varepsilon_1} p_2^{\varepsilon_1} \cdots p_l^{\varepsilon_l}$라 하자. 단, 여기서 $\varepsilon i \geq 1$이다. 그러면 $p_1, p_2, \ldots, p_l \in B_k$이므로 $U \cap P \neq \varnothing$이다. 그러므로 $n \in \overline{P}$이다. 따라서 $\overline{P} = X$이다.

(5) $A = \{nk \mid k \in \mathbb{N}\}$이라 하자. 이제 $\overline{\{n\}} = A$임을 보이자.

먼저 $m \in \overline{\{n\}}$이면 B_m이 m의 열린근방이므로 $B_m \cap \{n\} \neq \varnothing$이 되어 $n \in B_m$이다. 그래서 m은 n의 배수이므로 $m \in A$이다.

만약 $m \notin \overline{\{n\}}$이면 $U \cap \{n\} = \varnothing$을 만족하는 m의 열린근방 U가 존재한다. 그리고 $\mathscr{T}$의 정의에 의해 $m \in B_k \subset U$을 만족하는 B_k가 존재하고, k는 m의 배수이다. 그래서 $B_m \subset B_k$이므로 $B_m \cap \{n\} = \varnothing$이다. 따라서 $n \notin B_m$이므로 m은 n의 배수가 아니다. 그러므로 $m \notin A$이다.

따라서 $\overline{\{n\}} = A = \{nk \mid k \in \mathbb{N}\}$이다.

문제 4.2.29.

(1) $\partial A = \overline{A} - A^\circ$이므로 ∂A는 X의 닫힌집합이다 따라서 $\overline{\partial A} = \partial A$이다.

(2) 먼저 $\overline{A}$가 닫힌집합이므로 $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$이다. 그리고 $A \subset \overline{A}$이므로 $A^\circ \subset \overline{A}^\circ$이다. 따라서

$$\partial(\overline{A}) = \overline{\overline{A}} - \overline{A}^\circ = \overline{A} - \overline{A}^\circ \subset \overline{A} - A^\circ = \partial(A)$$

이다.

(3) (1)에 의해 $\partial(\partial A) = \overline{\partial A} - (\partial A)^\circ \subset \overline{\partial A} = \partial A$이 성립한다.

(4) 성질 4.1.9, 성질 4.2.18, 성질 4.2.35와 (1)에 의해

$$\begin{aligned}(\partial(\partial A))^\circ &= (\overline{\partial A} \cap \overline{(\partial A)^c})^\circ = (\partial A \cap ((\partial A)^\circ)^c)^\circ \\ &= (\partial A)^\circ \cap (((\partial A)^\circ)^c)^\circ \subset (\partial A)^\circ \cap ((\partial A)^\circ)^c = \varnothing\end{aligned}$$

이므로 $(\partial(\partial A))^\circ = \varnothing$이다.

(5) (1)와 (3)에 의해 $\partial(\partial(\partial A)) = \overline{\partial(\partial A)} - (\partial(\partial A))^\circ = \partial(\partial A) - \varnothing = \partial(\partial A)$이다.

(6) 먼저 $(A^\circ)^c$이 닫힌집합이므로 $(A^\circ)^c = \overline{(A^\circ)^c}$이다. 따라서 $\partial(A^\circ) = \overline{A^\circ} \cap \overline{(A^\circ)^c} = \overline{A^\circ} \cap (A^\circ)^c \subset \overline{A} \cap (A^\circ)^c = \overline{A} \cap \overline{A^c} = \partial A$이다.

(7) $x \notin \partial A \cup \partial B$이라 하자. 그러면 $x \notin \partial A$이고 $x \notin \partial B$이다. 그리고

$$\begin{aligned} x \notin \partial A \quad &\Leftrightarrow \quad x \in A^\circ \text{ 또는 } x \in e(A) \\ x \notin \partial B \quad &\Leftrightarrow \quad x \in B^\circ \text{ 또는 } x \in e(B) \end{aligned}$$

임을 상기하자.

(i) 먼저 $x \in A^\circ$이고 $x \in B^\circ$인 경우: $x \in A^\circ$이므로 $x \in U \subset A$를 만족하는 열린집합 U가 존재하여 $x \in U \subset A \cup B$를 만족한다. 따라서 $x \in (A \cup B)^\circ$이므로 $x \notin \partial(A \cup B)$이다.

(ii) $x \in A^\circ$이고 $x \in e(B)$인 경우: $x \in A^\circ$이므로 $x \in U \subset A$를 만족하는 열린집합 U가 존재하여 $x \in U \subset A \cup B$를 만족한다. 따라서 $x \in (A \cup B)^\circ$이므로 $x \notin \partial(A \cup B)$이다.

(iii) $x \in e(A)$이고 $x \in B^\circ$인 경우: $x \in B^\circ$이므로 $x \in V \subset B$를 만족하는 열린집합 V가 존재하여 $x \in V \subset A \cup B$를 만족한다. 따라서 $x \in (A \cup B)^\circ$이므로 $x \notin \partial(A \cup B)$이다.

(iv) $x \in e(A)$이고 $x \in e(B)$인 경우: 먼저 $x \in e(A) = (A^c)^\circ$이므로 $x \in U \subset A^c$를 만족하는 열린집합 U가 존재한다. 그리고 $x \in e(B) = (A^c)$이므로 $x \in V \subset B^c$를 만족하는 열린집합 V가 존재한다. 그러면 $W = U \cap V$는 x의 열린근방으로서

$$x \in W = U \cap V \subset A^c \cap B^c = (A \cup B)^c$$

이므로 $x \in e(A \cup B)$가 되어 $x \notin \partial(A \cup B)$이다.

따라서 $\partial(A \cup B) \subset \partial A \cup \partial B$이다.

(8) $X = \mathbb{R}$를 유클리드 공간이라 하자.

(보기 1) $A = [1,2]$, $B = [0,3]$이라 하자. 그러면 $A \subset B$이다. 하지만 $\partial(A) = \overline{A} - A^\circ = [1,2] - (1,2) = \{1,2\}$이고, $\partial(B) = \overline{B} - B^\circ = [0,3] - (0,3) = \{0,3\}$이므로 $\partial(A) \not\subset \partial(B)$이다.

(보기 2) $A = \mathbb{Q}$, $B = \mathbb{R}$이라 하자. 그러면 $A \subset B$이다. 하지만 $\partial(A) = \overline{\mathbb{Q}} \cap \overline{\mathbb{Q}^c} = \mathbb{R} \cap \mathbb{R} = \mathbb{R}$이고, $\partial(B) = \overline{\mathbb{R}} \cap \overline{\varnothing} = \mathbb{R} \cap \varnothing = \varnothing$이므로 $\partial(A) \not\subset \partial(B)$이다.

(보기 3) $A = [0,1] \cap \mathbb{Q}$, $B = [0,1]$이라 하자. 그러면 $A \subset B$이다. 하지만 $\partial(A) = \overline{A} \cap \overline{A^c} = [0,1] \cap \mathbb{R} = [0,1]$이고, $\partial(B) = \overline{B} \cap \overline{B^c} = [0,1] \cap ((-\infty,0] \cup [1,\infty)) = \{0,1\}$이므로 $\partial(A) \not\subset \partial(B)$이다.

문제 4.2.31. $\mathscr{B} = \{B_n\}_{n \in J}$을 X의 가산기저라 하자. 단, 여기서 J는 가산집하이다. 우리는 모든 B_n이 공집합이 아니라 가정 할 수 있다. (왜냐하면 $\mathscr{B}$가 기저이면 $\mathscr{B} - \{\varnothing\}$도 기저가 된다.) 각각의 $n \in J$에 대하여 한 점 $x_n \in B_n$을 택하여 $A = \{x_n \mid n \in J\}$은 X의 가산 부분집합이다. 이제 A가 X의 조밀한 부분집합임을 보이자. 임의의 점 $x \in X$와 x의 임

의의 열린근방 U에 대하여 $x \in B_n \subset U$를 만족하는 기저의 원소 $B_n \in \mathscr{B}$가 존재한다. 그리고 $x_n \in B_n \cap A \subset U \cap A$이므로 $U \cap A \neq \varnothing$이다. 그래서 $x \in \overline{A}$이다. 따라서 $\overline{A} = X$이다.

문제 4.2.33. 먼저 $A \cap D = \varnothing$인 조밀한 부분집합 D가 존재한다고 가정하자. 그러면 $A \subset D^c$이므로

$$A^\circ \subset (D^c)^\circ = (\overline{D})^c = X^c = \varnothing$$

이 되어 $A^\circ = \varnothing$이다.

역으로 $A^\circ = \varnothing$이라 가정하자. 그러면 $\overline{A^c} = (A^\circ)^c = \varnothing^c = X$이므로 A^c는 조밀한 부분집합이고 $A \cap A^c = \varnothing$이다.

문제 4.2.35. (1) $x \in U$라 하자. 임의의 x의 열린근방 V에 대하여 $U \cap V$도 x의 열린근방이 된다. 그리고 $x \in X = \overline{A}$이므로 $A \cap (U \cap V) \neq \varnothing$이다. 따라서 $(A \cap U) \cap V \neq \varnothing$이므로 $x \in \overline{A \cap U}$이다. 그러므로 $U \subset \overline{A \cap U}$이다.

(2) (1)에 의해 $U \subset \overline{A \cap U}$이므로 $\overline{U} \subset \overline{A \cap U}$이 성립한다. 역으로 $A \cap U \subset U$이므로 $\overline{A \cap U} \subset \overline{U}$이 성립한다. 따라서 $\overline{U} = \overline{A \cap U}$이다.

문제 4.2.37. 먼저 $\overline{A} = \mathrm{cl}_X(A)$, $\overline{B} = \mathrm{cl}_X(B)$임을 유의하자.

(a)⇒(b) 만약 A가 부분공간 B의 조밀한 부분집합이면 $\mathrm{cl}_B(A) = B$이다. 그리고 $B = \mathrm{cl}_B(A) = B \cap \mathrm{cl}_X(A)$이므로 $B \subset \mathrm{cl}_X(A) = \overline{A}$이다.

(b)⇒(a) 만약 $B \subset \overline{A}$이면

$$\mathrm{cl}_B(A) = B \cap \mathrm{cl}_X(A) = B \cap \overline{A} = B$$

이므로 A는 부분공간 B의 조밀한 부분집합이다.

문제 4.2.39.

(1) 만약 $A \subset B$이면 $B = A \cup (B - A)$이므로 (iii)에 의해 $\kappa(B) = \kappa(A \cup (B - A)) = \kappa(A) \cup \kappa(B - A)$이다. 따라서 $\kappa(A) \subset \kappa(B)$이다.

(2) (t1) 먼저 (i)에 의해 $\kappa(\varnothing^c) \supset \varnothing^c = X$이다. 그리고 $\kappa(\varnothing^c) \in \mathcal{P}(X)$이므로 $\kappa(\varnothing^c) \subset X = \varnothing^c$이다. 따라서 $\kappa(\varnothing^c) = \varnothing^c$이 되어 $\varnothing \in \mathscr{T}_k$이다.

한편 (iv)에 의해 $\kappa(X^c) = \kappa(\varnothing) = \varnothing = X^c$이므로 $X \in \mathscr{T}_\kappa$이다.

(t2) 주어진 $U_\alpha \in \mathscr{T}_\kappa (\alpha \in \Lambda)$에 대해 $W = \cup_{\alpha \in \Lambda} U_\alpha$이라 하자. 먼저 (i)에 의해 $\kappa(W^c) \supset W^c$이다. 그리고 모든 $\alpha \in \Lambda$에 대해 $W^c \subset U_\alpha^c$이므로 (1)에 의해 $\kappa(W^c) \subset \kappa(U_\alpha^c) = U_\alpha^c$ $(\forall \alpha \in \Lambda)$이다. 따라서

$$\kappa(W^c) \subset \cap_{\alpha \in \Lambda} U_\alpha^c = (\cup_{\alpha \in \Lambda} U_\alpha)^c = W^c$$

이다. 그러므로 $\kappa(W^c) = W^c$이 되어 $W \in \mathscr{T}_\kappa$이다.

(t3) $U, V \in \mathscr{T}_\kappa$이면 (iii)에 의해

$$\kappa((U \cap V)^c) = \kappa(U^c \cup V^c) = \kappa(U^c) \cup \kappa(V^c) = U^c \cup V^c = (U \cap V)^c$$

이므로 $U \cap V \in \mathscr{T}_\kappa$이다.

(3) A를 X의 부분집합이라 하자. (ii)에 의해 $\kappa(\kappa(A)) = \kappa(A)$이므로 $\kappa(A)^c \in \mathscr{T}_\kappa$이 되어 $\kappa(A)$는 $(X, \mathscr{T}_\kappa)$의 닫힌집합이다. 그리고 만약 C가 $A \subset C \subset X$인 $(X, \mathscr{T}_\kappa)$의 닫힌집합이면 $\kappa(C) = C$이고, $\kappa(A) \subset \kappa(C) = C$이다. 따라서 $\kappa(A)$는 A를 포함하는 가장작은 닫힌집합이므로 $\mathrm{cl}_{\mathscr{T}_\kappa}(A) = \kappa(A)$이다.

(4) 만약 $U \in \mathscr{T}$이면 U^c는 $(X, \mathscr{T})$의 닫힌집합이다. 그래서 $\kappa(U^c) = \mathrm{cl}_{\mathscr{T}}(U^c) = U^c$이므로 $U \in \mathscr{T}_\kappa$이다.

역으로 만약 $U \in \mathscr{T}_\kappa$이면 $\kappa(U^c) = U^c$이므로 $\mathrm{cl}_{\mathscr{T}}(U^c) = \kappa(U^c) = U^c$이다. 그래서 U^c이 $(X, \mathscr{T})$의 닫힌집합이므로 $U \in \mathscr{T}$이다.

(5) (ii)에 의해 모든 $A \subset X$에 대해 $\kappa(A)$는 $(X, \mathscr{T}_\kappa)$의 닫힌집합이다. 그런데 κ가 항등함수이므로 $\kappa(A) = A$이다. 그러므로 모든 부분집합이 닫힌집합이므로 모든 부분집합이 열린집합이 된다. 따라서 $\mathscr{T}_\kappa$는 이산위상이다.

문제 4.2.41.

(1) (b1) 임의의 실수 $x \in \mathbb{R}$에 대해 $(x-1, \infty) \in \mathscr{B}$이 존재하여 $x \in (x-1, \infty)$을 만족한다.

(b2) $x \in (a, \infty) \cap (b, \infty)$이라 하자. 그리고 $c = \max\{a, b\}$이라 하면 $x \in (c, \infty) \subset (a, \infty) \cap (b, \infty)$이고 $(c, \infty) \in \mathscr{B}$이다.

(2) 정의에 의해 $\overline{A}_r = (-\infty, r]$이다. 그리고 $(a, \infty) \subset \overline{A}_r$을 만족하는 기저의 원소 $(a, \infty) \in \mathscr{B}$가 존재하지 않으므로 $(\overline{A}_r)^\circ = \varnothing$이다.

4.3 수열의 수렴성과 극한점

문제 4.3.1. 보기 4.3.4에 의하여 수열 $x_n = \frac{1}{n}$은 모든 실수로 수렴한다.

문제 4.3.3. (주장) $x_n \to a \quad \Leftrightarrow \quad \exists n_0 \text{ s.t. } x_{n_0} = x_{n_0+1} = x_{n_0+2} = \cdots = a$:

먼저 $x_n \to a$라 하자. $\{a\}$이 a의 열린근방이므로

$$\exists n_0 \text{ s.t. } n \geq n_0 \Rightarrow x_n \in \{a\}$$

이다. 이러한 n_0에 대해 $x_{n_0} = x_{n_0+1} = x_{n_0+2} = \cdots = a$이다.

역으로 $x_{n_0} = x_{n_0+1} = x_{n_0+2} = \cdots = a$이라 하자. 이제 임의의 a의 열린근방 U에 대하여 $n \geq n_0 \Rightarrow x_n = a \in U$이므로 $x_n \to a$이다.

문제 4.3.5. (1) 임의의 0의 열린근방 U에 대하여 $0 \in [a,b) \subset U$인 기저의 원소 $[a,b)$가 존재하여 $a \leq 0 < b$이다. 이제 $\frac{1}{2m} < b$인 짝수 $2m$을 택하면 $\frac{(-1)^2 m}{2m} = \frac{1}{2m} \in A \cap [a,b) - \{0\} \subset A \cap U - \{0\}$이므로 $A \cap U - \{0\} \neq \varnothing$이다. 따라서 $0 \in A'$이다.

(2) $[0,1)$은 0의 열린근방이지만,

$$\nexists n_0 \ \text{s.t.}\ n \geq n_0 \Rightarrow \frac{(-1)^n}{n} \in [0,1)$$

이므로 $\frac{(-1)^n}{n} \nrightarrow 0$이다.

문제 4.3.7. 먼저 $\{x_n\}$이 A상에서 점 x로 수렴한다고 가정하자. 만약 U가 x를 포함하는 X의 열린집합이면 $A \cap U$는 x를 포함하는 A의 열린집합이다. 가정에 의해

$$n \geq m \Rightarrow x_n \in A \cap U$$

을 만족하는 자연수 m이 존재한다. 그리고 $A \cap U \subset U$이므로 이러한 m에 대해

$$n \geq m \Rightarrow x_n \in U$$

이다. 따라서 $\{x_n\}$이 X상에서 점 x로 수렴한다.

역으로 $\{x_n\}$이 X상에서 점 x로 수렴한다 가정하자. 만약 V가 x를 포함하는 A의 열린집합이면 $V = A \cap U$인 X의 열린집합 U가 존재한다. 그러면 U가 x를 포함하는 X의 열린집합이므로 가정에 의해

$$n \geq m \Rightarrow x_n \in U$$

을 만족하는 자연수 m이 존재한다. 그런데 $x_n \in A (\forall n)$이므로

$$n > m \Rightarrow x_n \in A \cap U = V$$

이다. 따라서 $\{x_n\}$이 A상에서 점 x로 수렴한다.

제 5 장

연속사상

5.1 연속사상(continuous map)

문제 5.1.1. 가정에 의해 임의의 부분집합 $A \subset X$에 대하여 특성함수

$$\chi_A \colon X \to \mathbb{R}, \quad \chi_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \in A^c \end{cases}$$

는 연속이다. 그리고 $(0,2)$가 $\mathbb{R}$의 열린집합이므로 $A = \chi_A^{-1}((0,2))$는 X의 열린집합이다. 따라서 모든 X의 부분집합이 열린집합이므로 X는 이산공간이다.

문제 5.1.3. (귀류법) 상수사상이 아닌 연속사상 $f \colon X \to \mathbb{R}$이 존재한다고 가정하자. 그러면 $f(X)$는 두 점이상으로 이루어진 집합이므로 서로 다른 두 점 $a, b \in f(X)$가 존재한다. 우리는 일반성을 잃지않고 $a < b$라 할 수 있다. 그리고 $a < c < b$인 실수 $c \in \mathbb{R}$을 택하자. 그러면 $(-\infty, c)$와 (c, ∞)이 $\mathbb{R}$의 열린집합이므로 $f^{-1}((-\infty, c))$와 $f^{-1}((c, \infty))$는 공집합이 아닌 X의 열린집합들이다. 따라서 $[f^{-1}((-\infty, c))]^c$와 $[f^{-1}((c, \infty))]^c$은 유한집합이다. 그런데

$$\begin{aligned} [f^{-1}((c,\infty))]^c \cup [f^{-1}((-\infty,c))]^c &= f^{-1}((c,\infty)^c) \cup f^{-1}((-\infty,c)^c) \\ &= f^{-1}((-\infty,c]) \cup f^{-1}([c,\infty)) \\ &= f^{-1}((-\infty,c] \cup [c,\infty)) \\ &= f^{-1}(\mathbb{R}) = X \end{aligned}$$

이므로 X는 유한집합이다. 이는 X가 무한집합이라는 가정에 모순이다.

따라서 연속사상 $f \colon (X, \mathscr{T}_f) \to \mathbb{R}$는 상수사상 뿐이다.

문제 5.1.5. (a)⇒(b) 임의로 주어진 양의 실수 ε에 대하여 $B_d(h(p), \varepsilon)$이 $h(p)$의 열린근방이다. 그리고 (a)에 의해 h가 점 p에서 연속이므로 $p \in U \subset h^{-1}(B_d(h(p), \varepsilon))$를 만족하

는 p의 열린근방 U가 존재한다. 이제 U가 조건 (b)를 만족함을 보이자: 만약 $x \in U$이면 $x \in h^{-1}(B_d(h(p),\varepsilon))$이므로 $h(x) \in B_d(h(p),\varepsilon)$이 되어 $d(h(x),h(p)) < \varepsilon$이다.

(b)⇒(a) $h(p)$의 임의의 열린근방 V에 대하여 $h(p) \in B(h(p),\varepsilon) \subset V$를 만족하는 양의 실수 ε이 존재한다. 그러면 (b)에 의해

$$x \in U \;\Rightarrow\; d(h(x),h(p)) < \varepsilon$$

을 만족하는 p의 열린근방 U가 존재한다.

이제 $U \subset h^{-1}(V)$임을 보이자: 만약 $x \in U$이면 $d(h(x),h(p)) < \varepsilon$이므로 $h(x) \in B_d(h(p),\varepsilon) \subset V$이 되어 $x \in h^{-1}(V)$이다.

문제 5.1.7. 항등사상 $k\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $k(x) = x$가 연속이므로 문제 5.1.6에 의해 다항함수

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n = a_0 + a_1k(x) + a_2k(x)k(x) + \cdots + a_nk(x)\cdots k(x)$$

도 연속이다.

문제 5.1.9. 귀류법을 사용하여 f가 상수사상임을 보이자: 만약 상수사상이 아닌 연속사상 $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}_l$가 존재한다고 가정하자. 그러면 f의 상(image) $f(\mathbb{R})$은 두 점 이상으로 이루어진 집합이다. 이제 서로 다른 두 점 $a, b \in f(\mathbb{R})$를 택하자. 우리는 일반성을 잃지 않고 $a < b$라 할 수 있다. 그러면 $[a,b)$는 $\mathbb{R}_l$의 열린집합인 동시에 닫힌집합이다. 그리고 f가 연속이므로 $f^{-1}([a,b))$은 $\mathbb{R}$의 열린집합인 동시에 닫힌집합이다. 한편 $a,b \in f(\mathbb{R})$이므로 $f^{-1}([a,b))$은 $\varnothing$도 아니고 $\mathbb{R}$도 아니다. 이는 성질 2.2.15에 모순이다. 따라서 연속사상 $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}_l$은 상수사상 뿐이다.

문제 5.1.11. (1) $\{0\}$이 $\mathbb{R}$의 닫힌집합이고 g가 연속이므로 $g^{-1}(\{0\})$은 X의 닫힌집합이다. 따라서 $g^{-1}(\{0\}) = \{x \in X \mid g(x) = 0\}$는 X의 닫힌집합이다.

(2) f, g가 연속이므로 문제 5.1.6에 의해 $h = g - f\colon X \to \mathbb{R}$, $h(x) = g(x) - f(x) = g(x) + (-1)f(x)$도 연속이다. 그리고 $[0,\infty)$이 $\mathbb{R}$의 닫힌집합이므로 $h^{-1}([0,\infty)) = \{x \in X \mid f(x) \le g(x)\}$는 X의 닫힌집합이다.

(3) f, g가 연속이므로 문제 5.1.6에 의해 $h = g - f\colon X \to \mathbb{R}$, $h(x) = g(x) - f(x)$도 연속이다. 그리고 $(0,\infty)$이 $\mathbb{R}$의 열린집합이므로 $h^{-1}((0,\infty)) = \{x \in X \mid f(x) < g(x)\}$는 X의 열린집합이다.

(4) 문제 5.1.6에 의해 $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $h(x) = f(x) - x$는 연속이다. 그리고 $\{0\}$이 $\mathbb{R}$의 닫힌 집합이므로 $g^{-1}(\{0\}) = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) = x\}$는 $\mathbb{R}$의 닫힌집합이다.

(5) 집합 $X = \{x, y, z\}$에 위상 $\mathscr{T} = \{\varnothing, \{x\}, \{y,z\}, X\}$를 주자. 그러면 상수사상 $f\colon X \to X$, $f(x) = f(y) = f(z) = y$은 연속이다. 그런데 고정점 집합 $\{x \in X \mid f(x) = x\} = \{y\}$는 X의 닫힌집합이 아니다.

문제 5.1.13. 임의로 주어진 점 $x \in X$와 양의 실수 $\varepsilon > 0$에 대하여 $\delta = \frac{\varepsilon}{\alpha}$라 하자. 그러면

$$d_X(x,y) < \delta \ \Rightarrow\ d_Y(f(x), f(y)) < \alpha d_X(x,y) < \alpha\delta = \alpha\frac{\varepsilon}{\alpha} = \varepsilon$$

이다. 따라서 정리 5.1.21에 의해 f는 연속이다.

문제 5.1.15. (1) 다항함수 $h\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $h(x,y) = x$는 연속이다. 그러므로 h의 축소사상 $f\colon X \to \mathbb{R}$도 연속이다.

(2) 먼저 각각의 자연수 n에 대해 $x_n = \frac{1}{(2n+\frac{1}{2})\pi}$이라 하자. 그러면 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$이지만,

$$\lim_{n\to\infty} g(x_n) = \lim_{n\to\infty}(x_n, 1) = (0,1) \neq (0,0) = g(0)$$

이므로 g는 점 $x = 0$에서 연속이 아니다. 따라서 g는 연속사상이 아니다.

문제 5.1.17. $f = f|_A \cup f|_B$이므로 붙임 보조정리에 의해 f는 연속이다.

문제 5.1.19. $V = (\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$는 $\mathbb{R}$의 열린집합이지만 $f^{-1}(V) = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \cup [1, \sqrt{\frac{3}{2}})$은 $\mathbb{R}$의 열린집합이 아니다. 따라서 f는 연속이 아니다.

문제 5.1.21. (i) 먼저 f가 점 $x = 0$에서 연속임을 보이자. 임의로 주어진 양의 실수 ε에 대하여 $\delta = \varepsilon$이라 하면

$$|x - 0| < \delta \ \Rightarrow\ |f(x) - f(0)| = |f(x) - 0| \leq |x - 0| < \delta = \varepsilon$$

를 만족하므로 f는 점 $x = 0$에서 연속이다.

(ii) 이제 점 $x \neq 0$에서 f가 연속이 아님을 보이자. 주어진 x에 대하여 $\varepsilon = \frac{|x|}{2} > 0$이라 하자. 그리고 임의의 양의 실수 δ에 대하여 $r = \min\{\delta, \frac{|x|}{2}\}$이라 하자. 그러면 $p, q \in (x - r, x + r)$인 $p \in \mathbb{Q}$와 $q \in \mathbb{Q}^c$가 존재한다.

- $x \in \mathbb{Q}$인 경우 : $|q - x| < r \leq \delta$이지만, $|f(q) - f(x)| = |0 - x| = |x| > \frac{|x|}{2} = \varepsilon$이다.
- $x \in \mathbb{Q}^c$인 경우 : $|p - x| < r \leq \delta$이지만, $|f(p) - f(x)| = |p - 0| = |p| > \frac{|x|}{2} = \varepsilon$이다.

따라서 주어진 점 $x \neq 0$와 $\varepsilon = \frac{|x|}{2} > 0$에 대하여

$$|y - x| < \delta \ \Rightarrow\ |f(y) - f(x)| < \varepsilon$$

을 만족하는 양수 δ가 존재하지 않는다.

문제 5.1.23. 문제 5.1.22에 의해 우리는

$$\mathscr{T}_Y = \{V \subset Y \mid \varphi^{-1}(V) \subset \mathbb{R} \text{ 열린집합}\}$$

를 찾으면 된다.

(i) 먼저 $\varphi^{-1}(\{a\}) = (2,\infty)$, $\varphi^{-1}(\{c\}) = (-1,2)$는 $\mathbb{R}$의 열린집합이므로 $\{a\},\{c\} \in \mathscr{T}_Y$이다. 그러나 $\varphi^{-1}(\{b\}) = \{2\}$, $\varphi^{-1}(\{d\}) = (-\infty,-1]$는 $\mathbb{R}$의 열린집합이 아니므로 $\{b\},\{d\} \notin \mathscr{T}_Y$이다.

(ii) $\varphi^{-1}(\{a,c\}) = (-1,2) \cup (2,\infty)$, $\varphi^{-1}(\{c,d\}) = (-\infty,2)$는 $\mathbb{R}$의 열린집합이므로 $\{a,c\},\{c,d\} \in \mathscr{T}_Y$이다.

(iii) $\varphi^{-1}(\{a,b,c\}) = (-1,\infty)$, $\varphi^{-1}(\{a,c,d\}) = (-\infty,2) \cup (2,\infty)$도 $\mathbb{R}$의 열린집합이므로 $\{a,b,c\},\{a,c,d\} \in \mathscr{T}_Y$이다.

(iv) $\varphi^{-1}(\{a,b,c,d\}) = \mathbb{R}$이 $\mathbb{R}$의 열린집합이므로 $\{a,b,c,d\} \in \mathscr{T}_Y$이다.

(v) 특별히 $\varphi^{-1}(\{e\}) = \varnothing$, $\varphi^{-1}(\{f\}) = \varnothing$, $\varphi^{-1}(\{e,f\}) = \varnothing$는 $\mathbb{R}$의 열린집합이므로 $\{e\},\{f\},\{e,f\} \in \mathscr{T}_Y$이다.

(vi) 따라서

$$\begin{aligned}\mathscr{T}_Y = \{ \quad & \varnothing,\{e\},\{f\},\{e,f\},\\ & \{a\},\{a,e\},\{a,f\},\{a,e,f\},\\ & \{c\},\{c,e\},\{c,f\},\{c,e,f\},\\ & \{a,c\},\{a,c,d\},\{a,c,e\},\{a,c,f\},\{a,c,e,f\},\\ & \{c,d\},\{c,d,e\},\{c,d,f\},\{c,d,e,f\},\\ & \{a,b,c\},\{a,b,c,e\},\{a,b,c,f\},\{a,b,c,e,f\},\\ & \{a,b,c,d\},\{a,b,c,d,e\},\{a,b,c,d,f\},Y \qquad \}\end{aligned}$$

이다.

문제 5.1.25. (1) $\mathscr{T}'$은 집합 X상의 위상이 된다:

(i) $\varnothing, Y \in \mathscr{T}$이므로 $\varnothing = f^{-1}(\varnothing)$, $X = f^{-1}(Y) \in \mathscr{T}'$이다.

(ii) 만약 $V_\alpha \in \mathscr{T}'(\alpha \in \Lambda)$이면 모든 α에 대해 $V_\alpha = f^{-1}(U_\alpha)$를 만족하는 $U_\alpha \in \mathscr{T}$가 존재한다. 그리고 $\cup_{\alpha\in\Lambda} U_\alpha \in \mathscr{T}$이므로

$$\cup_{\alpha\in\Lambda} V_\alpha = \cup_{\alpha\in\Lambda} f^{-1}(U_\alpha) = f^{-1}(\cup_{\alpha\in\Lambda} U_\alpha) \in \mathscr{T}'$$

이다.

(iii) 만약 $V_1,\ldots,V_n \in \mathscr{T}'$이면 $V_i = f^{-1}(U_i)$를 만족하는 $U_i \in \mathscr{T}$가 존재한다. 그리고 $\cap_{i=1}^n U_i \in \mathscr{T}$이므로

$$\cap_{i=1}^n V_i = \cap_{i=1}^n f^{-1}(U_i) = f^{-1}(\cap_{i=1}^n U_i) \in \mathscr{T}'$$

이다.

(2) $f\colon (X,\mathscr{T}') \to (Y,\mathscr{T})$이 연속이다: 임의의 $U \in \mathscr{T}$에 대하여 $f^{-1}(U) \in \mathscr{T}'$이므로 f는 연속이다.

(3) 이제 최소성을 보이자. 집합 X상의 위상 $\mathscr{T}''$에 대하여 $f\colon (X,\mathscr{T}'') \to (Y,\mathscr{T})$가 연속

이라 하자. 만약 $V \in \mathscr{T}'$이면 $\mathscr{T}'$의 정의에 의해 $V = f^{-1}(U)$를 만족하는 $U \in \mathscr{T}$가 존재한다. 그리고 $f\colon (X, \mathscr{T}'') \to (Y, \mathscr{T})$가 연속이므로 $V = f^{-1}(U) \in \mathscr{T}''$이다. 따라서 $\mathscr{T}' \subset \mathscr{T}''$이다. 그러므로 $\mathscr{T}'$은 f가 연속이 되게 하는 집합 X상의 가장 작은 위상이다.

문제 5.1.27. 먼저 항등사상 $\mathrm{id}\colon (X, \mathscr{T}_1) \to (X, \mathscr{T}_2)$이 연속이라 하자. 그러면 임의의 $U \in \mathscr{T}_2$에 대해 $\mathrm{id}^{-1}(U) \in \mathscr{T}_1$이고, $\mathrm{id}^{-1}(U) = U$이므로 $U \in \mathscr{T}_1$이다. 따라서 $\mathscr{T}_2 \subset \mathscr{T}_1$이다.

역으로 $\mathscr{T}_2 \subset \mathscr{T}_1$이라 하자. 그러면 임의의 $U \in \mathscr{T}_2$에 대하여 $\mathrm{id}^{-1}(U) = U \in \mathscr{T}_1$이므로 항등사상 $\mathrm{id}\colon (X, \mathscr{T}_1) \to (X, \mathscr{T}_2)$은 연속이다.

문제 5.1.29. (1) f는 점 a에서 연속임을 보이자: $f(a) = b$의 임의의 열린근방 V에 대하여 $a \in f^{-1}(V)$이다. 그리고 a의 열린근방 $\{a\}$이 존재하여 $a \in \{a\} \subset f^{-1}(V)$를 만족한다. 따라서 f는 점 a에서 연속이다.

(2) 이제 f가 점 c에서 연속이 아님을 보이자: $f(c) = b$의 열린근방 $\{b\}$에 대하여 $c \in U \subset f^{-1}(\{b\}) = \{a, c\}$을 만족하는 c의 열린근방 U가 존재하지 않는다. 따라서 f는 점 c에서 연속이 아니다.

문제 5.1.31. (1) (i) $X, X^c \in \mathscr{T}$이므로 $X \in \mathscr{B}_*$이다. 따라서 $\cup_{B \in \mathscr{B}_*} B = X$이다.

(ii) 임의의 $B_1, B_2 \in \mathscr{B}_*$와 $x \in B_1 \cap B_2$에 대하여 $B_1, B_1^c, B_2, B_2^c \in \mathscr{T}$이므로 $B_1 \cap B_2 \in \mathscr{T}$이고 $(B_1 \cap B_2)^c = B_1^c \cup B_2^c \in \mathscr{T}$이다. 따라서 $B_3 = B_1 \cap B_2 \in \mathscr{B}_*$이고 $x \in B_3 = B_1 \cap B_2 \subset B_1 \cap B_2$를 만족한다.

따라서 $\mathscr{B}_*$는 집합 X상의 기저이다.

(2) F가 $(X, \mathscr{T}_*)$의 닫힌집합이므로 F^c은 $(X, \mathscr{T}_*)$의 열린집합이다. 그리고 $p \in F^c$이므로 $p \in B \subset F^c$을 만족하는 $B \in \mathscr{B}_*$가 존재한다. $\mathscr{B}_*$의 정의에 의해 $B^c \in \mathscr{B}_*$이다. 따라서 $B, B^c \in \mathscr{T}_*$이므로 B, B^c은 $(X, \mathscr{T}_*)$의 열린집합이다. 이제 함수 $f\colon (X, \mathscr{T}_*) \to \mathbb{R}$를

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in B \\ 1, & x \notin B \end{cases}$$

으로 정의 하자. 그러면 $p \in B$이므로 $f(p) = 0$이고, $F \subset B^c$이므로 $f(F) = 1$이다. 이제 f가 연속임을 보이자. 임의의 $\mathbb{R}$의 열린집합 U에 대하여

$$f^{-1}(U) = \begin{cases} \varnothing, & 0, 1 \notin U \\ B, & 0 \in U, 1 \notin U \\ B^c, & 0 \notin U, 1 \in U \\ X, & 0, 1 \in U \end{cases}$$

이고 $B, B^c \in \mathscr{T}_*$이므로 $f^{-1}(U)$은 $(X, \mathscr{T}_*)$의 열린집합이다. 따라서 f는 연속이다.

문제 5.1.33. (1) (방법 1) A를 거리공간 $X = (X, d)$의 수축이라 하자. 그러면 수축사상 $r\colon X \to A$이 존재한다. 이제 A가 X의 닫힌집합임을 보이자. 만약 $x \in \overline{A}$이면 각각의 자연수 $n \in \mathbb{N}$에 대해 $B_d(x, \frac{1}{n}) \cap A \neq \varnothing$이므로 점 $a_n \in B_d(x, \frac{1}{n}) \cap A$이 존재한다. 그리고 $a_n \to x$이고 r이 연속이므로 기초정리 5.1.28에 의해 $r(a_n) \to r(x)$이다. 그런데 $a_n \in A$이므로 $r(a_n) = a_n$이 되어 $a_n \to r(x)$이다. 참고 4.3.9에 의해 거리공간상의 수렴하는 수열은 유일한 극한을 가지므로 $x = r(x) \in A$이다. 따라서 $\overline{A} \subset A$이므로 A는 X의 닫힌집합이다.

(방법 2) A를 거리공간 $X = (X, d)$의 수축이라 하자. 그러면 수축사상 $r\colon X \to A$이 존재한다. 이제 A가 X의 닫힌집합임을 귀류법을 이용하여 보이자. 만약 A가 X의 닫힌집합이 아니라고 가정하면 $\overline{A} \neq A$이다. 따라서 점 $x \in \overline{A} - A$가 존재하고, $r(x) \neq x$이다. 이제 $r = d(x, r(x))$이라 하면 $U = B_d(x, \frac{r}{2})$, $V = B_d(r(x), \frac{r}{2})$는 서로소인 열린집합이다. 그리고 $r^{-1}(V)$이 x의 열린근방이므로 $U^* = U \cap r^{-1}(V)$도 x의 열린근방이고 $r(U^*) \subset V$, $U^* \cap V = \varnothing$이다. 그런데 $x \in \overline{A}$이므로 점 $a \in U^* \cap A$가 존재하여 $a = r(a) \in r(U^*) \subset V$이 되어 $a \in U^* \cap V$이다. 이는 $U^* \cap V = \varnothing$에 모순이다.

(2) (귀류법) 두 점 집합 $A = \{p, q\}$가 $\mathbb{R}$의 수축이라 가정하자. 그리고 $r\colon \mathbb{R} \to A$을 수축사상이라 하자. 모든 $a \in A$에 대해 $r(a) = a$이므로 r은 전사인 연속사상이다. 한편 $\{p\}$, $\{q\}$가 닫힌집합이므로 $C = r^{-1}(\{p\})$, $D = r^{-1}(\{q\})$는 $\mathbb{R}$의 닫힌집합으로서

$$C \neq \varnothing,\ D \neq \varnothing,\ C \cap D = \varnothing,\ C \cup D = \mathbb{R}$$

를 만족한다. 따라서 $\mathbb{R}$의 열린집합인 동시에 닫힌집합인 $C(\neq \varnothing, \mathbb{R})$가 존재한다. 이는 성질 2.2.15에 모순이다.

(3) (귀류법) 두 점 집합 $A = \{\mathbf{p}, \mathbf{q}\}$가 $\mathbb{R}^2$의 수축이라 가정하자. 그리고 $r\colon \mathbb{R}^2 \to A$을 수축사상이라 하자. 이제 두 점 $\mathbf{p}$, $\mathbf{q}$을 잇는 직선을 L이라 하자. 즉

$$L = \{t\mathbf{p} + (1-t)\mathbf{q} \in \mathbb{R}^2 \mid t \in \mathbb{R}\}$$

이다. 그러면 $\mathbb{R}^2$의 부분공간 L에 대해 축소사상 $r|_L\colon L \to A$도 수축사상이 되어, A는 L의 수축이다. 한편 $\mathbf{p} = (a, b)$와 $\mathbf{q} = (c, d)$가 서로 다른 점이므로 우리는 $a \neq c$ 또는 $b \neq d$이다. 우리는 일반성을 잃지않고 $a \neq c$라 할 수 있다. 그리고 직선 L의 방정식을 $y = mx + n$이라 하고 $\pi_1\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $\pi_1(x, y) = x$를 사영사상이라 하자. 그러면 연속사상

$$f\colon \mathbb{R} \to L \to A \to \{a, c\},\quad x \mapsto (x, mx + n) \mapsto r(x, y) \mapsto \pi_1(r(x, y))$$

가 $f(a) = a$, $f(c) = c$이므로 f는 수축사상이다. 따라서 두 점 집합 $\{a, c\}$이 $\mathbb{R}$의 수축이다. 이는 (2)에 모순이다.

(4) 연속사상 $r\colon \mathbb{R}^2 - \{\mathbf{0}\} \to S^1$, $r(\mathbf{x}) = \frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|}$이 수축사상이다. 따라서 S^1은 $\mathbb{R}^2 - \{\mathbf{0}\}$의 수축이다.

(5) 만약 수축사상 $f\colon \mathbb{R}^2 \to S^1$이 존재하면 수축사상 $r = f|_{D^2}\colon D^2 \to S^1$이 존재한다.

이는 정리 17.5.4에 모순이다. 따라서 S^1은 $\mathbb{R}^2$의 수축이 아니다.

문제 5.1.35. (a)⇒(b) 만약 $S \in \mathcal{S}$이면 $\mathcal{S}$는 Y의 열린집합이다. 그리고 (a)에 의해 f가 연속이므로 $f^{-1}(S)$는 X의 열린집합이다.

(b)⇒(a) 임의의 Y의 기저의 원소 B에 대하여 $B = S_1 \cap \cdots \cap S_n$을 만족하는 부분기저의 원소 $S_1, \ldots, S_n \in \mathcal{S}$이 존재한다. 그리고 (b)에 의해 모든 $f^{-1}(S_i)$이 X의 열린집합이므로

$$f^{-1}(B) = f^{-1}(S_1) \cap \cdots \cap f^{-1}(S_n)$$

도 X의 열린집합이다. 따라서 성질 5.1.6에 의해 f는 연속이다.

5.2 위상동형사상(homeomorphism)

문제 5.2.1. 다음과 같은 16개이다.

x	a	b	c	d	e	f
$h_1(x)$	a	b	c	d	e	f
$h_2(x)$	a	b	c	d	f	e
$h_3(x)$	a	b	d	c	e	f
$h_4(x)$	a	b	d	c	f	e
$h_5(x)$	b	a	c	d	e	f
$h_6(x)$	b	a	c	d	f	e
$h_7(x)$	b	a	d	c	e	f
$h_8(x)$	b	a	d	c	f	e
$h_9(x)$	c	d	a	b	e	f
$h_{10}(x)$	c	d	a	b	f	e
$h_{11}(x)$	c	d	b	a	e	f
$h_{12}(x)$	c	d	b	a	f	e
$h_{13}(x)$	d	c	a	b	e	f
$h_{14}(x)$	d	c	a	b	f	e
$h_{15}(x)$	d	c	b	a	e	f
$h_{16}(x)$	d	c	b	a	f	e

문제 5.2.3. d^*를 $\mathbb{R}^2$ 상의 보통거리라 하자. 이제 $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$를 $f(x,y) = x + yi$로 정의하자. 그러면 f는 역함수 $f^{-1}(x+yi) = (x,y)$이 존재하므로 전단사이다. 이제 f가 위상동형사상임을 보이자.

먼저 임의의 점 $x + yi \in \mathbb{C}$와 양수 ε에 대하여 $f^{-1}(B_d(x+yi,\varepsilon)) = B_{d^*}((x,y),\varepsilon)$이므로 f는 연속이다.

한편 임의의 점 $(x,y) \in \mathbb{R}^2$와 양수 ε에 대하여 $f(B_{d^*}((x,y),\varepsilon)) = B_d(x+y_i,\varepsilon)$이므로 f는 열린사상이다. 따라서 f^{-1}은 연속이다.

문제 5.2.5. $X = \{-1\} \cup (0,1)$와 $Y = [-1,1)$을 유클리드공간 $\mathbb{R}$의 부분공간이라 하자.

먼저 $f\colon X \to Y$를 $f(x) = x$라 하면 f는 넣기사상이다. 그리고 $g\colon Y \to X$를 $g(x) = \frac{1}{4}x + \frac{3}{4}$라 하면 g도 넣기사상이 된다. 그러나 X와 Y는 위상동형이 아니다. 보다 구체적으로 만약 위상동형사상 $h\colon Y \to X$가 존재한다고 가정하면 $\{-1\} = (-2,0) \cap X$는 X의 열린집합이므로 $\{p\} = f^{-1}(\{-1\})$도 Y의 열린집합이 되어야 한다. 따라서 $\{p\} = U \cap Y$인 $\mathbb{R}$의 열린집합이 존재하고, $p \in (p-r,p+r) \subset U$인 양수 r도 존재한다. 그런데 $(p-r,p+r) \cap Y$는 무한집합이고, $(p-r,p+r) \cap Y \subset U \cap Y = \{p\}$이므로 모순이다. 따라서 Y와 X사이에는 위상동형사상이 존재하지 않는다.

문제 5.2.7. 우리는 $f\colon X \to f(X)$가 위상동형사상이 됨을 보여야 한다.

(i) $f\colon X \to f(X)$는 전단사이다: 자명하게 $f\colon X \to f(X)$는 전사이다. 그리고 만약 $f(x_1) = f(x_2)$이면 $d_Y(f(x_1), f(x_2)) = 0$이므로 $d_X(x_1,x_2) = 0$이 되어 $x_1 = x_2$이다. 따라서 f는 단사이다.

(ii) $f\colon X \to f(X)$는 연속이다: 임의의 $y \in f(X)$와 양수 r에 대해 유일한 $f(x) = y$인 $x \in X$가 존재하여

$$f^{-1}(B_{d_Y}(y,r) \cap f(X)) = f^{-1}(B_{d_Y}(y,r)) = B_{d_X}(x,r)$$

이므로 f는 연속이다.

(iii) $f\colon X \to f(X)$는 열린사상이다: 임의의 $x \in X$와 양수 r에 대해 $f(B_{d_X}(x,r)) = B_{d_Y}(f(x),r) \cap f(X)$이므로 f는 열린사상이다.

따라서 $f\colon X \to f(X)$는 위상동형사상이다.

문제 5.2.9. 참고 5.2.9(2)에 의하여 $f^{-1}(B)$를 포함하는 닫힌집합 $\overline{f^{-1}(B)}$에 대하여 $B \subset D$, $f^{-1}(D) \subset \overline{f^{-1}(B)}$를 만족하는 Y의 닫힌집합 D가 존재한다. 그런데 $B \subset \overline{B} \subset D$이므로 $f^{-1}(\overline{B}) \subset f^{-1}(D) \subset \overline{f^{-1}(B)}$이다.

문제 5.2.11. 먼저 id가 위상동형사상이라 하자. 임의의 $U \in \mathscr{T}_1$에 대해 id가 열린사상이므로 $U = \mathrm{id}(U) \in \mathscr{T}_2$이다. 따라서 $\mathscr{T}_1 \subset \mathscr{T}_2$이다. 그리고 임의의 $U \in \mathscr{T}_2$에 대해 id가 연속이므로 $U = \mathrm{id}^{-1}(U) \in \mathscr{T}_1$이다. 따라서 $\mathscr{T}_2 \subset \mathscr{T}_1$이다. 그러므로 $\mathscr{T}_1 = \mathscr{T}_2$이다.

역으로 $\mathscr{T}_1 = \mathscr{T}_2$이라 하자. 자명하게 id는 전단사이다. 그리고 임의의 $U \in \mathscr{T}_2$에 대해 $\mathrm{id}^{-1}(U) = U \in \mathscr{T}_2 = \mathscr{T}_1$이므로 id는 연속이다. 또한 임의의 $U \in \mathscr{T}_1$에 대해 $\mathrm{id}(U) = U \in \mathscr{T}_1 = \mathscr{T}_2$이므로 id는 열린사상이다. 따라서 id는 위상동형사상이다.

문제 5.2.13. 먼저 임의의 $V \in \mathscr{T}_Y$에 대해 f가 연속이므로 $f^{-1}(V) \in \mathscr{T}_X$이다. 따라서 $\{f^{-1}(V) \mid V \in \mathscr{T}_Y\} \subset \mathscr{T}_X$이다. 역으로 만약 $U \in \mathscr{T}_X$이면 f가 열린사상이므로 $V = f(U) \in$

$\mathscr{T}_Y$이다. 그리고 f가 전단사이므로 $U = f^{-1}(f(U)) = f^{-1}(V)$이다. 따라서 $\mathscr{T}_X \subset \{f^{-1}(V) \mid V \in \mathscr{T}_Y\}$이다.

$\mathscr{T}_Y = \{f(U) \mid U \in \mathscr{T}_X\}$도 비슷하게 보일 수 있다.

문제 5.2.15. (1) 함수 $f\colon M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^{n^2}$를

$$f((x_{ij})) = (x_{11}, x_{12}, \ldots, x_{1n}; x_{21}, x_{22}, \ldots, x_{2n}; \ldots; x_{n1}, \ldots, x_{nn})$$

로 정의하자. 그러면 임의의 (x_{ij}), $(y_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$에 대하여

$$\rho((x_{ij}),(y_{ij})) = \sqrt{\sum_{i,j=1}^{n} (x_{ij} - y_{ij})^2} = d(f((x_{ij})), f((y_{ij})))$$

이므로 f는 등거리 사상이다. 단, 여기서 d는 $\mathbb{R}^{n^2}$ 상의 보통거리이다. 그리고 자명하게 f는 전사이므로 문제 5.2.7에 의해 f는 위상동형사상이고, $(M_n(\mathbb{R}), \rho) \cong \mathbb{R}^{n^2}$이다.

(2) 먼저 함수 $h\colon \mathbb{R}^{n^2} \to \mathbb{R}$를

$$h((x_{11}, x_{12}, \ldots, x_{1n}; \ldots; x_{n1}, \ldots, x_{nn})) = \sum_{\sigma} sgn(\sigma) x_{1\sigma(1)} x_{2\sigma(2)} \cdots x_{n\sigma(n)}$$

로 정의하면 h가 다항함수이므로 h는 연속이다. 그리고 f를 (1)의 위상동형사상이라 하면 $\det = h \circ f\colon M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$이므로 $\det$는 연속이다.

(3) $\det$이 연속이고, $\mathbb{R} - \{0\}$이 $\mathbb{R}$의 열린집합이므로 $GL_n(\mathbb{R}) = \det^{-1}(\mathbb{R} - \{0\})$은 $(M_n(\mathbb{R}), \rho)$의 열린집합이다.

(4) $\det$이 연속이고, $\{1\}$이 $\mathbb{R}$의 닫힌집합이므로 $SL_n(\mathbb{R}) = \det^{-1}(\{1\})$은 $(M_n(\mathbb{R}), \rho)$의 닫힌집합이다.

문제 5.2.17. $\mathbb{R}$을 유클리드 공간이라 하고 $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$를 항등사상 $f(x) = x$라 하자. 그러면 f는 열린사상이다. 그러나 부분공간 $A = [0, \infty) \subset \mathbb{R}$에 대한 축소사상 $f|_A\colon [0, \infty) \to \mathbb{R}$은 열린사상이 아니다. 구체적으로 $[0, 1)$은 $A = [0, \infty)$의 열린집합이지만, $f|_A([0, 1)) = [0, 1)$은 $\mathbb{R}$의 열린집합이 아니다.

문제 5.2.19. 만약 C가 부분공간 A의 닫힌집합이면 A가 X의 닫힌집합이므로 C는 X의 닫힌집합도 된다. 그리고 $f\colon X \to Y$가 닫힌사상이므로 $f(C)$는 Y의 닫힌집합이다. 한편 $f|_A(C) = f(C)$이므로 $f|_A(C)$는 Y의 닫힌집합이다. 따라서 $f|_A\colon A \to Y$는 닫힌사상이다.

문제 5.2.21. (1) A를 $\mathbb{R}$의 닫힌집합이라자. 만약 $y \in \overline{p(A)}$이면 임의의 자연수 n에 대하여 $p(A) \cap (y - \frac{1}{n}, y + \frac{1}{n}) \neq \varnothing$이므로 $y_n \in p(A) \cap (y - \frac{1}{n}, y + \frac{1}{n})$이 존재하여 $y_n \to y$이다. 그리고 $p(a_n) = y_n$을 만족하는 $a_n \in A$을 택하자. 그러면 모든 자연수 n에 대하여 $a_n \in p^{-1}((y-1, y+1))$이고, p가 다항함수이므로 $p^{-1}((y-1, y+1))$는 유계집합이다. 그러

므로 수열 $\{a_n\}$이 유계이므로 문제 4.3.8에 의하여 수렴하는 부분수열 $\{a_{n_k}\}$이 존재한다. 그리고 $a_{n_k} \to x$라 하면 A가 닫힌집합이므로 $x \in A$이다. 한편 p가 연속이므로 $y_{n_k} = p(a_{n_k}) \to p(x)$이다. 그런데 $y_{n_k} \to y$이고 거리공간에서 수열의 극한이 유일하므로 $p(x) = y$이다. 그리고 $x \in A$이므로 $y \in p(A)$이다. 따라서 $\overline{p(A)} \subset p(A)$이므로 $\overline{p(A)} = p(A)$이 되어 $p(A)$는 $\mathbb{R}$의 닫힌집합이다.

(2) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$를 전단사인 연속사상이라 하자. 그러면 f는 증가함수이거나 감소함수가 되어야 한다. 우리는 f를 증가함수라하자. 그러면 임의의 기저의 원소 $(a, b) \subset \mathbb{R}$에 대해 $f((a, b)) = (f(a), f(b))$이 $\mathbb{R}$의 열린집합이다. 따라서 f는 열린사상이다.

(3) (2)와 성질 5.2.12에 의해 f는 위상동형사상이다.

문제 5.2.23. (1) 만약 A가 X의 열린집합이면 f가 열린사상이므로 $f(A)$는 Y의 열린집합이다. 그리고 g도 열린사상이므로 $g \circ f(A) = g(f(A))$는 Z의 열린집합이다. 따라서 $g \circ f$는 열린사상이다.

(2) 만약 A가 Y의 열린집합이면 f가 연속이므로 $f^{-1}(A)$는 X의 열린집합이다. 특별히 f가 전사이므로 $f(f^{-1}(A)) = A$이다. 그리고 $g \circ f$이 열린사상이므로 $g \circ f(f^{-1}(A))$는 Z의 열린집합이다. 그런데 $g \circ f(f^{-1}(A)) = g(f(f^{-1}(A))) = g(A)$이므로 $g(A)$는 Z의 열린집합이다. 따라서 g는 열린사상이다.

(3) 만약 A가 X의 열린집합이면 $g \circ f$이 열린사상이므로 $g \circ f(A) = g(f(A))$는 Z의 열린집합이다. 특별히 g가 단사이므로 $g^{-1}(g(f(A))) = f(A)$이다. 그리고 g가 연속사상이므로 $g^{-1}(g(f(A)))$는 Y의 열린집합이다. 따라서 $f(A)$는 Y의 열린집합이므로 f는 열린사상이다.

(4) 만약 A가 X의 닫힌집합이면 f가 닫힌사상이므로 $f(A)$는 Y의 닫힌집합이다. 그리고 g도 닫힌사상이므로 $g \circ f(A) = g(f(A))$는 Z의 닫힌집합이다. 따라서 $g \circ f$는 닫힌사상이다.

(5) 만약 A가 Y의 닫힌집합이면 f가 연속이므로 $f^{-1}(A)$는 X의 닫힌집합이다. 특별히 f가 전사이므로 $f(f^{-1}(A)) = A$이다. 그리고 $g \circ f$이 닫힌사상이므로 $g \circ f(f^{-1}(A))$는 Z의 닫힌집합이다. 그런데 $g \circ f(f^{-1}(A)) = g(f(f^{-1}(A))) = g(A)$이므로 $g(A)$는 Z의 닫힌집합이다. 따라서 g는 닫힌사상이다.

(6) 만약 A가 X의 닫힌집합이면 $g \circ f$이 닫힌사상이므로 $g \circ f(A) = g(f(A))$는 Z의 닫힌집합이다. 특별히 g가 단사이므로 $g^{-1}(g(f(A))) = f(A)$이다. 그리고 g가 연속사상이므로 $g^{-1}(g(f(A)))$는 Y의 닫힌집합이다. 따라서 $f(A)$는 Y의 닫힌집합이므로 f는 닫힌사상이다.

문제 5.1.25. (1) 먼저 $\chi(0) = 1$, $\chi(1) = 0$이므로 χ는 전사이다. 그리고 Y가 이상공간이므로 Y의 모든 부분집합이 열린집합인 동시에 닫힌집합이므로 χ는 열린사상인 동시에 닫힌사상이다.

(2) $\{1\}$은 Y의 열린집합이지만 $\chi^{-1}(\{1\}) = [0, \frac{1}{2}]$은 I의 열린집합이 아니므로 χ는 연속이 아니다.

문제 5.2.27. (i) 만약 $m \neq n$이면 $\{m\} \in \mathscr{T}_m$이고 $\{m\} \notin \mathscr{T}_n$이므로 $\mathscr{T}_m \neq \mathscr{T}_n$이다.

(ii) (방법 1) $f\colon (\mathbb{R}, \mathscr{T}_m) \to (\mathbb{R}, \mathscr{T}_n)$, $f(x) = x + n - m$이라 하면 f는 전단사 연속이고 열린사상이다. 따라서 f는 위상동형사상이다.

(방법 2) 함수

$$g\colon (\mathbb{R}, \mathscr{T}_m) \to (\mathbb{R}, \mathscr{T}_n), \quad g(x) = \begin{cases} n, & x = m \\ m, & x = n \\ x, & x \neq m, n \end{cases}$$

는 전단사 연속사상이고 열린사상이다. 따라서 g는 위상동형사상이다.

문제 5.2.29. 생략.

문제 5.2.31. 먼저 $f\colon [1,4] \times (0,\pi) \to X$, $f(r,\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$는 위상동형사상이다. 그리고 $g\colon Y = [1,2] \times (1,2) \to [1,4] \times (0,\pi)$, $g(x,y) = (3x-2, \pi x - \pi)$도 위상동형사상이므로 X와 Y는 위상동형이다.

문제 5.2.33. 위상공간 $(X, \mathscr{T})$이 거리공간 (Z,d)의 부분공간 Y와 위상동형이라 하고, $f\colon (X,\mathscr{T}) \to Y$를 위상동형사상이라 하자. 이제 임의의 $x_1, x_2 \in X$에 대해 $\rho(x_1,x_2) = d(f(x_1), f(x_2))$이라 하면 ρ는 집합 X상의 거리가 된다. 이제 $\mathscr{T} = \mathscr{T}_\rho$임을 보이면 된다. 먼저 $\mathscr{T}_\rho$의 기저의 원소 $B_\rho(x,r)$에 대해, f가 연속이므로 $B_\rho(x,r) = f^{-1}(B_d(f(x),r)) \in \mathscr{T}$이다. 따라서 $\mathscr{T}_\rho \subset \mathscr{T}$이다. 한편 임의의 $U \in \mathscr{T}$와 $x \in U$에 대하여 f가 열린사상이므로 $f(U)$는 $f(x)$의 열린근방이다. 따라서 $f(x) \in B_d(f(x),r) \subset U$를 만족하는 양수 r이 존재한다. 그런데

$$x \in B_\rho(x,r) = f^{-1}(B_d(f(x),r)) \subset f^{-1}(f(U)) = U$$

이므로 $U \in \mathscr{T}_\rho$이다. 따라서 $\mathscr{T} \subset \mathscr{T}_\rho$이다.

문제 5.2.35. (대우) 만약 $f(A) \cap f(A)' \neq \varnothing$이면 $y \in f(A) \cap f(A)'$이 존한다. 그리고 f가 전단사이므로 $f(a) = y$를 만족하는 유일한 $a \in A$가 존재한다. 이제 $a \in A'$임을 보이자. a의 임의의 열린근방 $U \subset X$에 대하여 f가 열린사상이므로 $f(U)$는 $f(a) = y$의 열린근방이다. 그리고 $y \in f(A)'$이므로 $y_* \in f(A) \cap f(U) - \{y\}$이 존재한다. 이제 $f(x_*) = y_*$를 만족하는 유일한 $x_* \in X$를 택하면 $x_* \in A \cap U - \{a\}$이므로 $a \in A'$이다. 따라서 $A \cap A' \neq \varnothing$이다.

문제 5.2.37. 집합 $X = \{x,y,z\}$의 부분기저 $\mathcal{S} = \{\{x,y\},\{y,z\}\}$가 생성하는 위상은 $\mathscr{T}_X = \{\varnothing, X, \{x,y\}, \{y,z\}, \{y\}\}$이다. 그리고 집합 $Y = \{a,b,c\}$상에 위상 $\mathscr{T}_Y = \{\varnothing, \{a,b\}, Y\}$를 주자. 이제 함수 $f\colon X \to Y$를 $f(x) = a$, $f(y) = b$, $f(z) = a$로 정의하면 $\{x,y\}, \{y,z\} \in \mathcal{S}$에 대해

$$f(\{x,y\}) = \{a,b\} \in \mathscr{T}_Y, \quad f(\{y,z\}) = \{a,b\} \in \mathscr{T}_Y$$

이다. 그러나 $\{y\} \in \mathscr{T}_X$이지만 $f(\{y\}) \notin \mathscr{T}_Y$이므로 f는 열린사상이 아니다.

제 6 장

곱공간

6.1 곱공간(product space)

문제 6.1.1. $\mathscr{T}_X$와 $\mathscr{T}_Y$를 각각 위상공간 X와 Y의 위상이라 하자.

먼저 곱공간 $X \times Y$의 기저가 $\mathscr{B}_p = \{U \times V \mid U \in \mathscr{T}_X,\ V \in \mathscr{T}_Y\}$이므로 곱공간 $X \times Y$의 부분공간 $A \times B$의 위상 $\mathscr{T}$의 기저는

$$\begin{aligned}\mathscr{B} &= \{(A \times B) \cap C \mid C \in \mathscr{B}_p\} \\ &= \{(A \times B) \times (U \times V) \mid U \in \mathscr{T}_X,\ V \in \mathscr{T}_Y\}\end{aligned}$$

이다(성질 3.4.9 참조).

한편 X의 부분공간 A와 Y의 부분공간 B의 위상은 각각

$$\mathscr{T}_A = \{A \cap U \mid U \in \mathscr{T}_X\}, \quad \mathscr{T}_B = \{B \cap V \mid V \in \mathscr{T}_Y\}$$

이다. 따라서 두 부분공간 A와 B의 곱위상 $\mathscr{T}^*$의 기저는

$$\begin{aligned}\mathscr{B}^* &= \{U_A \times V_B \mid U_A \in \mathscr{T}_A,\ V_B \in \mathscr{T}_B\} \\ &= \{(A \cap U) \times (B \cap V) \mid U \in \mathscr{T}_X,\ V \in \mathscr{T}_Y\}\end{aligned}$$

이다.

그런데 $(A \times B) \times (U \times V) = (A \cap U) \times (B \cap V)$이므로 $\mathscr{B} = \mathscr{B}^*$이 되어 $\mathscr{T} = \mathscr{T}^*$이다.

문제 6.1.3. (1) $f\colon X \times Y \to Y \times X$를 $f(x, y) = (y, x)$이라 하면 f는 전단사이다. 만약 $V \times U$가 $Y \times X$의 기저의 원소이면 V는 Y의 열린집합이고 U는 X의 열린집합이다. 그리고 $f^{-1}(V \times U) = U \times V$가 $X \times Y$의 기저의 원소이므로 f는 연속이다.

한편 $X \times Y$의 기저의 원소 $U \times V$에 대해 $f(U \times V) = V \times U$가 $Y \times X$의 기저의 원소

이므로 f는 열린사상이다. 따라서 성질 5.2.12에 의해 f는 위상동형사상이다.

(2) $g\colon (X\times Y)\times Z \to X\times(Y\times Z)$를 $g(((x,y),z)) = (x,(y,z))$이라 하면 g는 전단사이다. 만약 $U\times(V\times W)$가 $X\times(X\times Z)$의 기저의 원소이면 U, V, W는 각각 X, Y, Z의 열린집합이다. 그리고 $g^{-1}(U\times(V\times W)) = (U\times V)\times W$가 $(X\times Y)\times Z$의 기저의 원소이므로 g는 연속이다.

한편 $(X\times Y)\times Z$의 기저의 원소 $(U\times V)\times V$에 대해 $g((U\times V)\times W) = U\times(V\times W)$가 $X\times(Y\times Z)$의 기저의 원소이므로 g는 열린사상이다. 따라서 성질 5.2.12에 의해 g는 위상동형사상이다.

문제 6.1.5. $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$상의 사전식 순서위상 $\mathscr{T}_o$, $\mathbb{R}_d\times\mathbb{R}$상의 곱위상을 $\mathscr{T}_p$로 나타내자. 그리고 각각의 기저를 $\mathscr{B}_o$, $\mathscr{B}_p$라 하자.

임의의 $B\in\mathscr{B}_p$는 $\{x\}\times(a,b)$형태이므로 $B=\{x\}\times(a,b) = ((x,a),(x,b))\in\mathscr{B}_o$이다. 따라서 $\mathscr{B}_p\subset\mathscr{B}_o$이므로 $\mathscr{T}_p\subset\mathscr{T}_o$이다.

역으로 임의의 $B=((a,b),(c,d))\in\mathscr{B}_o$와 $(x,y)\in B$에 대하여 충분히 작은 $\varepsilon>0$이 존재하여

$$(x,y)\in B_* = \{x\}\times(y-\varepsilon,y+\varepsilon)\subset B$$

를 만족한다. 따라서 $\mathscr{T}_o\subset\mathscr{T}_p$이다.

문제 6.1.7. 먼저 $\mathrm{cl}_{\mathbb{R}}((0,1]) = [0,1]$이므로 A의 폐포는 성질 6.1.26에 의하여

$$\overline{A} = \overline{(0,1]}\times\overline{(0,1]}\times\cdots = [0,1]\times[0,1]\times\cdots = [0,1]^\omega$$

이다.

이제 $A^\circ=\varnothing$임을 보이자. 만약 $A^\circ\neq\varnothing$이라 가정하면 점 $\mathbf{x}=(x_1,x_2,\ldots)\in A^\circ$이 존재한다. 그러면 $\mathbf{x}=(x_n)\in W\subset A$를 만족하는 $\mathbb{R}^\omega$의 열린집합 $W\in\mathscr{T}_p$가 존재한다. 그리고 $\mathbf{x}=(x_n)\in\Pi_{n=1}^\infty U_n\subset W$를 만족하는 기저의 원소 $\Pi_{n=1}^\infty U_n\in\mathscr{B}_p$이 존재한다. 그런데 유한개의 $n\in\mathbb{N}$을 제외하고 $U_n=\mathbb{R}$이므로 $U_{n_0}=\mathbb{R}$인 $n_0\in\mathbb{N}$이 존재하여 $\mathbb{R}=U_{n_0}\subset(0,1]$이 되어 모순이다. 따라서 $A^\circ=\varnothing$이 되어야 한다.

끝으로 A의 경계는 $\partial A = \overline{A}-A^\circ = [0,1]^\omega-\varnothing = [0,1]^\omega$이다.

문제 6.1.9. $\mathbb{R}^n$상의 보통위상 $\mathscr{U}$와 곱위상 $\mathscr{T}_p$가 같음을 상기하자.

(1) 먼저

$$\begin{aligned} U(\mathbf{x},r)^\circ &= (x_1-r,x_1+r)^\circ\times\cdots\times(x_n-r,x_n+r)^\circ \\ &= (x_1-r,x_1+r)\times\cdots\times(x_n-r,x_n+r) = U(\mathbf{x},r) \end{aligned}$$

이므로 $U(\mathbf{x},r)$는 $\mathbb{R}^n$의 열린집합이다.

(2) 그리고

$$\begin{aligned}\overline{F(\mathbf{x},r)} &= \overline{[x_1-r,x_1+r]}\times\cdots\times\overline{[x_n-r,x_n+r]}\\ &= [x_1-r,x_1+r]\times\cdots\times[x_n-r,x_n+r] = F(\mathbf{x},r)\end{aligned}$$

이므로 $F(\mathbf{x},r)$는 $\mathbb{R}^n$의 닫힌집합이다.

(3)

$$\begin{aligned}\overline{U(\mathbf{x},r)} &= \overline{(x_1-r,x_1+r)}\times\cdots\times\overline{(x_n-r,x_n+r)}\\ &= [x_1-r,x_1+r]\times\cdots\times[x_n-r,x_n+r] = F(\mathbf{x},r)\end{aligned}$$

(4) $\mathbf{x}_k = (x_{k(1)}, x_{k(2)}, \ldots, x_{k(n)})$이라 하자. 그러면 각각의 $i = 1, 2, \ldots, n$에 대하여 $I_{k(i)} = [x_{k(i)} - r_k, x_{k(i)} + r_k]$이라 하면 $F(\mathbf{x}_k, r_k) = I_{k(1)} \times I_{k(2)} \times \cdots \times I_{k(n)}$이다. 그리고 $F(\mathbf{x}_k, r_k) \supset F(\mathbf{x}_{k+1}, r_{k+1})$이므로

$$I_{1(i)} \supset I_{2(i)} \supset \cdots I_{k(i)} \supset I_{k+1(i)} \supset \cdots$$

이다. 성질 2.1.10에 의해 $y_i \in \cap_{k=1}^{n} I_{k(i)}$이 존재한다. 따라서 $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_n) \in \cap_{k=1}^{\infty} F(\mathbf{x}_k, r_k)$이다.

(5) W가 $\mathbf{x}$의 열린근방이므로

$$\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in B = (a_1, b_1) \times \cdots \times (a_n, b_n) \subset W$$

을 만족하는 $\mathbb{R}^n$의 기저의 원소 B가 존재한다. 이제

$$s = \min\{|x_i - a_i|,\ |b_i - x_i| \mid i = 1, 2, \ldots, n\}$$

이라 하면 $\mathbf{x} \in U(\mathbf{x}, s) \subset W$이다. 그리고 $r = \frac{s}{2}$는

$$\mathbf{x} \in U(\mathbf{x}, r) \subset F(\mathbf{x}, r) \subset U(\mathbf{x}, s) \subset W$$

를 만족한다.

(6) $V_k (k \in \mathbb{N})$을 $\mathbb{R}^n$의 조밀한 열린집합이라 하자. 우리는 임의로 주어진 공집합이 아닌 열린집합 $W \subset \mathbb{R}^n$에 대하여 $W \cap (\cap_{k=1}^{\infty} V_k) \neq \varnothing$임을 보이면 된다. 먼저 V_1이 조밀하므로 $W \cap V_1 \neq \varnothing$이다. 그러면 $\mathbf{x}_1 \in W \cap V_1$이 존재하고 $W \cap V_1$이 열린집합이므로 (5)에 의하여

$$\mathbf{x}_1 \in U(\mathbf{x}_1, r_1) \subset F(\mathbf{x}_1, r_1) \subset W \cap V_1$$

을 만족하는 양의 실수 r_1이 존재한다. 그리고 V_2가 조밀하므로 $U(\mathbf{x}_1, r_1) \cap V_2 \neq \varnothing$이다. 그러면 $\mathbf{x}_2 \in U(\mathbf{x}_1, r_1) \cap V_2$이 존재하고 $U(\mathbf{x}_1, r_1) \cap V_2$이 열린집합이므로 (5)에 의하여

$$\mathbf{x}_2 \in U(\mathbf{x}_2, r_2) \subset F(\mathbf{x}_2, r_2) \subset U(\mathbf{x}_1, r_1) \cap V_2$$

을 만족하는 양의 실수 r_2이 존재한다. 같은 방법을 계속하면 우리는

$$U(\mathbf{x}_k, r_k) \subset F(\mathbf{x}_k, r_k) \subset U(\mathbf{x}_{k-1}, r_{k-1}) \cap V_k$$

을 만족하는 열린집합들의 모임 $\{F(\mathbf{x}_k, r_k)\}_{k\in\mathbb{N}}$을 얻을 수 있다. 그리고

$$F(\mathbf{x}_1, r_1) \supset F(\mathbf{x}_2, r_2) \supset \cdots \supset F(\mathbf{x}_k, r_k) \supset F(\mathbf{x}_{k+1}, r_{k+1}) \supset \cdots$$

이므로 (4)에 의해 $\cap_{k=1}^{\infty} F(\mathbf{x}_k, r_k) \neq \varnothing$이다. 그런데 $F(\mathbf{x}_1, r_1) \subset W \cap V_1$이고 $F(\mathbf{x}_k, r_k) \subset V_k$이므로 $\cap_{k=1}^{\infty} F(\mathbf{x}_k, r_k) \subset W \cap (\cap_{k=1}^{\infty} V_k)$이 되어 $W \cap (\cap_{k=1}^{\infty} V_k) \neq \varnothing$이다.

문제 6.1.11. (1) 문제 3.3.8과 문제 3.3.10 참조.

(2) (i) 먼저 $\mathscr{T}_{d_1} = \mathscr{T}_p$임을 보이자: 점 $(x,y) \in X \times Y$와 곱위상 $\mathscr{T}_p$의 기저의 원소 $B_{d_X}(x,r) \times B_{d_Y}(y,s)$에 대하여 $\varepsilon = \min\{r,s\}$라 하자. 그러면 $(x,y) \in B_{d_1}((x,y),\varepsilon) \subset B_{d_X}(x,r) \times B_{d_Y}(y,s)$이 성립한다. 구체적으로 만약 $(p,q) \in B_{d_1}((x,y),\varepsilon)$이면

$$\begin{aligned} d_X(x,p) &\leq \sqrt{\{d_X(x,p)\}^2 + \{d_Y(y,q)\}^2} < \varepsilon \leq r, \\ d_X(y,q) &\leq \sqrt{\{d_X(x,p)\}^2 + \{d_Y(y,q)\}^2} < \varepsilon \leq s \end{aligned}$$

이므로 $(p,q) \in B_{d_X}(x,r) \times B_{d_Y}(y,s)$이다. 따라서 정리 3.2.9에 의해 $\mathscr{T}_p \subset \mathscr{T}_{d_1}$이다.

역으로 점 $(x,y) \in X \times Y$와 거리위상 $\mathscr{T}_{d_1}$의 기저의 원소 $B_{d_1}((x,y),\varepsilon)$에 대하여 $(x,y) \in B_{d_X}(x,\frac{\varepsilon}{2}) \times B_{d_Y}(y,\frac{\varepsilon}{2}) \subset B_{d_1}((x,y),\varepsilon)$이 성립한다. 구체적으로 만약 $(p,q) \in B_{d_X}(x,\frac{\varepsilon}{2}) \times B_{d_Y}(y,\frac{\varepsilon}{2})$이면

$$d_1((x,y),(p,q)) = \sqrt{\{d_X(x,p)\}^2 + \{d_Y(y,q)\}^2} \leq d_X(x,p) + d_Y(y,q) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

이므로 $(p,q) \in B_{d_1}((x,y),\varepsilon)$이다. 따라서 정리 3.2.9에 의해 $\mathscr{T}_{d_1} \subset \mathscr{T}_p$이다.

(ii) 이제 $\mathscr{T}_p = \mathscr{T}_{d_2}$임을 보이자: 점 $(x,y) \in X \times Y$와 곱위상 $\mathscr{T}_p$의 기저의 원소 $B_{d_X}(x,r) \times B_{d_Y}(y,s)$에 대하여 $\varepsilon = \min\{r,s\}$라 하자. 그러면 $(x,y) \in B_{d_2}((x,y),\varepsilon) \subset B_{d_X}(x,r) \times B_{d_Y}(y,s)$이 성립한다. 구체적으로 만약 $(p,q) \in B_{d_2}((x,y),\varepsilon)$이면

$$\begin{aligned} d_X(x,p) &\leq \max\{d_X(x,p), d_Y(y,q)\} < \varepsilon \leq r, \\ d_X(y,q) &\leq \max\{d_X(x,p), d_Y(y,q)\} < \varepsilon \leq s \end{aligned}$$

이므로 $(p,q) \in B_{d_X}(x,r) \times B_{d_Y}(y,s)$이다. 따라서 정리 3.2.9에 의해 $\mathscr{T}_p \subset \mathscr{T}_{d_2}$이다.

역으로 점 $(x,y) \in X \times Y$와 거리위상 $\mathscr{T}_{d_2}$의 기저의 원소 $B_{d_2}((x,y),\varepsilon)$에 대하여 $(x,y) \in B_{d_X}(x,\varepsilon) \times B_{d_Y}(y,\varepsilon) \subset B_{d_2}((x,y),\varepsilon)$이 성립한다. 구체적으로 만약 $(p,q) \in B_{d_X}(x,\varepsilon) \times B_{d_Y}(y,\varepsilon)$이면

$$d_2((x,y),(p,q)) = \max\{d_X(x,p), d_Y(y,q)\} < \varepsilon$$

이므로 $(p,q) \in B_{d_2}((x,y),\varepsilon)$이다. 따라서 정리 3.2.9에 의해 $\mathscr{T}_{d_2} \subset \mathscr{T}_p$이다.

문제 6.1.13. (i) 먼저 f의 성분함수

$$\pi_X \circ f \colon X \to X,\quad x \mapsto x,$$
$$\pi_Y \circ f \colon X \to Y,\quad x \mapsto y_0$$

이 모두 연속이므로 f는 연속이다.

그리고 사영사상 $\pi_X : X \times Y \to Y$, $\pi_X(x,y) = x$의 축소사상 $(\pi_X)|\colon f(X) \to X$이 f의 연속인 역사상이므로 f는 넣기사상이다.

(ii) g의 경우도 (i)과 비슷하게 보이면 된다.

문제 6.1.15. (1) 먼저 $y_0 \neq 0$이면 $g(x) = F(x,y_0) = \frac{xy_0}{x^2+{y_0}^2}$는 연속이다. 그리고 $y_0 = 0$이면 $g(x) = F(x,0) = 0$는 연속이다.

같은 방법으로 각각의 $x_0 \in X$에 대해 $h(y) = F(x_0,y)$는 연속이다.

(2) 정의에 의해

$$g(x) = F(x,x) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

이므로 g는 연속이 아니다. 구체적으로 $(-1,\frac{1}{3})$은 열린집합이지만 $g^{-1}((-1,\frac{1}{3})) = \{0\}$은 열린집합이 아니다.

(3) (귀류법) 만약 F가 연속이면 $k\colon X \to X \times X$, $k(x) = (x,x)$도 연속이므로 $g = F \circ k$, $g(x) = F(x,x)$도 연속이다. 이는 (2)에 모순이다. 따라서 F는 연속이 아니다.

문제 6.1.17. (1) 삼각 부등식만 보이자. 세 점 $x,y,z \in X = (0,1)$에 대하여

$$d(x,z) = |\frac{1}{x} - \frac{1}{z}| = |\frac{1}{x} - \frac{1}{y} + \frac{1}{y} - \frac{1}{z}| \le |\frac{1}{x} - \frac{1}{y}| + |\frac{1}{y} - \frac{1}{z}| = d(x,y) + d(y,z)$$

이다.

(2) (귀류법) $\delta|_{X\times X} = d$를 만족하는 집합 $\mathbb{R}$상의 거리 δ가 존재한다고 가정하자. 그러면 $\delta(\frac{1}{2},\frac{1}{n}) = \delta(\frac{1}{2},\frac{1}{n}) = |2-n|$이다. 한편 보기 6.1.19에 의해 δ가 연속이므로

$$\delta(\frac{1}{2},0) = \lim_{n\to\infty} \delta(\frac{1}{2},\frac{1}{n}) = \lim_{n\to\infty} n-2 = \infty$$

이다. 이는 $\delta(\frac{1}{2},0) \in \mathbb{R}$이라는 사실에 모순이다.

(3) 함수 $f\colon (0,\infty) \to (0,\infty)$, $f(x) = \frac{1}{x}$가 위상동형사상임을 상기하자. 먼저 임의로 주어진 점 $x \in X$와 양의 실수 ε에 대하여 f가 점 x에서 연속이므로

$$|x-y| < \delta \;\Rightarrow\; |f(x) - f(y)| = |\frac{1}{x} - \frac{1}{y}| < \varepsilon$$

을 만족하는 δ가 존재하여

$$d_0(x,y) < \delta \;\Rightarrow\; d(x,y) < \varepsilon$$

이다. 따라서 $B_{d_0}(x,\delta) \subset B_d(x,\varepsilon)$이다.

역으로 임의로 주어진 점 $x \in X$와 양의 실수 ε에 대하여 f가 점 $\frac{1}{x}$에서 연속이므로

$$|\frac{1}{x} - z| < \delta \;\Rightarrow\; |f(\frac{1}{x}) - f(z)| = |x - \frac{1}{z}| < \varepsilon$$

을 만족하는 δ가 존재하여

$$d_0(x,y) = |\frac{1}{x} - \frac{1}{y}| < \delta \;\Rightarrow\; d(x,y) = |x-y| < \varepsilon$$

이다. 따라서 $B_d(x,\delta) \subset B_{d_0}(x,\varepsilon)$이다.

따라서 $d \sim d_0$이다.

6.2 상자위상(box topology)

문제 6.2.1. (i) 임의의 점 $(x_\alpha) \in \Pi_{\alpha\in\Lambda}X_\alpha$에 대해 X_α가 X_α의 열린집합이므로 $(x_\alpha) \in \Pi_{\alpha\in\Lambda}X_\alpha \in \mathscr{B}_b$이다.

(ii) 임의의 $\Pi_{\alpha\in\Lambda}U_\alpha$, $\Pi_{\alpha\in\Lambda}V_\alpha\mathscr{B}_b$와 점 $(x_\alpha) \in (\Pi_{\alpha\in\Lambda}U_\alpha) \cap (\Pi_{\alpha\in\Lambda}V_\alpha)$에 대하여 $x_\alpha \in U_\alpha \cap V_\alpha$이고 $U_\alpha \cap V_\alpha$이 X_α의 열린집합이므로

$$(x_\alpha) \in \Pi_{\alpha\in\Lambda}(U_\alpha \cap V_\alpha) = (\Pi_{\alpha\in\Lambda}U_\alpha) \cap (\Pi_{\alpha\in\Lambda}V_\alpha)$$

를 만족하는 $\Pi_{\alpha\in\Lambda}(U_\alpha \cap V_\alpha) \in \mathscr{B}_b$가 존재한다.

문제 6.2.3. ($\subset$) 먼저 $\mathbf{x} = (x_\alpha) \in \overline{\Pi A_\alpha}$이라 하자. 이제 각각의 $\alpha \in \Lambda$에 대하여 $x_\alpha \in \overline{A}_\alpha$임을 다음과 같이 보이자: 임의의 x_α의 열린근방 $V_\alpha \subset X_\alpha$에 대하여 $\pi_\alpha^{-1}(V_\alpha)$는 $\mathbf{x} \in \pi_\alpha^{-1}(V_\alpha)$를 만족하는 상자공간 ΠX_α상의 열린집합이다. 그리고 $\mathbf{x} \in \overline{\Pi A_\alpha}$이므로

$$\pi_\alpha^{-1}(V_\alpha) \cap \Pi A_\alpha \neq \varnothing$$

이다. 그래서 점 $\mathbf{y} = (y_\alpha) \in \pi_\alpha^{-1}(V_\alpha) \cap \Pi A_\alpha$가 존재하여 $y_\alpha \in V_\alpha \cap A_\alpha$이다. 따라서 $V_\alpha \cap A_\alpha \neq \varnothing$이므로 $x_\alpha \in \overline{A}_\alpha$이다. 그러므로 $\mathbf{x} = (x_\alpha) \in \Pi\overline{A}_\alpha$이다.

($\supset$) 역으로 $\mathbf{x} = (x_\alpha) \in \Pi\overline{A}_\alpha$이라 하자. 이제 임의의 $\mathbf{x}$의 열린근방 $W \subset \Pi X_\alpha$에 대하여

$$\mathbf{x} \in B = \Pi U_\alpha \subset W$$

를 만족하는 ΠX_α상의 기저의 원소 $B = \Pi U_\alpha$가 존재한다. 각각의 $\alpha \in \Lambda$에 대하여 $x_\alpha \in$

$\overline{A}_\alpha$이고 $x_\alpha \in U_\alpha$이므로 $U_\alpha \cap A_\alpha \neq \varnothing$이다. 그러므로 점 $y_\alpha \in U_\alpha \cap A_\alpha$가 존재하여 $\mathbf{y} = (y_\alpha) \in B \cap \Pi A_\alpha \subset W \cap \Pi A_\alpha$이다. 따라서 $W \cap \Pi A_\alpha \neq \varnothing$이므로 $\mathbf{x} = (x_\alpha) \in \overline{\Pi A_\alpha}$이다.

문제 6.2.5. (i) $\mathbb{R}$을 유클리드공간이라 하자. 그러면 $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 1\}$은 상자공간 $(\mathbb{R} \times \mathbb{R}, \mathscr{T}_b)$상의 닫힌집합이다. 그러나 사영사상 $\pi_1 : (\mathbb{R} \times \mathbb{R}, \mathscr{T}_b) \to \mathbb{R}$, $\pi_1(x, y) = x$에 대해 $\pi_1(C) = \mathbb{R} - \{0\}$은 $\mathbb{R}$상의 닫힌집합이 아니다. 따라서 π_1는 닫힌사상이 아니다.

(ii) 상자공간 $(\Pi X_\alpha, \mathscr{T}_b)$의 임의의 기저의 원소 $B = \Pi U_\alpha \in \mathscr{B}_b$가 주어졌다 하자. 각각의 α에 대하여 U_α가 X_α의 열린집합이므로 $\pi_\alpha(B) = U_\alpha$는 X_α의 열린집합이다. 따라서 성질 5.2.5에 의해 $\pi_\alpha : (\Pi X_\alpha, \mathscr{T}_b) \to X_\alpha$는 열린사상이다.

문제 6.2.7. (i) 곱공간 $(\mathbb{R}^\omega, \mathscr{T}_p)$에서의 $\mathbb{R}^\infty$의 폐포는 $\mathbb{R}^\omega$이다: 임의의 점 $(x_n) \in \mathbb{R}^\omega$와 (x_n)의 열린근방 $W \in \mathscr{T}_p$에 대하여 $(x_n) \in \Pi_{n=1}^\infty U_n \subset W$를 만족하는 기저의 원소 $\Pi_{n=1}^\infty U_n \in \mathscr{B}_p$가 존재한다. 그러면 U_n은 유한개를 제외하고는 $\mathbb{R}$이므로

$$\Pi_{n=1}^\infty U_n = U_1 \times U_2 \times \cdots \times U_k \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \cdots$$

로 표현된다. 이제 $\mathbf{y} = (x_1, x_2, \ldots, x_k, 0, 0, 0, \ldots)$라 하면

$$\mathbf{y} \in \mathbb{R}^\infty \cap \Pi_{n=1}^\infty U_n \subset \mathbb{R}^\infty \cap W$$

이 되어 $\mathbb{R}^\infty \cap W \neq \varnothing$이다. 그러므로 $(x_n) \in \overline{\mathbb{R}^\infty}$이다. 따라서 $\overline{\mathbb{R}^\infty} = \mathbb{R}^\omega$이다.

(ii) 상자공간 $(\mathbb{R}^\omega, \mathscr{T}_b)$에서의 $\mathbb{R}^\infty$의 폐포는 $\mathbb{R}^\infty$이다: 만약 $(x_n) \in (\mathbb{R}^\infty)^c$이면 $\mathscr{D} = \{n \in \mathbb{N} \mid x_n \neq 0\}$은 무한집합이다. 이제 (x_n)의 열린근방 $B = \Pi_{n=1}^\infty U_i \in \mathscr{T}_b$를 다음과 같이 택하자.

$$U_n = \begin{cases} (x_n - |x_n|, x_n + |x_n|), & n \in \mathscr{D} \\ \mathbb{R}, & n \notin \mathscr{D} \end{cases}$$

그러면 모든 $n \in \mathscr{D}$에 대하여 $0 \notin U_n$이므로 $B \cap \mathbb{R}^\infty = \varnothing$이 되어 $(x_n) \in B \subset (\mathbb{R}^\infty)^c$이다. 그러므로 $(\mathbb{R}^\infty)^c$이 열린집합이므로 $\mathbb{R}^\infty$는 닫힌집합이다. 따라서 $\overline{\mathbb{R}^\infty} = \mathbb{R}^\infty$이다.

(iii) 고른공간 $(\mathbb{R}^\omega, \bar{\rho})$에서의 $\mathbb{R}^\infty$의 폐포는 $X = \{(x_n) \in \mathbb{R}^\omega \mid x_n \to 0\}$이다: 먼저 $(x_n) \in \overline{\mathbb{R}^\infty}$이라 하자. 임의로 주어진 양의 실수 ε에 대해 $\delta = \min\{1, \varepsilon\}$이라 하자. 그러면 $(x_n) \in \overline{\mathbb{R}^\infty}$이므로 $B_{\bar{\rho}}((x_n), \delta) \cap \mathbb{R}^\infty \neq \varnothing$이다. 우리는 한 점 $(y_n) \in B_{\bar{\rho}}((x_n), \delta) \cap \mathbb{R}^\infty$을 택하자. 그러면 $(y_n) \in \mathbb{R}^\infty$이므로

$$y_{n_0} = y_{n_0+1} = y_{n_0+2} = \cdots = 0$$

을 만족하는 자연수 n_0이 존재한다. 모든 n에 대하여 $\bar{d}(x_n, y_n) \leq \bar{\rho}((x_n), (y_n)) < \delta$이고 $\delta \leq 1$이므로 $d(x_n, y_n) = |x_n - y_n| < \delta$이다. 만약 $n \geq n_0$이면 $y_n = 0$이므로 $|x_n - 0| < \delta \leq \varepsilon$이다. 따라서 $x_n \to 0$이다.

역으로 $(x_n) \in X$이라 하자. 임의로 주어진 양의 실수 ε에 대하여 $\delta = \min\{1, \frac{\varepsilon}{2}\}$라 하자. 그러면 $x_n \to 0$이므로

$$n \geq n_0 \ \Rightarrow \ |x_n - 0| < \delta$$

를 만족하는 자연수 n_0이 존재한다. 그리고 $\delta \leq 1$이므로 $\bar{d}(x_n, 0) = |x_n - 0| < \delta (\forall n \geq n_0)$이다. 이제 $(y_n) \in \mathbb{R}^\omega$를 다음과 같이 정의하자.

$$y_n = \begin{cases} x_n, & n < n_0 \\ 0, & n \geq n_0 \end{cases}$$

그러면 $(y_n) \in \mathbb{R}^\infty \cap B_{\bar{\rho}}((x_n), \varepsilon)$이므로 $R^\infty \cap B_{\bar{\rho}}((x_n), \varepsilon) \neq \varnothing$이다. 따라서 $(x_n) \in \overline{\mathbb{R}^\infty}$이다.

문제 6.2.9. 먼저 $\mathrm{cl}_{\mathbb{R}}((0,1]) = [0,1]$이므로 A의 폐포는 성질 6.2.4에 의하여

$$\overline{A} = \overline{(0,1]} \times \overline{(0,1]} \times \cdots = [0,1] \times [0,1] \times \cdots = [0,1]^\omega$$

이다.

그리고 $\mathrm{int}_{\mathbb{R}}((0,1]) = (0,1)$이므로 A의 내부는 성질 6.2.5에 의하여

$$A^\circ = (0,1]^\circ \times (0,1]^\circ \times \cdots = (0,1) \times (0,1) \times \cdots = (0,1)^\omega$$

이다.

문제 6.2.11. 각각의 자연수 n에 대하여 $f_n \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = a_n x + b_n$이라 하자. 그러면 f_n은 연속사상 $g_n \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g_n(x) = \frac{1}{a_n} x - \frac{b_n}{a_n}$을 역사상으로 갖는 위상동형사상이다.

(i) 먼저 $h \colon (\mathbb{R}^\omega, \mathscr{T}_p) \to (\mathbb{R}^\omega, \mathscr{T}_p)$가 위상동형사상임을 보이자: 임의의 기저의 원소 $\Pi_{n=1}^\infty U_n \in \mathscr{B}_p$에 대하여 유한개의 $n = n_1, n_2, \ldots, n_k$를 제외한 $U_n = \mathbb{R}$이다. 그리고 f_n이 연속이므로 $V_n = f_n^{-1}(U_n)$은 $\mathbb{R}$의 열린집합이고 $n = n_1, n_2, \ldots, n_k$를 제외하고는 $V_n = \mathbb{R}$이다. 따라서

$$h^{-1}(\Pi_{n=1}^\infty U_n) = \Pi_{n=1}^\infty V_n \in \mathscr{B}_p \subset \mathscr{T}_p$$

이므로 h는 연속이다. 같은 방법으로 h의 역사상

$$h^{-1} \colon \mathbb{R}^\omega \to \mathbb{R}^\omega, \ (x_1, x_2, x_3, \ldots) \mapsto (\frac{1}{a_1} x_1 - \frac{b_1}{a_1}, \frac{1}{a_2} x_2 - \frac{b_2}{a_2}, \frac{1}{a_3} x_3 - \frac{b_3}{a_n}, \ldots)$$

도 g_n을 사용하여 연속임을 보일 수 있다. 따라서 h는 위상동형사상이다.

(ii) 이제 $h \colon (\mathbb{R}^\omega, \mathscr{T}_b) \to (\mathbb{R}^\omega, \mathscr{T}_b)$가 위상동형사상임을 보이자: 임의의 기저의 원소 $\Pi_{n=1}^\infty U_n \in \mathscr{B}_b$에 대하여 f_n이 연속이므로 $V_n = f_n^{-1}(U_n)$은 $\mathbb{R}$의 열린집합이다. 따라서

$h^{-1}(\Pi_{n=1}^{\infty}U_n) = \Pi_{n=1}^{\infty}V_n \in \mathscr{B}_b \subset \mathscr{T}_b$이므로 h는 연속이다. 같은 방법으로 h의 역사상

$$h^{-1}\colon \mathbb{R}^{\omega} \to \mathbb{R}^{\omega},\ (x_1, x_2, x_3, \ldots) \mapsto (\frac{1}{a_1}x_1 - \frac{b_1}{a_1}, \frac{1}{a_2}x_2 - \frac{b_2}{a_2}, \frac{1}{a_3}x_3 - \frac{b_3}{a_n}, \ldots)$$

도 g_n을 사용하여 연속임을 보일 수 있다. 따라서 h는 위상동형사상이다.

문제 6.2.13. (1) 자연수 n에 대하여 $y_n = x_n + \varepsilon - \frac{1}{n}\varepsilon$이라 하자. 그러면 $\mathbf{y} = (y_n) \in U(\mathbf{x}, \varepsilon)$이다. 그러나 $\bar{d}(x_n, y_n) = \varepsilon - \frac{1}{n}\varepsilon$이므로 $\bar{\rho}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \varepsilon$이 되어 $\mathbf{y} \notin B_{\bar{\rho}}(\mathbf{x}, \varepsilon)$이다. 따라서 $U(\mathbf{x}, \varepsilon) \neq B_{\bar{\rho}}(\mathbf{x}, \varepsilon)$이다.

(2) 자연수 n에 대하여 $y_n = x_n + \varepsilon - \frac{1}{n}\varepsilon$이라 하자. 그러면 $\mathbf{y} = (y_n) \in U(\mathbf{x}, \varepsilon)$이다. 이제 $\mathbf{y} \in B_{\bar{\rho}}(\mathbf{x}, r) \subset U(\mathbf{x}, \varepsilon)$를 만족하는 양의 실수 r이 존재하지 않음을 보이면 된다. 임의로 주어진 양의 실수 r에 $s = \min\{\frac{1}{2}r, \frac{1}{2}\}$라 하고, $\frac{1}{k}\varepsilon < s$을 만족하는 자연수 k가 존재한다. 그리고

$$z_n = \begin{cases} y_k + s, & n = k \\ y_n, & n \neq k \end{cases}$$

라 하고, $\mathbf{z} = (z_n)$이라 하면 $\bar{\rho}(\mathbf{y}, \mathbf{z}) = s \leq \frac{1}{2}r < r$이므로 $\mathbf{z} \in B_{\bar{\rho}}(\mathbf{x}, r)$이다. 그러나

$$|x_k - z_k| = |x_k - (y_k + s)| = |x_k - (x_k + \varepsilon - \frac{1}{k}\varepsilon + s)| = \varepsilon + (s - \frac{1}{k}\varepsilon) > \varepsilon$$

이므로 $z_k \notin (x_k - \varepsilon, x_k + \varepsilon)$이므로 $\mathbf{z} \notin U(\mathbf{x}, \varepsilon)$이다. 따라서 $B_{\bar{\rho}}(\mathbf{x}, r) \nsubseteq U(\mathbf{x}, \varepsilon)$이다.

(3) ($\supset$) 먼저 임의의 $\delta < \varepsilon$에 대해 $U(\mathbf{x}, \delta) \subset B_{\bar{\rho}}(\mathbf{x}, \varepsilon)$임을 보이자. 만약 $\mathbf{y} = (y_n) \in U(\mathbf{x}, \delta)$이면 각각의 n에 대하여 $y_n \in (x_n - \delta, x_n + \delta)$이고, $\delta < 1$이므로 $\bar{d}(x_n, y_n) = |x_n - y_n| < \delta$이다. 따라서 $\bar{\rho}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq \delta < \varepsilon$이 되어 $\mathbf{y} \in B_{\bar{\rho}}(\mathbf{x}, \varepsilon)$이다.

($\subset$) 만약 $\mathbf{y} = (y_n) \in B_{\bar{\rho}}(\mathbf{x}, \varepsilon)$이면 $r = \varepsilon - \bar{\rho}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$에 대해

$$\delta = \bar{\rho}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \frac{1}{2}r = \frac{1}{2}(\varepsilon + \bar{\rho}(\mathbf{x}, \mathbf{y}))$$

라하자. 그러면 $\delta < \varepsilon$이다. 이제 $\mathbf{y} \in U(\mathbf{x}, \delta)$임을 보이자. 각각의 자연수 n에 대하여

$$\bar{d}(x_n, y_n) \leq \bar{\rho}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) < \delta$$

이고 $\delta < 1$이므로 $|x_n - y_n| = \bar{d}(x_n, y_n) < \delta$이다. 따라서 $y_n \in (x_n - \delta, x_n + \delta)$이므로 $\mathbf{y} \in U(\mathbf{x}, \delta)$이다.

제 7 장

분리공리

7.1 하우스도르프공간

문제 7.1.1. (1) $\mathscr{T} = \{\varnothing, X\}$.

(2) $\mathscr{T} = \{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{a,b\}, \{a,b,c\}, X\}$.

(3) 이산위상 $\mathscr{T} = \mathscr{P}(X)$.

문제 7.1.3. (1) Y를 T_0-공간이라 하자. 임의의 서로 다른 두 점 $x, x' \in X$에 대하여 f가 단사이므로 $f(x)$, $f(x') \in Y$는 서로 다른 점이다. 그리고 Y가 T_0-공간이므로

$$f(x) \in U,\ f(x') \notin U \quad \text{또는} \quad f(x) \notin U,\ f(x') \in U$$

를 만족하는 Y의 열린집합 U가 존재한다. 한편 f가 연속이므로 $f^{-1}(U)$는 X의 열린집합으로서

$$x \in f^{-1}(U),\ x' \notin f^{-1}(U) \quad \text{또는} \quad x \notin f^{-1}(U),\ x' \in f^{-1}(U)$$

를 만족한다. 따라서 X는 T_0-공간이다.

(2) Y를 T_1-공간이라 하자. 임의의 점 $x \in X$에 대하여 $y = f(x) \in Y$이고 Y가 T_1-공간이므로 정리 7.1.17에 의하여 $\{y\}$는 Y의 닫힌집합이다. 그리고 f가 연속이므로 $f^{-1}(\{y\})$는 X의 닫힌집합이다. 그런데 f가 단사이므로 $f^{-1}(\{y\}) = \{x\}$이 되어 $\{x\}$는 X의 닫힌집합이다. 따라서 정리 7.1.17에 의하여 X는 T_1-공간이다.

(3) Y를 Hausdorff 공간이라 하자. 임의의 서로 다른 두 점 $x, x' \in X$에 대하여 f가 단사이므로 $f(x)$, $f(x') \in Y$는 서로 다른 점이다. 그리고 Y가 Hausdorff이므로

$$f(x) \in U,\ f(x') \in V,\quad U \cap V = \varnothing$$

를 만족하는 Y의 열린집합 U와 V가 존재한다. 한편 f가 연속이므로 $f^{-1}(U)$와 $f^{-1}(V)$는

X의 열린집합으로서

$$x \in f^{-1}(U),\ x' \notin f^{-1}(V),\quad f^{-1}(U) \cap f^{-1}(U) = \varnothing$$

를 만족한다. 따라서 X는 Hausdorff 공간이다.

문제 7.1.5. $(X, \mathscr{T})$가 T_1-공간이면 모든 한 점 집합이 닫힌집합이므로 모든 유한 부분집합도 닫힌집합이다. 그런데 X가 유한집합이므로 X의 모든 부분집합은 유한집합이 되어 닫힌집합이다. 따라서 X의 모든 부분집합은 열린집합이 되므로 $(X, \mathscr{T})$는 이산공간이다.

문제 7.1.7. (a)⇒(b) $(X, \mathscr{T})$가 T_1-공간이라 하자. 그러면 X의 모든 유한부분집합은 $(X, \mathscr{T})$의 닫힌집합이다. 이제 $U \in \mathscr{T}_f$이라 하자. 만약 $U = \varnothing$이면 당연히 $U \in \mathscr{T}$이다. 그리고 만약 $U \neq \varnothing$이면 U^c이 유한집합이므로 U^c은 $(X, \mathscr{T})$의 닫힌집합이다. 따라서 U는 $(X, \mathscr{T})$의 열린집합이므로 $U \in \mathscr{T}$이다. 그러므로 $\mathscr{T}_f \subset \mathscr{T}$이다.

(b)⇒(a) $\mathscr{T} \supset \mathscr{T}_f$이라 하자. 그러면 임의의 점 $x \in X$에 대하여 $\{x\}^c \in \mathscr{T}_f$이므로 $\{x\}^c \in \mathscr{T}$이다. 따라서 $\{x\}^c$은 $(X, \mathscr{T})$의 열린집합이고 $\{x\}$는 $(X, \mathscr{T})$의 닫힌집합이다. 따라서 $(X, \mathscr{T})$는 T_1-공간이다.

문제 7.1.9. (1) 우리는 $(A')' \subset A'$임을 보이면 충분하다. 주어진 점 $x \in (A')'$에 대하여 U를 x의 열린근방이라 하자. x가 집합 A'의 극한점이므로 점 $y \in U \cap A' - \{x\}$가 존재한다. 한편 $y \in U$이고 $y \in A'$이므로 따름정리 7.1.18에 의해 $U \cap A$는 무한집합이다. 그래서 점 $z \in U \cap A - \{x, y\}$가 존재하여 $z \in U \cap A - \{x\} \neq \varnothing$이다. 따라서 $x \in A'$이다.

(2) 정리 4.2.20, 성질 4.2.9 그리고 (1)에 의하여

$$(\overline{A})' = (A \cup A')' = A' \cup (A')' = A'$$

이다.

문제 7.1.11. (1) 집합 $X = \{a, b, c, d\}$상에 위상 $\mathscr{T} = \{\varnothing, \{a, b\}, \{c, d\}, X\}$를 주자. 그러면 모든 한 점 집합이 열린집합이 아니므로 X는 고립점을 갖지 않는다. 그러나 조밀한 부분집합 $D = \{b, c\}$의 점 b와 c는 D의 고립점이다.

(2) (귀류법) 만약 X의 조밀한 부분집합 D가 고립점 $x \in X$를 갖는다고 가정하자. 그러면 $U \cap D = \{x\}$를 만족하는 x의 열린근방 U가 존재한다. 그리고 x가 X의 고립점이 아니므로 U는 x와 다른 점 y를 포함한다. 그래서 $\{x, y\} \subset U$이다. 한편 X가 T_1이므로 $\{x\}$는 X의 닫힌집합이 되어 $V = U - \{x\}$는 y의 열린근방이다. 그런데 $D \cap V = \varnothing$이므로 $y \notin \overline{D}$이다. 이는 D가 X의 조밀한 부분집합이라는 사실에 모순이다.

문제 7.1.13. (1) (⇒) $(X, \mathscr{T}_f)$가 Hausdorff라 하자. 먼저 X가 한 점 집합이면 당연하므로, X가 두 점이상으로 이루어진 집합이라 하자. 그러면 서로 다른 두 점 $x, y \in X$에 대해

$(X, \mathscr{T}_f)$가 Hausdorff이므로

$$x \in U,\ y \in V,\ U \cap V = \varnothing$$

을 만족하는 $U, V \in \mathscr{T}_f$가 존재한다. 그런데 $U \neq \varnothing$, $V \neq \varnothing$이므로 U^c와 V^c는 유한집합이다. 그러므로

$$X = \varnothing^c = (U \cap V)^c = U^c \cup V^c = (\text{유한집합}) \cup (\text{유한집합}) = \text{유한집합}$$

이 되어 X는 유한집합이다.

($\Leftarrow$) 역으로 X가 유한집합이라 하자. 그러면 임의로 주어진 서로 다른 두 점 $x, y \in X$에 대하여 $U = \{x\}$, $V = \{y\}$라 하면 $U^c = X - U$와 V^c이 유한집합이므로 $U, V \in \mathscr{T}_f$이고

$$x \in U,\ y \in V,\ U \cap V = \varnothing$$

이다. 따라서 $(X, \mathscr{T}_f)$는 Hausdorff이다.

(2) ($\Rightarrow$) $(X, \mathscr{T}_c)$가 Hausdorff라 하자. 먼저 X가 한 점 집합이면 당연하므로, X가 두 점이상으로 이루어진 집합이라 하자. 그러면 서로 다른 두 점 $x, y \in X$에 대해 $(X, \mathscr{T}_c)$가 Hausdorff이므로

$$x \in U,\ y \in V,\ U \cap V = \varnothing$$

을 만족하는 $U, V \in \mathscr{T}_c$가 존재한다. 그런데 $U \neq \varnothing$, $V \neq \varnothing$이므로 U^c와 V^c는 가산집합이다. 그러므로

$$X = \varnothing^c = (U \cap V)^c = U^c \cup V^c = (\text{가산집합}) \cup (\text{가산집합}) = \text{가산집합}$$

이 되어 X는 가산집합이다.

($\Leftarrow$) 역으로 X가 가산집합이라 하자. 그러면 임의로 주어진 서로 다른 두 점 $x, y \in X$에 대하여 $U = \{x\}$, $V = \{y\}$라 하면 $U^c = X - U$와 V^c이 가산집합이므로 $U, V \in \mathscr{T}_c$이고

$$x \in U,\ y \in V,\ U \cap V = \varnothing$$

이다. 따라서 $(X, \mathscr{T}_c)$는 Hausdorff이다.

문제 7.1.15. (방법 1) 수축사상 $r\colon X \to A$이 연속이므로 $\tilde{r}\colon X \to A \hookrightarrow X$, $\tilde{r}(x) = r(x)$도 연속이다. 그리고 X가 Hausdorff이므로 $\Delta = \{(x, x) \in X \times X \mid x \in X\}$이 $X \times X$의 닫힌집합이다. 따라서 $h\colon X \to X \times X$, $h(x) = (\tilde{r}(x), x)$이 연속이므로 $A = h^{-1}(\Delta)$는 X의 닫힌집합이다.

(방법 2) A를 Hausdorff 공간 X의 수축이라 하자. 그러면 수축사상 $r\colon X \to A$이 존재한다. 이제 A가 X의 닫힌집합임을 귀류법을 이용하여 보이자. 만약 A가 닫힌집합이 아니면

$\overline{A} \neq A$이다. 따라서 점 $x \in \overline{A} - A$가 존재하고, $r(x) \neq x$이다. X가 Hausdorff이므로

$$x \in U,\ r(x) \in V,\ U \cap V = \varnothing$$

을 만족하는 열린집합 U와 V가 존재한다. 그리고 $r^{-1}(V)$이 x의 열린근방이므로 $U^* = U \cap r^{-1}(V)$도 x의 열린근방이고 $r(U^*) \subset V$, $U^* \cap V = \varnothing$이다. 그런데 $x \in \overline{A}$이므로 점 $a \in U^* \cap A$가 존재하여 $a = r(a) \in r(U^*) \subset V$이 되어 $a \in U^* \cap V$이다. 이는 $U^* \cap V = \varnothing$에 모순이다.

문제 7.1.17. (방법 1) f와 항등함수 $\mathrm{id}\colon Y \to Y$, $\mathrm{id}(y) = y$가 모두 연속이므로 $\varphi\colon X \times Y \to Y \times Y$, $\varphi(x, y) = (f(x), y)$도 연속이다. 그리고 Y가 Hausdorff이므로 $\Delta = \{(y, y) \in Y \times Y \mid y \in Y\}$이 $Y \times Y$의 닫힌집합이므로 $\Gamma(f) = \varphi^{-1}(\Delta)$는 $X \times Y$의 닫힌집합이다.

(방법 2) 우리는 $X \times Y - \Gamma(f)$가 $X \times Y$의 열린집합임을 보이면 된다. 임의의 점 $(x, y) \in X \times Y - \Gamma(f)$에 대해 $f(x) \neq y \in Y$이다. 그리고 Y가 Hausdorff이므로

$$f(x) \in U,\ y \in V,\ U \cap V = \varnothing$$

을 만족하는 Y의 열린집합 U와 V가 존재한다. 한편 f가 연속이므로 $f^{-1}(U)(\subset X)$는 x의 열린근방이 된다. 따라서 $f^{-1}(U) \times V$는 $X \times Y$의 열린집합으로서

$$(x, y) \in f^{-1}(U) \times V \subset X \times Y - \Gamma(f)$$

이다. 구체적으로 $(f^{-1}(U) \times V) \cap \Gamma(f) = \varnothing$임을 보이자: 만약 $(f^{-1}(U) \times V) \cap \Gamma(f) \neq \varnothing$이라 가정하면 $(a, b) \in (f^{-1}(U) \times V) \cap \Gamma(f)$가 존재한다. 먼저 $(a, b) \in \Gamma(f)$이므로 $f(a) = b$이다. 그리고 $f(a) \in U$이고 $b \in V$이므로 $f(a) = b \in U \cap V$이다. 이는 $U \cap V = \varnothing$이라는 사실에 모순이다.

문제 7.1.19. (방법 1) 임의의 $i < j$에 대하여 x_i와 y_j가 Hausdorff 공간 X의 서로 다른 점이므로

$$x_i \in U_{ij},\ x_j \in V_{ji},\ U_{ij} \cap V_{ji} = \varnothing$$

를 만족하는 열린집합 U_{ij}와 V_{ji}가 존재한다. 이제 각각의 i에 대하여

$$U_i = V_{i1} \cap V_{i2} \cap \cdots \cap V_{i(i-1)} \cap U_{i(i+1)} \cap \cdots \cap U_{in}$$

라 하면 U_i는 x_i의 열린근방이다. 그리고 임의로 주어진 $i \neq j$에 대하여 $i < j$라 하면

$$U_i \subset U_{ij},\quad U_j \subset V_{ji},\quad U_{ij} \cap V_{ji} = \varnothing$$

이므로 $U_i \cap U_j = \varnothing$이다.

(방법 2) 수학적 귀납법을 사용하여 보일 수 있다. 우리는 귀납법 가정으로서 다음을 만족하는 열린집합 $V_1, V_2, \ldots, V_{n-1}$이 존재한다고 가정하자:

$$x_i \in V_i, \quad V_i \cap V_j = \varnothing (i \neq j)$$

이제 각각의 $i = 1, 2, \ldots, n-1$에 대하여 $x_i \neq x_n$이므로

$$x_i \in W_i, \quad x_n \in O_i, \quad W_i \cap O_i = \varnothing$$

을 만족하는 열린집합 W_i, O_i가 존재한다. 이제

$$U_i = V_i \cap W_i \ (i = 1, \ldots, n-1)$$
$$U_n = O_1 \cap O_2 \cap \cdots \cap O_{n-1}$$

이라 하면 U_i는 열린집합으로서

$$x_i \in U_i, \quad U_i \cap U_j = \varnothing (i \neq j)$$

이다.

문제 7.1.21. (방법 1) 항등사상 $\mathrm{id}_X \colon X \to X$이 연속이고 $\mathrm{id}_X|_D = \mathrm{id}_D$이므로 $f|_D = \mathrm{id}_X|_D$이다. 그리고 $\overline{D} = X$이고 X가 Hausdorff이므로 문제 7.1.20에 의해 $f = \mathrm{id}_X$이다.

(방법 2) 먼저 f와 id_X가 연속이므로 $\varphi \colon X \to X \times X$, $\varphi(x) = (f(x), x)$도 연속이다. 한편 X가 Hausdorff 공간이므로 $\Delta = \{(x, x) \mid x \in X\}$가 $X \times X$의 닫힌집합이므로 $C = \varphi^{-1}(\Delta)$는 X의 닫힌집합이다. 그리고 $f|_D = \mathrm{id}_D$이므로 $D \subset C$이다. 따라서 $\overline{D} \subset C$이고 D가 X의 조밀한 부분집합이므로 $C = X$이다. 그러므로 $f = \mathrm{id}_X$이다.

문제 7.1.23. $f|_D \colon D \to Y$이 넣기사상이므로 $f|_D \colon D \to f(D)$은 위상동형사상이다. 그리고 $f|_D$의 연속인 역사상을 $g \colon f(D) \to D$라 하면 $g \circ f|_D = \mathrm{id}_D$이다.

(귀류법) $f(X - D) \subset Y - f(D)$이 성립하지 않는다고 가정하자. 그러면 $f(x) \in f(D)$인 $x \in X - D$가 존재하여 $g(f(x)) \in D$이므로 $g(f(x)) \neq x$이다. 한편 Hausdorff 공간 X의 부분공간 $A = D \cup \{x\}$도 Hausdorff이다. 그리고 D가 X의 조밀한 부분집합이므로

$$\mathrm{cl}_A(D) = A \cap \mathrm{cl}_X(D) = A \cap X = A$$

이 성립하여 D는 A의 조밀한 부분집합이다. $g \circ f|_A \colon A \to A$와 $\mathrm{id}_A \colon A \to A$는 모두 $g \circ f|_D \colon D \to D \hookrightarrow A$의 (연속인) 확장이다. 따라서 문제 7.1.22에 의해 $g \circ f|_A = \mathrm{id}_A$이다. 그런데 $g \circ f|_A(x) = g(f(x)) \neq x = \mathrm{id}_A(x)$이므로 모순이다.

문제 7.1.25. (1) 0의 임의의 열린근방 $U(\subset \mathbb{R})$에 대하여 $0 \in (-r, r) \subset U$인 양의 실수 r이 존재한다. 그러면 $\frac{r}{2} \in D \cap U$이므로 $D \cap U \neq \varnothing$이다. 따라서 $0 \in \overline{D}$이 되어 $\overline{D} = \mathbb{R}$이다.

(2) $\mathbb{R}$의 임의의 열린집합 U에 대하여

$$f^{-1}(U) = \begin{cases} (0,\infty), & -1 \notin U, 1 \in U \\ (-\infty,0), & -1 \in U, 1 \notin U \\ D, & -1, 1 \in U \\ \varnothing, & -1, 1 \notin U \end{cases}$$

이므로 $f^{-1}(U)$는 D의 열린집합이다. 따라서 $f\colon D \to \mathbb{R}$는 연속이다.

(3) (귀류법) f의 (연속인) 확장 $\tilde{f}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$이 존재한다고 가정하자.

(i) $\tilde{f}(0) = 1$인 경우는 $(0,2)$는 $\mathbb{R}$의 열린집합이지만, $(\tilde{f})^{-1}((0,2)) = [0,\infty)$은 $\mathbb{R}$의 열린집합이 아니다. 이는 $\tilde{f}$가 연속이라는 사실에 모순이다.

(ii) $\tilde{f}(0) = -1$인 경우는 $(-2,0)$는 $\mathbb{R}$의 열린집합이지만, $(\tilde{f})^{-1}((-2,0)) = (-\infty,0]$은 $\mathbb{R}$의 열린집합이 아니다. 이는 $\tilde{f}$가 연속이라는 사실에 모순이다.

(iii) $\tilde{f}(0) \neq 1, -1$인 경우는 $r = \min\{|\tilde{f}(0) - 1|, |\tilde{f}(0) - (-1)|\}$에 대하여 $U = (\tilde{f}(0) - r, \tilde{f}(0) + r)$은 $\mathbb{R}$의 열린집합이지만, $(\tilde{f})^{-1}(U) = \{0\}$은 $\mathbb{R}$의 열린집합이 아니다. 이는 $\tilde{f}$가 연속이라는 사실에 모순이다.

따라서 f의 확장 $\tilde{f}$는 존재하지 않는다.

7.2 정칙공간과 정규공간

문제 7.2.1. T_0-공간 X가 조건 (R)을 만족한다고 하자. 우리는 X가 T_1-공간임을 보이면 된다. 임의의 서로 다른 두 점 $x, y \in X$에 대하여 X가 T_0-공간이므로

$$x \in U,\ y \notin U \quad \text{또는} \quad x \notin U,\ y \in U$$

를 만족하는 열린집합 U가 존재한다. 우리는 $x \in U$, $y \notin U$이라 하자. 그러면 U^c은 닫힌집합이고 $x \notin U^c$이다. 한편 X가 조건 (R)을 만족하므로

$$x \in V,\ U^c \subset W,\ V \cap W = \varnothing$$

인 열린집합 V와 W가 존재한다. 더구나 $y \in U^c$이므로

$$x \in V,\ y \in W,\ V \cap W = \varnothing$$

이다. 따라서 X는 Hausdorff이므로 X는 T_1-공간이다.

문제 7.2.3. (1) ($\Leftarrow$) 먼저 X가 유한집합이면 X의 모든 부분집합이 유한집합이므로 $(X, \mathscr{T}_f)$는 이산공간이다. 따라서 $(X, \mathscr{T}_f)$는 정규이다.

(⇒) (대우) X가 무한집합이면 보기 7.1.8에 의해 $(X, \mathscr{T}_f)$는 Hausdorff가 아니다. 따라서 $(X, \mathscr{T}_f)$는 정규가 아니다.

(2) (⇐) 먼저 X가 가산집합이면 X의 모든 부분집합이 가산집합이므로 $(X, \mathscr{T}_c)$는 이산공간이다. 따라서 $(X, \mathscr{T}_c)$는 정규이다.

(⇒) (대우) X가 비가산집합이면 보기 7.1.8에 의해 $(X, \mathscr{T}_c)$는 Hausdorff가 아니다. 따라서 $(X, \mathscr{T}_c)$는 정규가 아니다.

(3) $(X, \mathscr{T}_f)$는 거리화가능 ⇒ $(X, \mathscr{T}_f)$는 정규 ⇒ X는 유한집합 ⇒ $(X, \mathscr{T}_f)$는 이산공간 ⇒ $(X, \mathscr{T}_f)$는 이산거리공간 ⇒ $(X, \mathscr{T}_f)$는 거리화가능.

(4) $(X, \mathscr{T}_c)$는 거리화가능 ⇒ $(X, \mathscr{T}_c)$는 정규 ⇒ X는 가산집합 ⇒ $(X, \mathscr{T}_c)$는 이산공간 ⇒ $(X, \mathscr{T}_c)$는 이산거리공간 ⇒ $(X, \mathscr{T}_c)$는 거리화가능.

문제 7.2.5. 먼저 X가 정칙이므로

$$x \in W,\ C \subset V,\ W \cap V = \varnothing$$

을 만족하는 X의 열린집합 U와 V가 존재한다. 그러면 $V \subset W^c$이고 W^c이 닫힌집합이므로 $\overline{V} \subset W^c$이다. 그리고 정리 7.2.5에 의하여 $x \in U \subset \overline{U} \subset W$를 만족하는 열린집합 U가 존재한다. 그리고 $V \subset W^c$이고 W^c이 닫힌집합이므로 $\overline{V} \subset W^c$이다. 따라서 $\overline{U} \cap \overline{V} = \varnothing$이므로 U와 V가 우리가 원하는 열린집합이다.

문제 7.2.7. 우리는 X가 조건 (R)을 만족함을 보이면 된다. 주어진 X의 열린집합 U와 점 $x \in U$에 대하여 부분공간 $\overline{V}_x$가 정칙인 x의 열린근방 V_x가 존재한다. 그러면 $x \in U \cap V_x$이고 $U \cap V_x$는 $\overline{V}_x$의 열린집합이다. 그리고 $\overline{V}_x$가 정칙이므로 $x \in W_* \subset \mathrm{cl}_{\overline{V}_x}(W_*) \subset U \cap V_x$를 만족하는 $\overline{V}_x$의 열린집합 W_*가 존재한다. 이제 $W_* = W \cap \overline{V}_x$를 만족하는 X의 열린집합 W가 존재하여 $O = W \cap V_x$는 X의 열린집합이다. 더구나 $\mathrm{cl}_{\overline{V}_x}(W_*) = \overline{W}_* \cap \overline{V}_x$이 X의 닫힌집합이고 $O \subset W_* \subset \mathrm{cl}_{\overline{V}_x}(W_*)$이므로 $\overline{O} \subset \mathrm{cl}_{\overline{V}_x}(W_*)$이다. 따라서

$$x \in O \subset \overline{O} \subset \mathrm{cl}_{\overline{V}_x}(W_*) \subset U \cap V_x \subset U$$

를 만족하는 X의 열린집합 O가 존재하므로 X는 조건 (R)을 만족한다.

문제 7.2.9. (T_1) 모든 $\alpha \in \Lambda$에 대해 X_α가 T_1이므로 성질 7.1.14에 의해 곱공간 $(\Pi_{\alpha\in\Lambda} X_\alpha, \mathscr{T}_p)$는 T_1이다. 그리고 $\mathscr{T}_p \subset \mathscr{T}_b$이므로 문제 7.1.2에 의해 상자공간 $(\Pi_{\alpha\in\Lambda} X_\alpha, \mathscr{T}_b)$도 T_1이다.

(R) 상자공간 $(\Pi_{\alpha\in\Lambda} X_\alpha, \mathscr{T}_b)$상의 열린집합 $W \in \mathscr{T}_b$와 점 $\mathbf{x} = (x_\alpha) \in W$에 대하여 $\mathbf{x} \in \Pi_{\alpha\in\Lambda} U_\alpha \subset W$인 기저의 원소 $\Pi_{\alpha\in\Lambda} U_\alpha \in \mathscr{B}_b$가 존재한다. 각각의 $\alpha \in \Lambda$에 대하여 U_α는 X_α의 열린집합으로서 $x_\alpha \in U_\alpha$이고 X_α가 정칙이므로 $x_\alpha \in V_\alpha \overline{V}_\alpha \subset U_\alpha$를 만족하는 X_α의 열린집합 V_α가 존재한다. 그러면 $V = \Pi_{\alpha\in\Lambda} V_\alpha (\in \mathscr{B}_b)$은 상자공간 $(\Pi_{\alpha\in\Lambda} X_\alpha, \mathscr{T}_b)$의 열린집합으로서

$$\mathbf{x} \in V = \Pi_{\alpha\in\Lambda} V_\alpha \subset \overline{V} = \overline{\Pi_{\alpha\in\Lambda} V_\alpha} = \Pi_{\alpha\in\Lambda} \overline{V}_\alpha \subset \Pi_{\alpha\in\Lambda} U_\alpha \subset W$$

를 만족한다(성질 6.2.4 참조). 따라서 상자공간 $(\Pi_{\alpha\in\Lambda}X_\alpha, \mathscr{T}_b)$은 정칙이다.

문제 7.2.11. 먼저 X가 정규이므로

$$A\subset U^*,\ C\subset V^*,\ U^*\cap V^*=\varnothing$$

을 만족하는 열린집합 U^*와 V^*가 존재한다. 또한 X가 정규이므로

$$A\subset U\subset\overline{U}\subset U^*,\quad C\subset V\subset\overline{V}\subset V^*$$

를 만족하는 열린집합 U와 V가 존재한다. 따라서 U와 V가 우리가 원하는 열린집합이다.

문제 7.2.13. 먼저 $F_1\cap F_2\cap\cdots\cap F_n=\varnothing$이므로 F_1과 $F_2\cap\cdots\cap F_n$은 서로소인 닫힌집합이다. 그리고 X가 정규이므로

$$F_1\subset V_1,\quad F_2\cap\cdots\cap F_n\subset W_1,\quad V_1\cap W_1=\varnothing$$

을 만족하는 열린집합 V_1, W_1이 존재한다. 그리고 $F_1\subset U_1\subset\overline{U}_1\subset V_1$을 만족하는 열린집합 U_1이 존재하여

$$\overline{U}_1\cap F_2\cap\cdots\cap F_n=\varnothing$$

을 만족한다.

한편 F_2와 $\overline{U}_1\cap F_3\cap\cdots\cap F_n$이 정규공간 X의 서로소인 닫힌집합이므로

$$F_2\subset V_2,\quad \overline{U}_1\cap F_3\cap\cdots\cap F_n\subset W_2,\quad V_2\cap W_2=\varnothing$$

을 만족하는 열린집합 V_2, W_2이 존재한다. 그리고 $F_2\subset U_2\subset\overline{U}_2\subset V_2$을 만족하는 열린집합 U_2가 존재하여

$$\overline{U}_1\cap\overline{U}_2\cap F_3\cap\cdots\cap F_n=\varnothing$$

을 만족한다.

이제 귀납법 가정으로 다음을 만족하는 열린집합 $U_1,\ldots,U_k$가 존재한다고 가정하자.

$$F_i\subset U_i,\quad \overline{U}_1\cap\cdots\cap\overline{U}_k\cap F_{k+1}\cap\cdots\cap F_n=\varnothing$$

그러면 F_{k+1}와 $\overline{U}_1\cap\cdots\cap\overline{U}_k\cap F_{k+2}\cap\cdots\cap F_n$이 서로소인 닫힌집합이므로

$$F_{k+1}\subset V_{k+1},\quad \overline{U}_1\cap\cdots\cap\overline{U}_k\cap F_{k+2}\cap\cdots\cap F_n\subset W_{k+1},\quad V_{k+1}\cap W_{k+1}=\varnothing$$

을 만족하는 열린집합 V_{k+1}, W_{k+1}이 존재한다. 그리고 $F_{k+1}\subset U_{k+1}\subset\overline{U}_{k+1}\subset V_{k+1}$을 만

족하는 열린집합 U_{k+1}가 존재하여

$$\overline{U}_1 \cap \cdots \overline{U}_{k+1} \cap F_{k+2} \cap \cdots \cap F_n = \varnothing$$

을 만족한다. 따라서 수학적 귀납법에 의하여

$$F_i \subset U_i, \quad \overline{U}_1 \cap \overline{U}_2 \cap \cdots \cap \overline{U}_n = \varnothing$$

을 만족하는 열린집합 $U_1, \ldots, U_n$이 존재한다.

문제 7.2.15. (1) 먼저 각각의 X_α가 공집합이 아니므로 한 점 $a_\alpha \in X_\alpha$를 택하자. 이제 임의의 고정된 $\alpha_0 \in \Lambda$에 대해 X_{α_0}이 정칙임을 보이자. 이를 위해

$$A_\alpha = \begin{cases} X_{\alpha_0}, & \alpha = \alpha_0 \\ \{a_\alpha\}, & \alpha \neq \alpha_0 \end{cases}$$

에 대해 $Y = \Pi_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha \subset \Pi_{\alpha\in\Lambda} X_\alpha$라 하자. 그러면 Y가 정칙공간 $\Pi_{\alpha\in\Lambda} X_\alpha$의 부분공간이므로 Y도 정칙이다.

이제 함수 $f\colon X_{\alpha_0} \to Y$, $f(x) = (x_\alpha)$를 $x_\alpha = \begin{cases} x, & \alpha = \alpha_0 \\ a_\alpha, & \alpha \neq \alpha_0 \end{cases}$로 정의하자. 그러면 f는 사영사상의 축소사상 $\pi_{\alpha_0}|\colon Y \to X_{\alpha_0}$을 역사상으로 갖는 위상동형사상이다. 따라서 $Y \cong X_{\alpha_0}$이고 Y가 정칙이므로 X_{α_0}도 정칙이다.

(2) 먼저 각각의 X_α가 공집합이 아니므로 한 점 $a_\alpha \in X_\alpha$를 택하자. 이제 임의의 고정된 $\alpha_0 \in \Lambda$에 대해 X_{α_0}이 정규임을 보이자. 이를 위해

$$A_\alpha = \begin{cases} X_{\alpha_0}, & \alpha = \alpha_0 \\ \{a_\alpha\}, & \alpha \neq \alpha_0 \end{cases}$$

에 대해 $Y = \Pi_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha \subset \Pi_{\alpha\in\Lambda} X_\alpha$라 하자. 한편 곱공간 ΠX_α이 T_1이므로 문제 7.1.14에 의해 모든 X_α도 T_1이다. 따라서 한 점 집합 $\{a_\alpha\}$이 X_α의 닫힌집합이므로 A_α는 X_α의 닫힌집합이다. 따라서 따름정리 6.1.27에 의해 $Y = \Pi_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha$는 곱공간 $\Pi_{\alpha\in\Lambda} X_\alpha$의 닫힌집합이다. 그리고 정규공간의 닫힌부분공간은 정규이므로 Y는 정규공간이다. 이제 함수 $f\colon X_{\alpha_0} \to Y$, $f(x) = (x_\alpha)$를 $x_\alpha = \begin{cases} x, & \alpha = \alpha_0 \\ a_\alpha, & \alpha \neq \alpha_0 \end{cases}$로 정의하자. 그러면 f는 사영사상의 축소사상 $\pi_{\alpha_0}|\colon Y \to X_{\alpha_0}$을 역사상으로 갖는 위상동형사상이다. 따라서 $Y \cong X_{\alpha_0}$이고 Y가 정규이므로 X_{α_0}도 정규이다.

문제 7.2.17. 편의상 $X=(\mathbb{R},\mathscr{T})$, $Y=(\mathbb{R},\mathscr{T})$이라 하자.

(1) 생략.

(2) 임의의 서로 다른 두 점 $x,y\in X$에 대해 $x<y$이라 하자. 그리고 $p=\frac{x+y}{2}$에 대해 $U=(x-1,p)$와 $V=(p,y+1)$는 기저의 원소이므로 X의 열린집합이고, $x\in U$, $y\in V$, $U\cap V=\varnothing$을 만족한다. 따라서 X는 Hausdorff이다.

(3) (귀류법) $\overline{\mathbb{Q}}\neq X$이라 가정하자. 그러면 점 $x\in X-\overline{\mathbb{Q}}$가 존재한다. 그리고 $X-\overline{\mathbb{Q}}$가 열린집합이므로 $x\in B\subset X-\overline{\mathbb{Q}}$인 기저의 원소 $B\in\mathscr{B}$가 존재하여야 한다. 그런데 B는 유리수를 항상 포함하는데 $X-\overline{\mathbb{Q}}$는 유리수를 포함하지 않으므로 모순이다. 따라서 $\overline{\mathbb{Q}}=X$이다.

(4) $\mathbb{Q}=\cup_{n=1}^{\infty}((-n,n)\cap\mathbb{Q})$이 기저의 원소들의 합집합으로 표현되므로 $\mathbb{Q}$는 X의 열린집합이다. 따라서 $\mathbb{Q}^c=X-\mathbb{Q}$는 X의 닫힌집합이다.

(5) $\mathbb{Q}^c$은 X의 닫힌집합이고 $0\notin\mathbb{Q}^c$이다. 이제 우리는

$$\mathbb{Q}^c\subset U,\ 0\in V,\ U\cap V=\varnothing$$

를 만족하는 열린집합 $U,V\in\mathscr{T}$가 존재하지 않음을 보이면 된다.

이를 위해 U와 V가 $\mathbb{Q}^c\subset U$, $0\in V$를 만족하는 X의 열린집합이라 하자. 그러면 $0\in B_1\subset V$를 만족하는 기저의 원소 $B_1\in\mathscr{B}$이 존재하여야 한다. 그리고 B_1이 어떤 형태든 $0\in(a,b)\cap\mathbb{Q}\subset V$를 만족하는 (a,b)가 존재한다. 이제 하나의 무리수 $q\in(a,b)$를 택하자. 그러면 $q\in U$이므로 $q\in B_2\subset U$를 만족하는 기저의 원소 $B_2\in\mathscr{B}$가 존재하여야 한다. 그리고 q가 무리수이므로 $B_2=(c,d)$ 형태이므로 $q\in(c,d)\subset U$인 (c,d)가 존재한다. 그러면 $(a,b)\cap(c,d)$는 q를 포함하는 열린구간이므로 무수히 많은 유리수를 포함한다. 따라서 $(c,d)\cap((a,b)\cap\mathbb{Q})\neq\varnothing$이므로 $U\cap V\neq\varnothing$이다.

(6) 먼저 $\mathbb{Q}$가 유클리드공간 Y의 조밀한 부분집합임을 상기하자. 그리고 f가 연속이므로 정리 5.1.4에 의해 $f(Y)=f(\mathrm{cl}_Y(\mathbb{Q}))\subset\mathrm{cl}_X(f(\mathbb{Q}))=\mathrm{cl}_X(\{0\})$이다. 그런데 (2)에 의해 X가 T_1이므로 한 점 집합 $\{0\}$은 X의 닫힌집합이고 $\mathrm{cl}_X(\{0\})=\{0\}$이다. 따라서 $f(Y)=\{0\}$이 되어 $f\equiv 0$이다.

(7) (3)에 의해 $\mathbb{Q}$는 X의 조밀한 부분집합이다. 그리고 f가 연속이므로 정리 5.1.4에 의해 $f(X)=f(\mathrm{cl}_X(\mathbb{Q}))\subset\mathrm{cl}_Y(f(\mathbb{Q}))=\mathrm{cl}_Y(\{0\})=\{0\}$이다. 따라서 $f(X)=\{0\}$이 되어 $f\equiv 0$이다.

(8) 먼저 $\mathbb{Q}^c$가 Y의 조밀한 부분집합임을 상기하자. 그리고 f가 연속이므로 정리 5.1.4에 의해 $f(Y)=f(\mathrm{cl}_Y(\mathbb{Q}^c))\subset\mathrm{cl}_X(f(\mathbb{Q}^c))=\mathrm{cl}_X(\{0\})$이다. 그런데 (2)에 의해 X가 T_1이므로 한 점 집합 $\{0\}$은 X의 닫힌집합이고 $\mathrm{cl}_X(\{0\})=\{0\}$이다. 따라서 $f(Y)=\{0\}$이 되어 $f\equiv 0$이다.

(9) (귀류법) 만약 $f(p)\neq 0$인 $p\in\mathbb{Q}$가 존재한다고 가정하자. 이제 $q=f(p)$이라 하고 $\delta=\frac{|q|}{4}$라 하자. 그러면 $0\notin(q-\delta,q+\delta)$이다. 한편 $(q-\delta,q+\delta)$가 q를 포함하는 Y의 열린집합이므로 $p\in f^{-1}((q-\delta,q+\delta))\in\mathscr{T}$이다. 따라서 $p\in B_1\subset f^{-1}((q-\delta,q+\delta))$를 만족하는 기저의 원소 $B_1\in\mathscr{B}$가 존재한다. 그리고 B_1이 어떤 형태든 $p\in(a,b)\cap\mathbb{Q}\subset f^{-1}((q-\delta,q+\delta))$를

만족하는 (a, b)가 존재한다. 이제 하나의 무리수 $x \in (a, b)$를 택하자. 그러면 $f(x) = 0$이므로 $(-\delta, \delta)$는 $f(x) = 0$을 포함하는 Y의 열린집합이다. 그러면 $x \in f^{-1}((-\delta, \delta)) \in \mathscr{T}$이므로 $x \in B_2 \subset f^{-1}((-\delta, \delta))$를 만족하는 기저의 원소 $B_2 \in \mathscr{B}$가 존재한다. 그리고 x가 무리수이므로 $B_2 = (c, d)$ 형태이다. 그러면 $(a, b) \cap (c, d)$는 x를 포함하는 열린구간이므로 무수히 많은 유리수를 포함한다. 이 중 하나를 y라 하면 $y \in ((a, b) \cap \mathbb{Q}) \cap (c, d)$이므로 $f(y) \in (q - \delta, q + \delta) \cap (-\delta, \delta)$이다. 그런데 이는 $(q - \delta, q + \delta) \cap (-\delta, \delta) = \varnothing$에 모순이다.

제 8 장

연결성

8.1 연결성(connectedness)

문제 8.1.1. (1) 만약 $(X, \mathscr{T}_1)$이 비연결이면 $(X, \mathscr{T}_1)$의 열린분리 $\{U, V\}$가 존재한다. 그리고 $\mathscr{T}_1 \subset \mathscr{T}_2$이므로 $U, V \in \mathscr{T}_2$이 되어 U, V는 $(X, \mathscr{T}_2)$의 열린집합이다. 따라서 $\{U, V\}$는 $(X, \mathscr{T}_2)$의 열린분리도 되므로 $(X, \mathscr{T}_2)$는 비연결이다.

(2)는 (1)의 대우이다.

(3) (보기1) $X = \{a, b, c\}$, $\mathscr{T}_1 = \{\varnothing, X\}$, $\mathscr{T}_2 =$이산위상.

(보기2) 유클리드공간 $(\mathbb{R}, \mathscr{U})$과 하극한공간 $(\mathbb{R}, \mathscr{T}_l)$.

문제 8.1.3. (i) X는 연결이다: 공집합이 아닌 X의 열린집합 U와 V는 항상 0을 포함하므로 $0 \in U \cap V \neq \varnothing$이다. 따라서 X의 열린분리가 존재하지 않는다. 그러므로 X는 연결이다.

(ii) 부분공간 $Y = X - \{0\}$는 비연결이다: $U = \{0, 1\}$와 $V = \mathbb{R} - \{1\}$은 X의 열린집합이다. 그러면 $U^* = \{1\} = U \cap Y$와 $V^* = \mathbb{R} - \{0, 1\} = V \cap Y$는 Y의 열린집합으로서

$$1 \in U^* \neq \varnothing,\ 2 \in V^* \neq \varnothing,\ U^* \cap V^* = \varnothing,\ U^* \cap V^* = Y$$

를 만족한다. 따라서 $\{U^*, V^*\}$는 부분공간 Y의 열린분리이므로 Y는 비연결이다.

문제 8.1.5. 자연수 $n \in \mathbb{N}$에 대하여

$$B_n = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$$

이라 하자.

(i) 우리는 먼저 수학적 귀납법을 사용하여 B_n들이 연결임을 보이자: 먼저 $B_1 = A_1$은 가정에 의하여 연결이다. 이제 B_n이 연결이라고 가정하자. 그러면 $A_n \cap A_{n+1} \subset B_n \cap A_{n+1}$이므로 $B_n \cap A_{n+1} \neq \varnothing$이다. 그리고 A_{n+1}, B_n이 연결이므로 $B_{n+1} = B_n \cup A_{n+1}$도 연결이

다(정리 8.1.19). 따라서 수학적 귀납법에 의하여 모든 자연수 $n \in \mathbb{N}$에 대하여 B_n은 연결이다.

(ii) 한편 $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$이므로 우리는 $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$이 연결임을 보이면 충분하다. 그런데

$$B_1 \subset B_2 \subset \cdots \subset B_n \subset \cdots$$

이므로

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n = B_1 = A_1 \neq \varnothing$$

이다. ($A_1 \cap A_2 \neq \varnothing$이므로 A_1이 공집합이 될 수 없다.) 따라서 $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$도 연결이다.

문제 8.1.7. $h = (\mathrm{id}_X, f)\colon X \to X \times Y$, $h(x) = (x, f(x))$의 성분함수가 모두 연속이므로 h도 연속이다. 따라서 X가 연결공간이므로 $f(X) = \Gamma(f)$도 연결이다(정리 8.1.11).

문제 8.1.9. (i) 먼저 $(0,1)$와 $(0,1]$이 위상동형이 아님을 보이자: 만약 $(0,1)$와 $(0,1]$이 위상동형이라 가정하면 위상동형사상 $g\colon (0,1] \to (0,1)$가 존재한다. 그리고 이제 $p = g(1) \in (0,1)$이라 하자. 그러면 축소함수

$$g|\colon (0,1) = (0,1] - \{1\} \to (0,1) - \{p\}$$

도 위상동형사상이 되므로 $(0,1) \cong (0,1) - \{p\}$이다. 그런데 $(0,1)$은 연결이고 $(0,1) - \{p\}$는 비연결이므로 모순이다. 따라서 $(0,1] \ncong (0,1)$이다.

(ii) 이제 $(0,1)$와 $[0,1]$이 위상동형이 아님을 보이자: 만약 $(0,1)$와 $[0,1]$이 위상동형이라 가정하면 위상동형사상 $g\colon [0,1] \to (0,1)$가 존재한다. 그리고 이제 $p = g(1) \in (0,1)$이라 하자. 그러면 축소함수

$$g|\colon [0,1) = [0,1] - \{1\} \to (0,1) - \{p\}$$

도 위상동형사상이 되므로 $[0,1) \cong (0,1) - \{p\}$이다. 그런데 $[0,1)$은 연결이고 $(0,1) - \{p\}$는 비연결이므로 모순이다. 따라서 $[0,1] \ncong (0,1)$이다.

(iii) 끝으로 $(0,1]$와 $[0,1]$이 위상동형이 아님을 보이자: 만약 $(0,1]$와 $[0,1]$이 위상동형이라 가정하면 위상동형사상 $g\colon [0,1] \to (0,1]$가 존재한다. 이제 $p = g(0), q = g(1) \in (0,1)$이라하면 $p \neq q$이다. 그리고 축소함수

$$g|\colon (0,1) = [0,1] - \{0,1\} \to (0,1] - \{p,q\}$$

도 위상동형사상이 되므로 $(0,1) \cong (0,1] - \{p,q\}$이다. 그런데 $(0,1)$은 연결이고 $(0,1] - \{p,q\}$는 비연결이므로 모순이다. 따라서 $[0,1] \ncong (0,1]$이다.

문제 8.1.11. (귀류법) X가 비연결이라 가정하자. 그러면 X의 열린분리 U와 V가 존재한다. 먼저 U와 V가 공집합이 아니므로 $f(U)$와 $f(V)$는 공집합이 아니다. 그리고 f가 열린사상이므로 $f(U)$와 $f(V)$는 Y의 열린집합이다. 또한 f가 전사이므로

$$f(U) \cup f(V) = f(U \cup V) = f(X) = Y$$

이다. 한편 Y가 연결이므로 $f(U) \cap f(V) \neq \varnothing$이 되어야 한다. 이제 $y \in f(U) \cap f(V)$라 하면 $f(u) = y$, $f(v) = y$인 $u \in U$와 $v \in V$가 존재하여 $u, v \in f^{-1}(y)$이다. 따라서 $\{f^{-1}(y) \cap U, f^{-1}(y) \cap V\}$는 $f^{-1}(y)$의 열린분리가 된다. 이는 $f^{-1}(y)$이 연결이라는 가정에 모순이다. 그러므로 X는 연결이다.

문제 8.1.13. 먼저

$$A = \{(x, \sin\frac{1}{x}) \mid 0 < x\}, \quad B = \{(x, \sin\frac{1}{x}) \mid x < 0\}$$

라 하면 위상동형사상

$$\begin{aligned} &f\colon (0,\infty) \to A, \quad x \mapsto (x, \sin\tfrac{1}{x}),\\ &f^{-1} = \pi_1\colon A \to (0,\infty), \quad (x, \sin\tfrac{1}{x}) \mapsto x,\\ &g\colon (-\infty,0) \to B, \quad x \mapsto (x, \sin\tfrac{1}{x}),\\ &g^{-1} = \pi_1\colon B \to (-\infty,0), \quad (x, \sin\tfrac{1}{x}) \mapsto x \end{aligned}$$

이 존재하여 $A \cong (0,\infty)$이고 $B \cong (-\infty,0)$이다. 그리고 $(0,\infty)$, $(-\infty,0)$이 모두 연결이므로 A, B도 모두 연결이다. 한편

$$\begin{aligned} A \subset \{(0,0)\} \cup A \subset \overline{A} = (\{0\} \times [-1,1]) \cup A,\\ B \subset \{(0,0)\} \cup B \subset \overline{B} = (\{0\} \times [-1,1]) \cup B \end{aligned}$$

이므로 $\{(0,0)\} \cup A$와 $\{(0,0)\} \cup B$는 연결이다. 그리고

$$(\{(0,0)\} \cup A) \cap (\{(0,0)\} \cup B) = \{(0,0)\} \neq \varnothing$$

이므로 $X = (\{(0,0)\} \cup A) \cup (\{(0,0)\} \cup B)$는 연결이다.

문제 8.1.15. $\mathbb{R}$이 연결이고 $\mathbb{Q}^c$이 $\mathbb{R}$의 진부분집합이므로 문제 8.1.12에 의해

$$X = (\mathbb{Q} \times \mathbb{R}) \cup (\mathbb{R} \times \mathbb{Q}) = (\mathbb{R} \times \mathbb{R}) - (\mathbb{Q}^c \times \mathbb{Q}^c)$$

은 연결이다.

문제 8.1.17. (i) 먼저 $(-\infty, 0)$과 $(0, \infty)$상의 $\mathbb{R}_K$의 부분공간위상이 유클리드 공간 $\mathbb{R}$의 부분공간 위상과 같음을 보이자: 이를위해 $\mathscr{U}$를 집합 $\mathbb{R}$상의 보통위상이라 하고, $\mathscr{T}_K$를 집합 $\mathbb{R}$상의 K-위상이라 하자. 그리고 $\mathscr{B}$와 $\mathscr{B}_K$를 각각 $\mathscr{U}$와 $\mathscr{T}_K$의 기저라 하자. 또한 $X = (-\infty, 0)$, $Y = (0, \infty)$라 하자.

먼저 $\mathscr{U} \subset \mathscr{T}_K$이므로 두 부분공간위상은 $\mathscr{U}_X \subset (\mathscr{T}_K)_X$이다. 이제 만약 $V \in (\mathscr{B}_K)_X$이면

$$V = (a, b) \cap (-\infty, 0) \quad \text{또는} \quad V = [(a, b) - K] \cap (-\infty, 0)$$

를 만족하는 기저 $\mathscr{B}_K$의 원소 (a, b) 또는 $(a, b) - K$가 존재한다. 그런데 $(a, b) \cap (-\infty, 0)$와 $[(a, b) - K] \cap (-\infty, 0)$는 모두 $(c, d) \in \mathscr{B}$ 형태이므로 $\mathscr{B}_X \subset (\mathscr{B}_K)_X$이다. 따라서 $(\mathscr{T}_K)_X \subset \mathscr{U}_X$이다. 그러므로 $(\mathscr{T}_K)_X = \mathscr{U}_X$이다.

또한 $\mathscr{U} \subset \mathscr{T}_K$이므로 두 부분공간위상은 $\mathscr{U}_Y \subset (\mathscr{T}_K)_Y$이다. 이제 $V \in (\mathscr{B}_K)_Y$이고 $x \in V$라 하자. 그러면

$$x \in V = (a, b) \cap (0, \infty) \quad \text{또는} \quad x \in V = [(a, b) - K] \cap (0, \infty)$$

를 만족하는 기저 $\mathscr{B}_K$의 원소 (a, b) 또는 $(a, b) - K$가 존재한다. 먼저 $V = (a, b) \cap (0, \infty)$인 경우는 $V = (c, d) \in \mathscr{B}$ 형태이므로 $V \in \mathscr{B}_Y$이다. 이제 $V = [(a, b) - K] \cap (0, \infty)$인 경우를 생각하자. 만약 $x > 1$이면 $x \in (c, d) = (a, b) \cap (1, \infty) \subset V$인 $(c, d) \in \mathscr{B}$가 존재한다. 그리고 $0 < x < 1$이면 $\frac{1}{n} < x < \frac{1}{n+1}$인 자연수 $n \in \mathbb{N}$이 존재하여 $x \in (c, d) = (a, b) \cap (\frac{1}{n}, \frac{1}{n+1}) \subset V$인 $(c, d) \in \mathscr{B}$가 존재한다. 따라서 정리 3.2.9에 의해 $(\mathscr{T}_K)_Y \subset \mathscr{U}_Y$이다. 그러므로 $(\mathscr{T}_K)_Y = \mathscr{U}_Y$이다.

(ii) 유클리드공간 $\mathbb{R}$의 부분공간 $X = (-\infty, 0)$, $Y = (0, \infty)$가 모두 연결이므로 (i)에 의해 $\mathbb{R}_K$의 부분공간 X와 Y도 모두 연결이다.

(iii) 이제 $\mathbb{R}_K$가 연결임을 보이자: 먼저 $0 \in \overline{X} = \mathrm{cl}_{\mathbb{R}_K}(X)$이고 $0 \in \overline{Y} = \mathrm{cl}_{\mathbb{R}_K}(Y)$임을 보이자. $0 \in (a, b)$인 기저의 원소 $(a, b) \in \mathscr{B}_K$에 대하여 $(a, b) \cap X \neq \varnothing$, $(a, b) \cap Y \neq \varnothing$이다. 또한 $0 \in (a, b) - K$인 기저의 원소 $(a, b) - K \in \mathscr{B}_K$에 대하여 $[(a, b) - K] \cap X \neq \varnothing$, $[(a, b) - K] \cap Y \neq \varnothing$이다. 따라서 $0 \in \overline{X}$이고 $0 \in \overline{Y}$이다.

한편 X와 Y가 연결이고 $X \subset X \cup \{0\} \subset \overline{X}$, $Y \subset Y \cup \{0\} \subset \overline{Y}$이므로 $X \cup \{0\}$와 $Y \cup \{0\}$는 모두 연결이다. 그리고 $0 \in (X \cup \{0\}) \cap (Y \cup \{0\}) \neq \varnothing$이므로 $\mathbb{R}_K = (X \cup \{0\}) \cup (Y \cup \{0\})$도 연결이다.

문제 8.1.19. (귀류법) 만약 $C \cap \partial A = \varnothing$이라 가정하면

$$C \cap A^\circ = C \cap A, \quad C \cap e(A) = C \cap (X - A)$$

이다. 따라서 $\{C \cap A, C \cap (X - A)\}$는 C의 열린분리가 된다. 이는 C가 연결이라는 가정에 모순이다.

문제 8.1.21. 모든 자연수 k에 대해

$$C_k = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = \tfrac{1}{k}x,\ 0 \le x \le 1\},$$
$$D = \{(1,0)\}$$

라 하자. 그러면 유클리드공간 $\mathbb{R}^2$의 부분공간 $X = (\cup_{k=1}^{\infty} C_k) \cup D$는 연결공간이다. 이제 자연수 n에 대해 $A_n = (\cup_{k=n}^{\infty} C_k) \cup D$라 하면 A_n은 X의 연결된 부분집합이고

$$A_1 \supset A_2 \supset \cdots \supset A_n \supset A_{n+1} \supset \cdots$$

이다. 하지만 $\cap_{n=1}^{\infty} A_n = \{(0,0),(1,0)\}$은 비연결이다.

8.2 연결성분(connected component)

문제 8.2.1. (귀류법) X와 Y가 위상동형이라 가정하자. 그러면 위상동형사상 $f\colon Y \to X$가 존재한다. 이제 Y의 가운데 점 $b \in Y$를 택하여 $a = f(b) \in X$라 하자. 그러면 축소사상 $f|\colon Y - \{b\} \to X - \{a\}$도 위상동형사상이므로 $Y - \{b\}$와 $X - \{a\}$도 서로 위상동형이다. 그런데 $Y - \{b\}$의 연결성분은 3개이고, $X - \{a\}$의 연결성분은 많아야 2개이므로 모순이다. 따라서 X와 Y는 위상동형이 아니다.

문제 8.2.3. (i) C, G, L, N, S는 서로 위상동형이다.

(ii) D, O는 서로 위상동형이다.

(iii) E, F, T는 서로 위상동형이다.

(iv) A, R는 서로 위상동형이다.

(v) B, K, P, X는 서로 위상동형인 것이 없다.

문제 8.2.5. (1) 서로 다른 두 점 $1, 2 \in \mathbb{R}$을 분리하는 열린집합이 존재하지 않는다. 구체적으로 두 열린집합 U, V가 $1 \in U$, $2 \in V$이면 U와 V가 공집합이 아니므로 $0 \in U$, $0 \in V$이다. 따라서 $U \cap V \neq \varnothing$이다.

(2) 공집합이 아닌 임의의 두 열린집합 U, V에 대해 $0 \in U$, $0 \in V$이므로 $U \cap V \neq \varnothing$이다. 따라서 X의 열린분리가 존재하지 않으므로 X는 연결이다.

(3) $U = [0,\infty), V = (-\infty, 0] \in \mathscr{T}$이므로 $U^* = (0,\infty)$, $V^* = (-\infty,0)$은 부분공간 $X - \{0\}$의 열린분리이다. 따라서 부분공간 $X - \{0\}$은 연결이 아니다.

(4) 임의의 점 $x \in X - \{0\}$에 대해 $\{0,x\} \in \mathscr{T}$이므로 $\{x\} = \{0,x\} \cap (X - \{0\})$은 부분공간 $X - \{0\}$의 열린집합이다. 따라서 부분공간 $X - \{0\}$은 이상위상을 갖는다. 그러므로 부분공간 $X - \{0\}$의 연결성분은 모든 한 점 집합들이다.

문제 8.2.7. $\mathbb{R}_l$의 열결성분은 모든 한 점 집합들이다: 만약 $A \subset \mathbb{R}_l$가 두 점 이상으로 이루어진 부분집합이면 서로 다른 두 점 $a, b \in A$가 존재한다. 우리는 일반성을 잃지 않고 $a < b$라 할 수 있다. 그러면 $U = (-\infty, b) \cap A$와 $V = [b, \infty) \cap A$는 A의 열린분리가 되므로 A는 연결이 아니다. 따라서 $\mathbb{R}_l$의 열결성분은 한 점 집합들 뿐이다.

문제 8.2.9. $\mathbb{Q}^2$의 열결성분은 모든 한 점 집합들이다:
(귀류법) 두 점 이상으로 이루어진 연결된 부분집합 $A \subset \mathbb{Q}^2$가 존재한다고 가정하자. 그러면 서로 다른 두 점 $(a, b), (c, d) \in A$가 존재하여 $a \neq c$ 또는 $\neq d$이다. 우리는 일반성을 잃지 않고 $a \neq c$이고 $a < c$이라 할 수 있다. 또한 사영사상

$$\pi_1 : \mathbb{Q}^2 = \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}, \quad \pi_1(x, y) = x$$

이 연속이므로 $B = \pi_1(A) \subset \mathbb{Q}$는 두 점 이상으로 이루어진 연결된 부분집합이다. 특별히 $a, c \in B$이다. 한편 무리수의 조밀성에 의해 $a < p < c$를 만족하는 무리수 $p \in \mathbb{Q}^c$가 존재한다. 그러면 $U = (-\infty, p) \cap B$와 $V = (p, \infty) \cap B$는 B의 열린분리가 되므로 B는 연결이 아니다. 이는 B가 연결이라는 사실에 모순이다. 따라서 $\mathbb{Q}^2$의 열결성분은 한 점 집합들 뿐이다.

문제 8.2.11. $f : X \to Y$가 전사인 연속사상이므로 축소사상

$$f| : X - f^{-1}((0,0)) \to Y - \{(0,0)\}$$

도 전사인 연속사상이다. 그리고 문제 8.2.10에 의해 $Y - \{(0,0)\}$가 4개의 연결성분을 가지므로 $X - f^{-1}((0,0))$는 적어도 4개의 연결성분을 가져야 한다. 따라서 $f^{-1}((0,0))$는 적어도 세 점을 포함하여야 한다.

문제 8.2.13. (1) 열린집합 A^c이 가산개의 열린구간들의 합집합으로 표현되므로 A의 연결성분 C는 한 점 집합 $\{p\}$이거나 닫힌구간 $[a, b]$ $(-\infty, a]$, $[a, \infty)$ 꼴 중 하나이다. 먼저 $C = \{p\}$인 경우는 $p \in C \cap \partial(A)$이고, 나머지 경우는 $a \in C \cap \partial(A)$이다.

(2) 먼저 $A_i = \varnothing$이면 $C = \mathbb{R}$로 택하면 된다. 이제 $A_i \neq \varnothing$이라 하자. 그리고 $A_j \neq \varnothing (i \neq j)$이라 하자. 그러면 $\mathbb{R}$이 정규이므로 $A_i \subset U$, $A_j \subset V$를 만족하는 서로소인 열린집합 U, V가 존재한다. 이제 한 점 $x \in A_j \subset V$을 택하여 C를 x를 포함하는 $\overline{V}$의 연결성분이라 하자. 그러면 V가 가산개의 열린구간들의 합집합으로 표현되므로 C는 닫힌구간이 된다. 그리고 당연히 $C \cap A_i = \varnothing$이고 $C \cap A_j \neq \varnothing$이다. 한편 (1)에 의해 $C \cap \partial(\overline{V}) \neq \varnothing$이고 $A_j \subset V \subset (\overline{V})^\circ$이므로 $[C \cap \partial(\overline{V})] \cap A_j = \varnothing$이다. 따라서 임의의 점 $y \in C \cap \partial(\overline{V})$를 택하며 y를 포함하는 유일한 $A_k (k \neq i, j)$가 존재하여 $C \cap A_k \neq \varnothing$이다. (참고: $C \cap A_j \neq \varnothing$, $C \cap A_k \neq \varnothing$이다.)

(3) (귀류법) 적어도 두 개의 A_n이 공집합이 아니라 가정하자. 먼저 (2)에 의하여 $C_1 \cap A_1 = \varnothing$이고 적어도 두 개의 A_n에 대하여 $C_1 \cap A_n \neq \varnothing$인 닫힌구간 C_1이 존재한다. 이제 $C_1 \cap A_n$은 C_1의 쌍마다 서로소인 닫힌집합들로서 $C_1 = \cup_{n=1}^{\infty} (C_1 \cap A_n)$이고 적어도 두

개의 $C_1 \cap A_n$이 공집합이 아니다. 따라서 (2)와 같은 방법으로 닫힌구간 $C_2 \subset C_1$이 존재하여 $C_2 \cap (C_1 \cap A_2) = C_2 \cap A_2 = \varnothing$이고 적어도 두 개의 $C_2 \cap (C_1 \cap A_n) = C_2 \cap A_n$이 공집합이 아니다. 이와 같은 방법을 계속 하면 우리는 닫힌구간들의 수열 C_n이 존재하여 $C_n \supset C_{n+1}$이고 $C_n \cap A_n = \varnothing$이다. 그러면 $C = \cap_{n=1}^{\infty} C_n$은 공집합이 아닌 닫힌집합이다. 그런데 $C \cap A_n = \varnothing (\forall n)$이므로

$$C = C \cap \mathbb{R} = C \cap (\cup_{n=1}^{\infty} A_n) = \cup_{n=1}^{\infty}(C \cap A_n) = \varnothing$$

이 되어 모순이다.

(4) 주어진 D_i에 대해

$$A_i = \begin{cases} D_i, & p, q \notin D_i \\ (-\infty, p] \cup D_i, & p \in D_i, q \notin D_i \\ D_i \cup [q, \infty), & p \notin D_i, q \in D_i \\ (-\infty, p] \cup D_i \cup [q, \infty), & p, q \in D_i \end{cases}$$

이라 하면 A_i는 $\mathbb{R}$의 닫힌집합이고, $\{A_i\}$는 쌍마다 서로소이고 이들의 합집합은 $\mathbb{R}$이 된다. 그러면 (3)에 의해 단 하나의 A_k는 $\mathbb{R}$이고 이를 제외한 나머지 A_i는 공집합이다. 그리고 A_i의 정의에 의해 $D_k = [p, q]$이고 이를 제외한 나머지 D_i는 공집합이다.

문제 8.2.15. (1) 임의로 주어진 점 $y \in Y$와 y의 근방 N에 대하여 $y \in U \subset N$인 y의 열린근방 U가 존재한다. 그리고 p가 전사이므로 $f(x) = y$인 $x \in X$가 존재한다. 또한 p가 연속이므로 $p^{-1}(U)$는 x의 열린근방이다. 그리고 X가 국소연결이므로 $x \in V \subset p^{-1}(U)$인 연결된 열린집합 V가 존재한다. 더구나 p가 전사이므로

$$y = p(x) \in p(V) \subset p(p^{-1}(U)) = U \subset N$$

을 만족한다. 그리고 p가 연속인 열린사상이고 V가 연결된 열린집합이므로 $p(V)$도 연결된 열린집합이다. 따라서 Y는 국소연결이다.

(2) 정리 8.2.11에 의해 Y의 열린집합 U의 연결성분 C가 열린집합임을 보이면 된다. 이제 축소사상 $p|: p^{-1}(U) \to U$를 생각하자. 임의의 점 $x \in p^{-1}(C) \subset p^{-1}(U)$에 대해 X가 국소연결이므로 $p^{-1}(U)$의 연결성분 C_x는 열린집합이다. 그리고 p가 전사이므로 $p(x) \in p(p^{-1}(C)) = C$이고 $C_{p(x)} = C$이다. 또한 p가 연속이므로 $p(C_x)$는 연결이고 $p(C_x) \subset C_{p(x)} = C$이다. 그러므로 $C_x \subset p^{-1}(C) \subset p^{-1}(U)$이다. 따라서 $p^{-1}(C) = \cup\{C_x \mid x \in p^{-1}(C)\}$는 열린집합이다. 그리고 p가 닫힌사상이므로 $p(p^{-1}(C)^c)$는 Y의 닫힌집합이다. 그런데

$$p(p^{-1}(C)^c) = p(p^{-1}(C^c)) = C^c$$

이므로 C는 Y의 열린집합이다. 따라서 정리 8.2.11에 의해 Y는 국소연결이다.

문제 8.2.17. 아니오. X는 점 $(0,0)$에서 국소연결이 아니다.

8.3 연결성의 응용

문제 8.3.1. X를 비연결공간이라 가정하면 X의 열린분리 $\{U,V\}$가 존재한다. 그리고 $U \neq \varnothing$, $V \neq \varnothing$이므로 $a \in U$, $b \in V$가 존재한다. 이제

$$f\colon X \to X, \quad f(x) = \begin{cases} b, & x \in U \\ a, & x \in V \end{cases}$$

이라 하자. 그러면 X의 임의의 열린집합 W에 대하여

$$f^{-1}(W) = \begin{cases} \varnothing, & a, b \notin W \\ V, & a \in W, b \notin W \\ U, & a \notin W, b \in W \\ X, & a, b \in W \end{cases}$$

이므로 f는 연속이다. 그리고 $U \cap V = \varnothing$이므로 f는 고정점을 갖지 않는다.

문제 8.3.3. 유클리드공간 $\mathbb{R}$은 연결이고 $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x+1$은 고정점을 갖지 않는 연속사상이다.

문제 8.3.5. $f\colon S^1 \to [a,b]$가 전사인 연속사상이므로 축소사상 $f|\colon S^1 - f^{-1}(c) \to [a,b] - \{c\}$도 전사인 연속사상이다. 그리고 $[a,b]-\{c\}$이 비연결이므로 $S^1 - f^{-1}(c)$도 비연결이 되어야 한다. (왜냐하면 만약 $S^1 - f^{-1}(c)$가 연결이라 가정하면 $f|(S^1 - f^{-1}(c)) = [a,b]-\{c\}$도 연결이되어 모순이다.) 따라서 $f^{-1}(c)$는 두 점 이상으로 이루어진 집합이 되어야 한다.

문제 8.3.7. (1) 먼저 $X = \mathbb{R}^n - \mathbb{Q}^n$ 임을 유의하자. 그리고 $\mathbb{Q}^n$ 이 가산집합이므로 정리 8.3.5에 의해 X는 연결이다.

(2) 먼저 $Y = (\mathbb{Q}^c)^n$ 임을 주의하자. 이제

$$U = \{\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in Y \mid x_1 > 0\},$$
$$V = \{\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in Y \mid x_1 < 0\}$$

이라 하면 $\{U,V\}$는 X의 열린분리이다. 따라서 X는 비연결이다.

8.4 길연결성(path connectedness)

문제 8.4.1. (1) (2) $\sim_p$가 위상공간 X상의 동치관계이므로 성질 1.3.3에 의해 성립한다.

(3) P_x는 x를 포함하는 가장 큰 길연결된 부분집합이다: A를 x를 포함하는 X의 길연결된 부분집합이라 하자. 그러면 임의의 점 $y \in A$에 대하여 A가 길연결이므로 길

$$\alpha\colon I \to A \ \text{s.t.}\ \alpha(0) = x,\ \alpha(1) = y$$

가 존재한다. 따라서 $x \sim_p y$이므로 $y \in P_x$이다. 그러므로 $A \subset P_x$이다.

(4) 임의의 길연결된 부분집합은 하나의 길연결성분에 포함된다: A를 X의 길연결된 부분집합이라 하자. 그리고 $x \in A$이라 하자. 그러면 (3)에 의해서 $A \subset P_x$이고, (1)에 의해 이러한 P_x는 유일하다.

(5) 위상동형인 두 위상공간은 같은 개수의 길연결성분을 갖는다: 두 위상공간 X와 Y가 위상동형이라 하자. 그러면 위상동형사상 $f\colon X \to Y$가 존재한다. 먼저 임의의 점 $x \in X$에 대하여 $f(P_x) = P_{f(x)}$임을 보이자. 정리 8.4.7과 (3)에 의하여 $f(P_x)$는 Y의 길연결된 부분집합이다. 그리고 $f(x) \in f(P_x)$이므로 (3)에 의하여 $f(P_x) \subset P_{f(x)}$이다. 같은 방법으로(f 대신 f^{-1}를 생각하면)

$$f^{-1}(P_{f(x)}) \subset P_{f^{-1}(f(x))} = P_x$$

임을 보일 수 있으므로

$$P_{f(x)} = f(f^{-1}(P_{f(x)})) \subset f(P_x)$$

이다. 따라서 $f(P_x) = P_{f(x)}$이다.

우리는 같은 방법으로 임의의 점 $y \in Y$에 대하여 $f^{-1}(P_y) = P_{f^{-1}(y)}$임을 보일 수 있다.

이제 사상

$$\phi\colon \{P_x \mid x \in X\} \to \{P_y \mid y \in Y\},\quad \phi(P_x) = P_{f(x)}$$

가 전단사임을 보이면 된다. 만약 $\phi(P_{x_1}) = \phi(P_{x_2})$이라고 가정하면 정의에 의해 $P_{f(x_1)} = P_{f(x_2)}$이므로 $f(P_{x_1}) = f(P_{x_2})$이다. 따라서

$$P_{x_1} = f^{-1}(f(P_{x_1})) = f^{-1}(f(P_{x_2})) = P_{x_2}$$

이므로 ϕ는 단사이다. 그리고 Y의 임의의 연결성분 P_y에 대하여 f가 전사이므로 $f(x) = y$인 $x \in X$가 존재하여 $\phi(P_x) = P_y$이다. 그러므로 ϕ는 전사이다. 따라서 ϕ는 전단사이다. 특별히 $\phi^{-1}(P_y) = P_{f^{-1}(y)}$이다.

문제 8.4.3. X는 길연결이다. 구체적으로 다음과 같이 길을 찾을 수 있다.

(i) $(p,u),(q,v) \in \mathbb{Q}\times\mathbb{R}$인 경우:

$$\alpha\colon I \to X,\ \alpha(t) = \begin{cases} (p,(1-3t)u), & 0 \le t \le \frac{1}{3} \\ ((2-3t)p+(3t-1)q,0), & \frac{1}{3} \le t \le \frac{2}{3} \\ (q,(3t-2)v), & \frac{2}{3} \le t \le 1 \end{cases}$$

가 두 점 (p,u)와 (q,v)를 잇는 X상의 길이다. 참고로 붙임보조정리(pasting lemma)에 의해 α는 연속이고 $(p,u) \to (p,0) \to (q,0) \to (q,v)$인 길이다.

(ii) $(u,p),(v,q) \in \mathbb{R}\times\mathbb{Q}$인 경우:

$$\beta\colon I \to X,\ \beta(t) = \begin{cases} ((1-3t)u,p), & 0 \le t \le \frac{1}{3} \\ (0,(2-3t)p+(3t-1)q), & \frac{1}{3} \le t \le \frac{2}{3} \\ ((3t-2)v,q), & \frac{2}{3} \le t \le 1 \end{cases}$$

가 두 점 (u,p)와 (v,q)를 잇는 X상의 길이다. 참고로 β는 $(u,p) \to (0,p) \to (0,q) \to (v,q)$인 길이다.

(iii) $(p,u) \in \mathbb{Q}\times\mathbb{R}$, $(v,q) \in \mathbb{R}\times\mathbb{Q}$인 경우:

$$\gamma\colon I \to X,\ \gamma(t) = \begin{cases} (p,(1-2t)u+2tq), & 0 \le t \le \frac{1}{2} \\ ((2-2t)p+(2t-1)v,q), & \frac{1}{2} \le t \le 1 \end{cases}$$

가 두 점 (p,u)와 (q,v)를 잇는 X상의 길이다. 참고로 γ는 $(p,u) \to (p,q) \to (v,q)$인 길이다.

문제 8.4.5. (귀류법) X와 Y가 위상동형이라 가정하자. 그리고 $f\colon Y \to X$를 위상동형사상이라 하자. 이제 점 $\mathbf{0} = (0,0) \in Y$에 대해 $\mathbf{a} = f(\mathbf{0})$이라 하자. 그러면 축소사상 $f|\colon Y-\{\mathbf{0}\} \to X-\{\mathbf{a}\}$도 위상동형이다. 그런데 이는 $Y-\{\mathbf{0}\}$는 비길연결이고 $X-\{\mathbf{a}\}$는 길연결이라는 사실에 모순이다.

문제 8.4.7. $\mathscr{U}$를 집합 $\mathbb{R}$상의 보통위상이라 하자. 그러면 $\mathscr{T}_f \subset \mathscr{U}$이고 보통(유클리드)공간 $(\mathbb{R},\mathscr{U})$가 길연결이므로 문제 8.4.6에 의해 $(\mathbb{R},\mathscr{T}_f)$도 길연결이다.

문제 8.4.9. (1) 모든 여유한공간은 T_1이므로 문제 8.4.8에 의해 $(X,\mathscr{T}_f)$는 길연결이 아니다.

(2) 여기서 $I = [0,1]$는 유클리드공간 $\mathbb{R}$의 부분공간이다. 그리고 X가 비가산 집합이고 연속체 가설이 성립한다고 가정하자. 그러면 X가 비가산집합이므로, 연속체 가설에 의해, $\mathrm{card}(X) \succeq \mathfrak{c}$이다. 그리고 $\mathrm{card}(I) = \mathfrak{c}$이므로 단사함수 $f\colon I \to X$가 존재한다.

이제 임의로 주어진 서로 다른 두 점 $a, b \in X$에 대해 $S = f(I) \cup \{a, b\} \subset X$이라 하면 $\mathrm{card}(S) = \mathfrak{c} = \mathrm{card}(I)$이다. 따라서 $S \sim I$이므로 전단사함수 $g\colon I \to S$가 존재한다. 그러면 $(X, \mathscr{T}_f)$의 부분공간 S에 대해 $g\colon I \to S$는 연속이다. ($\because$ 왜냐하면 만약 C가 S의 닫힌집합이면 $C = S$이거나 유한집합이다. 그리고 g가 전단사이므로 $f^{-1}(C)$는 I이거나 유한집합이다. 따라서 $f^{-1}(C)$는 I의 닫힌집합이다. 따라서 g는 연속이다.) 이제 $p = g^{-1}(a)$, $q = g^{-1}(b)$이라 하자. 우리는 일반성을 잃지 않고 $p < q$이라 할 수 있다. 그리고

$$\beta\colon I = [0,1] \to [p,q],\ \beta(t) = (1-t)p + tq$$

이라 하면 β는 위상동형사상이고 $\beta(0) = p$, $\beta(1) = q$이다. 이제 포함사상 $i\colon S \hookrightarrow (X, \mathscr{T}_f)$에 대해

$$\alpha = i \circ g \circ \beta\colon I = [0,1] \xrightarrow{\beta} [p,q] \xrightarrow{g} S \xhookrightarrow{i} (X, \mathscr{T}_f),\quad \alpha(t) = g(\beta(t))$$

는 연속사상이고 $\alpha(0) = a$, $\alpha(1) = b$이다. 그러므로 α는 a로 부터 b까지의 $(X, \mathscr{T}_f)$상의 길이다. 따라서 $(X, \mathscr{T}_f)$는 길연결이다.

문제 8.4.11. 모든 자연수 $n \in \mathbb{N}$에 대하여

$$\begin{aligned} C_n &= \{(\tfrac{1}{n}, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le y \le 1\} = \{\tfrac{1}{n}\} \times [0,1], \\ C_0 &= \{(0, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le y \le 1\} = \{0\} \times [0,1], \\ B &= \{(x, 0) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le x \le 1\} = [0,1] \times \{0\} \end{aligned}$$

이라 하자. 그러면 위상 수학자의 빗 공간은

$$C = (\bigcup_{n=0}^{\infty} C_n) \cup B$$

로 표현된다.

이제 빗 공간 C가 길연결임을 보이자. 자명하게 C_n, C_0, B는 모두 $[0,1]$과 위상동형이므로 C_n, C_0, B들은 모두 길연결이다. 이제 각각의 $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$에 대하여

$$A_n = C_n \cup B$$

로 놓으면 $C_n \cap B \neq \varnothing$이므로 A_n도 길연결이다. 또한

$$\bigcap_{n=0}^{\infty} A_n = B \neq \varnothing, \quad \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n = C$$

이므로 정리 8.4.5에 의해 빗 공간 C는 길연결이다.

한편 빗 공간 C는 점 $(0,1)$에서 국소길연결이 아니다.

문제 8.4.13. $f\colon X \to Y$를 두 위상공간 X와 Y 사이의 위상동형사상이라 하자. 그리고 X를 국소길연결이라 하자. 이제 우리는 Y가 국소길연결임을 보이면 된다. 이를 위해 임의로 주어진 점 $y \in Y$와 y의 근방 N에 대해 $f^{-1}(N) \subset X$는 $x = f^{-1}(y)$의 근방이 된다. 그리고 X가 국소길연결이므로 $x \in V \subset f^{-1}(N)$을 만족하는 길연결된 열린집합 V가 존재한다. 한편 f가 위상동형사상이므로 $f(V)$도 길연결된 열린집합으로서 $y \in f(V) \subset N$을 만족한다. 따라서 Y도 국소길연결이다.

문제 8.4.15. (i) 모든 C_n은 S^1과 위상동형이므로 길연결이다. 그리고 $\mathbf{0} \in \cap_{n=1}^{\infty} C_n \neq \varnothing$이므로 $X = \cup_{n=1}^{\infty} C_n$는 길연결이다.

(ii) 먼저 원점이 아닌 점 x와 x의 근방 N에 대하여 충분히 작은 양의 실수 r이 존재하여 $x \in U = B(x,r) \cap X \subset N$이고 U는 (길연결인) 개구간과 위상동형이므로 길연결된 열린집합이다.

한편 원점 $\mathbf{0}$의 근방 N에 대하여 충분히 작은 양의 실수 r이 존재하여 $x \in U = B(x,r) \cap X \subset N$이고 U는 유한개의 개구간 모양과 무한개의 원모양의 합집합으로 이루어진 길연결된 열린집합이다. 따라서 X는 국소길연결이다.

문제 8.4.17. (1) X의 부분집합

$$A = \{(x, \sin\frac{1}{x}) \mid 0 < x \leq 4\}, \quad B = \{(x, \sin\frac{1}{x}) \mid -4 \leq x < 0\}$$

에 대하여 $A \cong (0,4]$, $B \cong [-4,0)$이므로 A와 B는 모두 연결이다. 그래서 $\mathrm{cl}_X(A) = A \cup \{(0,0)\}$, $\mathrm{cl}_X(B) = \{(0,0)\}$도 연결이고 $\mathrm{cl}_X(A) \cap \mathrm{cl}_X(B) \neq \varnothing$이므로 $X = \mathrm{cl}_X(A) \cup \mathrm{cl}_X(B)$도 연결이다.

(2) 점 $(0,0)$에서 국소연결이 아니다.

(3) A의 점과 B의 점을 연결하는 길이 존재하지 않으므로 길연결이 아니다.

(4) X는 길연결이 아니고 $[-4,4]$는 길연결이므로 X와 $[-4,4]$는 위상동형이 아니다.

제 9 장

컴팩트

9.1 컴팩트 집합

문제 9.1.1. 우리는 두개의 컴팩트집합의 합집합이 컴팩트임을 보이면 충분하다. 이를 위해 A와 B를 위상공간 X의 컴팩트집합이라 하자. 주어진 $A \cup B$의 열린덮개 $\{U_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$에 대하여

$$A,\ B \subset A \cup B \subset \cup_{\alpha\in\Lambda} U_\alpha$$

이므로 $\{U_\alpha\}$는 A, B 모두의 열린덮개이다. 그리고 A, B가 컴팩트하므로

$$A \subset U_{\beta_1} \cup \cdots \cup U_{\beta_n}, \quad B \subset U_{\gamma_1} \cup \cdots \cup U_{\gamma_m}$$

을 만족하는 $\{U_\alpha\}$의 두 유한 부분덮개 $\{U_{\beta_1}, \ldots, U_{\beta_n}\}$와 $\{U_{\gamma_1}, \ldots, U_{\gamma_m}\}$이 존재한다. 따라서

$$A \cup B \subset U_{\beta_1} \cup \cdots \cup U_{\beta_n} \cup U_{\gamma_1} \cup \cdots \cup U_{\gamma_m}$$

이다. 그러므로 $A \cup B$는 컴팩트이다.

문제 9.1.3. (방법 1) 먼저 하우스도르프공간의 컴팩트집합은 닫힌집합임을 상기하자. 따라서 우리는 $\mathbb{R}$이 하우스도르프이므로 $A = [0,1] \cap \mathbb{Q}$가 $\mathbb{R}$의 닫힌집합이 아님을 보이면 된다. 그런데 $\overline{A} = [0,1] \neq A$이므로 A는 $\mathbb{R}$의 닫힌집합이 아니다. 그래서 A는 컴팩트가 아니다.

(방법 2) 먼저 $A = [0,1] \cap \mathbb{Q}$이라 하자. 그리고 $0 < r < 1$인 무리수 r을 택하자. 그러면

$$\{(-1, r - \frac{1}{n}) \cap A \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{(r + \frac{1}{n}, 2) \cap A \mid n \in \mathbb{N}\}$$

는 부분공간 A의 열린덮개이지만 유한 부분덮개를 갖지 않는다.

문제 9.1.5. (1) 두 점 $a, b \in X$에 대해

$$a \in U,\ b \in V,\ U \cap V = \varnothing$$

을 만족하는 $U, V \in \mathscr{T}$가 존재하지 않는다.

(2) 먼저 A가 컴팩트임을 보이자. $\mathscr{U}$를 A의 임의의 열린덮개라 하자. 그러면 $a \in A$이므로 $a \in U$를 만족하는 $U \in \mathscr{U}$가 존재한다. 이러한 U는 ($\mathscr{T}$의 정의에 의해) $Y \cup \{a\}$, X 중 하나이다. 그러므로 $A \subset U$이다. 따라서 A는 컴팩트이다. 우리는 같은 방법으로 B도 컴팩트임을 보일 수 있다.

(3) 먼저 $A \cap B = Y$이다. $\{\{y\} \mid y \in Y\}$는 Y의 열린덮개이지만, Y가 무한집합이므로 유한부분덮개는 존재하지 않는다. 따라서 $Y = A \cap B$는 컴팩트가 아니다.

문제 9.1.7. (1) $U_n = [0, 1 - \frac{1}{n})$이라 하면 $\{U_n\}_{n=2}^{\infty}$는 $[0,1)$의 열린덮개이다. 그런데 이러한 열린덮개에 대한 유한 부분덮개가 존재하지 않는다. 따라서 부분공간 $[0,1)$은 컴팩트가 아니다.

(2) $[0,1]$은 컴팩트가 아니다. 귀류법을 사용하기 위해 $[0,1]$이 컴팩트라 가정하자. 그러면 $[0,1) = [0,1] - [1,2)$이므로 $[0,1)$이 컴팩트공간 $[0,1]$의 닫힌집합이 되므로 $[0,1)$도 컴팩트이다. 이는 (1)에 모순이다.

보다 구체적으로 (1)의 U_n에 대해 $\{[1,2)\} \cup \{U_n\}_{n=2}^{\infty}$는 $[0,1]$의 열린덮개이지만 유한 부분덮개를 갖지않는다.

(3) $A = \{0\} \cup \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$는 컴팩트이다. 구체적으로 $\mathscr{U}$를 $\mathbb{R}_l$의 열린집합들로 이루어진 A의 덮개라 하자. 그러면 $0 \in A \subset \cup\{U \mid U \in \mathscr{U}\}$이므로 $0 \in U_0$인 $U_0 \in \mathscr{U}$가 존재한다. 그러므로 $0 \in [a,b) \subset U_0$인 기저의 원소 $[a,b)$가 존재하여 $a \le 0 < b$이다. 이제 $\frac{1}{k} < b$인 자연수 $k \in \mathbb{N}$을 택하면 $\{0\} \cup \{\frac{1}{n} \mid n \ge k\} \subset U_0$이다. 그리고 각각의 $i = 1, \ldots, k-1$에 대해 $\frac{1}{i} \in U_i$인 $U_i \in \mathscr{U}$가 존재하므로 $A \subset \cup_{i=0}^{k-1} U_i$가 되어 A는 컴팩트이다.

(4) $B = \{0\} \cup \{-\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$는 컴팩트가 아니다. 구체적으로 $U_n = [-\frac{1}{n}, -\frac{1}{n+1})$, $U_0 = [0,1)$이라 하자. 그러면 $\mathscr{U} = \{U_k \mid k = 0, 1, 2, 3, \ldots\}$은 $\mathbb{R}_l$의 열린집합들로 이루어진 B의 덮개이지만, 유한 부분덮개를 갖지 않는다. 따라서 B는 컴팩트가 아니다.

문제 9.1.9. (1) (i) 먼저 X가 유한집합이면 $(X, \mathscr{T}_c)$가 컴팩트인 것은 자명하다.

(ii) 이제 X가 무한집합이라 하자. 그러면 X의 무한인 가산 부분집합 $D = \{a_n \in X \mid n \in \mathbb{N}\}$가 존재한다. 이제 모든 자연수 k에 대하여 $C_k = \{a_k, a_{k+1}, a_{k+2}, \ldots\}$는 가산집합이므로 닫힌집합이다. 또한 $\cap_{k=1}^{\infty} C_k = \varnothing$이고 $\{C_k\}$는 유한 교집합 조건을 만족한다. 따라서 $\{C_k^c \mid k \in \mathbb{N}\}$은 $(X, \mathscr{T}_c)$의 열린덮개이지만 유한 부분덮개를 갖지 않는다. 따라서 $(X, \mathscr{T}_c)$는 컴팩트가 아니다.

(2) (방법 1) 우리는 $K = f([a,b])$가 한 점 집합임을 보이면 된다. 귀류법을 사용하기 위해 $K = f([a,b])$가 서로 다른 두 점 x, y를 포함한다고 가정하자. 먼저 f가 연속이고 $[a,b]$가 길연결이고 컴팩트하므로 $K = f([a,b])$도 길연결이고 컴팩트하다. K가 컴팩트하므로 (1)에

의해 K는 유한집합이고 $x, y \in K$이다. 한편 $\{x\}$과 $K - \{y\}$은 모두 가산(유한)집합이므로 K의 공집합이 아닌 닫힌집합이다. 그래서 $\{x\}$과 $K - \{y\}$은 K의 (닫힌) 분리가 되어 K는 연결이 아니다. 따라서 K는 길연결도 아니다. 이는 모순이다.

(방법 2) 우리는 $K = f([a, b])$가 한 점 집합임을 보이면 된다. 먼저 f가 연속이고 $[a, b]$가 연결이고 컴팩트하므로 $K = f([a, b])$도 연결이고 컴팩트하다. 그런데 K가 컴팩트하므로 (1)에 의해 K는 유한집합이다. 그리고 K가 연결이므로 K는 비가산집합 또는 한 점 집합이다. 따라서 K는 한 점 집합이 되어야 한다.

(3) $f\colon \mathbb{R} \to (X, \mathscr{T}_c)$가 연속사상이라 하자. 이제 임의의 두 점 $p, q \in \mathbb{R}$에 대해 축소사상 $f|\colon [p, q] \to (X, \mathscr{T}_c)$도 연속이므로 (2)에 의해 $f|$는 상수함수이다. 따라서 $f(p) = (f|)(p) = (f|)(q) = f(q)$이다. 따라서 f는 상수사상이다.

(4) (i) 먼저 X가 한 점 집합이면 $(X, \mathscr{T}_c)$가 길연결인 것은 자명하다.

(ii) 이제 X가 두 점 이상으로 이루어진 집합이라 하자. 그리고 $x, y \in X$를 서로 다른 두 점이라 하자. 그러면 (2)에 의해 두 점 x와 y를 잇는 길(연속사상)

$$\alpha\colon [0, 1] \to (X, \mathscr{T}_c) \text{ s.t. } \alpha(0) = x,\ \alpha(1) = y$$

이 존재하지 않는다. 따라서 $(X, \mathscr{T}_c)$는 길연결이 아니다.

문제 9.1.11. (1) $\{(-n, \infty) \mid n \in \mathbb{N}\}$은 X의 열린덮개이지만, 유한 부분덮개를 갖지 않는다.

(2) (i) 만약 $\mathscr{U}$를 $\mathbb{N}$의 열린덮개라 하자. 그러면 $1 \in \mathbb{N} \subset \cup\{V \mid V \in \mathscr{U}\}$이므로 $1 \in V_*$를 만족하는 $V_* \in \mathscr{U}$가 존재한다. 그러면 $V_* = (a, \infty)$이고 $a < 1$이어야 하므로 $\mathbb{N} \subset V_* = (a, \infty)$이다. 따라서 $\{V_*\}$이 $\mathscr{U}$의 유한 부분덮개이다. 그러므로 $\mathbb{N}$는 컴팩트이다.

(ii) 이제 $\mathbb{N}$의 폐포를 구하자. 위상 $\mathscr{T}$의 정의에 의해 X의 닫힌집합은 $\mathbb{R}$, $\varnothing$ 이거나 $(-\infty, x](x \in \mathbb{R})$ 형태 뿐이다. 이 중에서 $\mathbb{N}$을 포함하는 것은 $\mathbb{R}$ 뿐이므로 $\overline{\mathbb{N}} = \mathbb{R} = X$이다. 그러므로 (1)에 의해 $\overline{\mathbb{N}}$는 컴팩트가 아니다.

(3) 만약 $\mathscr{U}$를 A의 열린덮개라 하자. 그러면 $1 \in A \subset \cup\{V \mid V \in \mathscr{U}\}$이므로 $1 \in V_*$를 만족하는 $V_* \in \mathscr{U}$가 존재한다. 그러면 $V_* = (a, \infty)$이고 $a < 1$이어야 하므로 $A \subset V_* = (a, \infty)$이다. 따라서 $\{V_*\}$이 $\mathscr{U}$의 유한 부분덮개이다. 그러므로 A는 컴팩트이다.

(4) $\mathscr{U} = \{(1 - \frac{1}{n}, \infty) \mid n \in \mathbb{N}\}$은 B의 열린덮개이지만 유한 부분덮개를 갖지 않는다. 따라서 B는 컴팩트가 아니다.

문제 9.1.13. 유클리드공간 $\mathbb{R}$의 부분공간 $X = \{0\} \cup \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$.

문제 9.1.15. 참고로 X는 compact Hausdorff 공간이므로 정규이다.

(1) $X' = X \neq \varnothing$이므로 X는 적어도 하나의 극한점을 갖는다. 그리고 X가 Hausdorff이므로 X는 무한집합이 되어야 한다. 이제 귀류법을 사용하기 위해 X를 가산집합이라 가정하고 $X = \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$이라 하자.

먼저 $U_1 = X$라 하자. 그리고 X가 정규이고 $X - \{x_1\}$이 x_2의 열린근방이므로

$$x_2 \in U_2 \subset \overline{U}_2 \subset X - \{x_1\} \subset U_1 = X$$

를 만족하는 x_2의 열린근방 U_2가 존재한다. 그리고 x_2가 극한점이므로 U_2는 무한집합이다. 따라서 $U_2 - \{x_1, x_2\}$도 무한집합이므로 $x_{n2} \in U_2 - \{x_1, x_2\}$가 존재한다. 그래서 $U_2 - \{x_1, x_2\}$가 열린집합이므로

$$x_{n2} \in U_3 \subset \overline{U}_3 \subset U_2 - \{x_1, x_2\}$$

를 만족하는 x_{n2}의 열린근방 U_3가 존재한다. 마찬가지로 x_{n2}가 극한점이므로 U_3는 무한집합이다. 따라서 $U_3 - \{x_1, x_2, x_3\}$도 무한집합이므로 $x_{n3} \in U_3 - \{x_1, x_2, x_3\}$가 존재한다. 그래서 $U_3 - \{x_1, x_2, x_3\}$가 열린집합이므로

$$x_{n3} \in U_4 \subset \overline{U}_4 \subset U_3 - \{x_1, x_2, x_3\}$$

를 만족하는 x_{n3}의 열린근방 U_4가 존재한다. 이와 같은 방법을 계속하여 우리는 다음을 만족하는 열린집합들의 수열 U_n을 얻었다;

$$\overline{U}_{n+1} \subset U_n, \quad x_n \notin \overline{U}_{n+1}, \quad U_n \neq \varnothing.$$

그러면 $\overline{U}_n$은 compact이고 $\overline{U}_{n+1} \subset \overline{U}_n$이므로 $\{\overline{U}_n\}$은 유한 교집합 조건을 만족한다. 그리고 X가 compact이므로 $\cap_{n=1}^{\infty} \overline{U}_n \neq \varnothing$이다. 그런데 모든 자연수 n에 대해 $x_n \notin \overline{U}_{n+1}$이므로 $\cap_{n=1}^{\infty} \overline{U}_n = \varnothing$이 되어 모순이다.

(2) 우리는 임의로 주어진 공집합이 아닌 열린집합 $U \subset X$에 대하여 $U \cap (\cap_{n=1}^{\infty} A_n) \neq \varnothing$임을 보이면 된다. 먼저 A_1이 조밀하므로 $U \cap A_1 \neq \varnothing$이다. 그러면 $x \in U \cap A_1$이 존재하고 $U \cap A_1$이 열린집합이므로

$$x \in B_1 \subset \overline{B}_1 \subset U \cap A_1$$

인 열린집합 B_1이 존재한다. 그러면 $\overline{B}_1$은 공집합이 아닌 컴팩트집합이다. 그리고 A_2가 조밀하므로 $B_1 \cap A_2$는 공집합이 아닌 열린집합이다. 같은 방법으로

$$B_2 \subset \overline{B}_2 \subset B_1 \cap A_2$$

인 열린집합 B_2가 존재한다. 그리고 $\overline{B}_2$은 공집합이 아닌 컴팩트집합이다. 같은 방법을 계속하면 우리는

$$\begin{aligned} &B_n \neq \varnothing, \\ &\overline{B}_n\text{은 컴팩트}, \\ &B_n \subset \overline{B}_n \subset B_{n-1} \cap A_n \end{aligned}$$

을 만족하는 열린집합들의 모임 $\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$을 얻을 수 있다. 그리고

$$\overline{B}_1 \supset \overline{B}_2 \supset \cdots \supset \overline{B}_n \supset \overline{B}_{n+1} \supset \cdots$$

이므로 $\{\overline{B}_n\}$은 유한 교집합 조건을 만족한다. 그런데 X가 컴팩트이므로 $\cap_{n=1}^{\infty}\overline{B}_n \neq \varnothing$이다. 따라서 $\overline{B}_1 \subset U \cap A_1$이고 $\overline{B}_n \subset A_n$이므로 $\cap_{n=1}^{\infty}\overline{B}_n \subset U \cap (\cap_{n=1}^{\infty}A_n)$이 되어 $U \cap (\cap_{n=1}^{\infty}A_n) \neq \varnothing$이다.

(3) $B_n = A_n^c$은 열린집합으로서 $\overline{B}_n = \overline{A_n^c} = (A_n^\circ)^c = \varnothing^c = X$이다. 따라서 (2)에 의해

$$X = \overline{\cap_{n=1}^{\infty}B_n} = \overline{\cap_{n=1}^{\infty}A_n^c} = \overline{(\cup_{n=1}^{\infty}A_n)^c} = [(\cup_{n=1}^{\infty}A_n)^\circ]^c$$

이 되어 $(\cup_{n=1}^{\infty}A_n)^\circ = \varnothing$이다.

문제 9.1.17. 먼저 f가 연속이고 X가 컴팩트이므로 $f(X)$는 X의 컴팩트집합이다. 그리고 X가 공집합이 아니므로 $f(X)$도 공집합이 아니다. 같은 방법으로 $f^2(X) = f(f(X))$도 공집합이 아닌 컴팩트집합이고, $f(X) \subset X$이므로 $f^2(X) = f(f(X)) \subset f(X)$이다. 이와 같은 방법을 계속하면 우리는 공집합이 아닌 컴팩트집합들의 수열 $f^n(X) = f(f^{n-1}(X))$이

$$f(X) \supset f^2(X) \supset \cdots \supset f^n(X) \supset f^{n+1}(X) \supset \cdots$$

을 만족함을 알 수 있다. 그리고 X가 Hausdorff이므로 $A = \cap_{n=1}^{\infty}f^n(X)$는 공집합이 아니다. 그리고 K가 Hausdorff 공간 X의 컴팩트집합이므로 A는 X의 닫힌집합이다. 또한 문제 9.1.16(2)에 의해

$$f(A) = f(\cap_{n=1}^{\infty}f^n(X)) = \cap_{n=1}^{\infty}f(f^n(X)) = \cap_{n=2}^{\infty}f^n(X) = A$$

를 만족한다.

문제 9.1.19. K를 Y의 컴팩트집합이라 하자. 그리고 $\mathscr{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$를 X의 열린집합들로 이루어진 $f^{-1}(K)$의 덮개라 하자. 이제 각각의 $y \in K$에 대하여 $f^{-1}(y)$이 X의 컴팩트집합이고

$$f^{-1}(y) \subset f^{-1}(K) \subset \bigcup\{U \mid U \in \mathscr{U}\}$$

이므로 유한 부분덮개 $U_{\alpha_1(y)}, \ldots, U_{\alpha_{n(y)}(y)} \in \mathscr{U}$가 존재하여 $f^{-1}(y) \subset \cup_{i=1}^{n(y)}U_{\alpha_i(y)}$이다. 그리고 f가 닫힌사상이므로 참고 5.2.9에 의하여

$$y \in V_y, \quad f^{-1}(y) \subset f^{-1}(V_y) \subset \cup_{i=1}^{n(y)}U_{\alpha_i(y)}$$

를 만족하는 Y의 열린집합 V_y가 존재한다. 그러면 $\mathscr{V} = \{V_y \mid y \in Y\}$는 Y의 열린집합들로 이루어진 K의 덮개이고 K가 컴팩트이므로 유한 부분덮개 $V_{y_1}, \ldots, V_{y_k} \in \mathscr{V}$이 존재하여

$K \subset \cup_{j=1}^{k} V_{y_j}$ 이 된다. 따라서

$$f^{-1}(K) = f^{-1}(\bigcup_{j=1}^{k} V_{y_j}) = \bigcup_{j=1}^{k} f^{-1}(V_{y_j}) \subset \bigcup_{j=1}^{k} \bigcup_{i=1}^{n(y_j)} U_{\alpha_i(y_j)}$$

이 되어 $\mathscr{U}$는 유한 부분덮개

$$\{U_{\alpha_i(y_j)} \mid j = 1, 2, \ldots k,\ 1 \le i \le n(y_j)\}$$

를 가지므로 $f^{-1}(K)$는 컴팩트이다.

문제 9.1.21. (i) 먼저 $n = 1$인 경우를 살펴보자. $\{U_1\}$이 X의 덮개이므로 $U_1 = X$가 되어야 한다. 따라서 우리는 $K_1 = X$로 택하면 된다.

(ii) 이제 $n = 2$인 경우를 살펴보자. $\{U_1, U_2\}$를 X의 열린덮개라 하자. 그러면 U_2^c은 컴팩트공간 X의 닫힌집합이므로 컴팩트이고 $U_2^c \subset U_1$이다. 그리고 X가 정규이므로 $U_2^c \subset V \subset \overline{V} \subset U_1$을 만족하는 X의 열린집합 V가 존재한다. 이제 $K_1 = \overline{V}$, $K_2 = V^c$이라 하면 K_1과 K_2가 모두 컴팩트공간 X의 닫힌집합이므로 컴팩트이다. 당연히 $K_1 \subset U_1$, $K_2 \subset U_2$이다. 그리고 $K_2^c \subset K_1$이므로 $K_1 \cup K_2 = X$이다.

(iii) 이제 일반적인 경우를 살펴보자. $\{U_1, \ldots, U_n\}$을 X의 열린덮개라 하자. 그리고 $W_2 = \cup_{i=2}^{n} U_i$이라 하자. 그러면 $\{U_1, W_2\}$이 X의 열린덮개이므로 (ii)에 의해

$$K_1 \subset U_1, \quad X_2 \subset W_2 = \cup_{i=2}^{n} U_i, \quad K_1 \cup X_2 = X$$

를 만족하는 X의 컴팩트집합 K_1과 X_2가 존재한다.

이제 각각의 $i \ge 2$에 대해 $U_i^2 = U_i \cap X_2$이라 하면 $U_i^2 \subset U_i$이다. 그러면 X의 부분공간 X_2는 컴팩트 하우스도르프이고 $\{U_2^2, \ldots, U_n^2\}$은 X_2의 열린덮개이다. 앞에서와 같이 $W_3 = \cup_{i=3}^{n} U_i^2$이라 하면 $\{U_2^2, W_3\}$이 X_2의 열린덮개이므로 (ii)에 의해

$$K_2 \subset U_2^2, \quad X_3 \subset W_3, \quad K_2 \cup X_3 = X_2$$

를 만족하는 X_2의 컴팩트집합 K_2과 X_3이 존재한다. 당연히 K_2와 X_3은 X의 컴팩트집합이고

$$K_2 \subset U_2, \quad X_3 \subset \cup_{i=3}^{n} U_i, \quad K_1 \cup K_2 \cup X_3 = X$$

이다.

같은 방법으로 각각의 $i \ge 3$에 대해 $U_i^3 = U_i \cap X_3$이라 하면 $U_i^3 \subset U_i$이다. 그러면 X의 부분공간 X_3는 컴팩트 하우스도르프이고 $\{U_3^3, \ldots, U_n^3\}$은 X_3의 열린덮개이다. 그리고 $W_4 = \cup_{i=4}^{n} U_i^3$이라 하면 $\{U_3^3, W_4\}$이 X_3의 열린덮개이므로 (ii)에 의해

$$K_3 \subset U_3^3, \quad X_4 \subset W_4, \quad K_3 \cup X_4 = X_3$$

를 만족하는 X_3의 컴팩트집합 K_3과 X_4가 존재한다. 당연히 K_3와 X_4은 X의 컴팩트집합이고

$$K_3 \subset U_3, \quad X_4 \subset \cup_{i=4}^{n} U_i, \quad K_1 \cup K_2 \cup K_3 \cup X_4 = X$$

이다.

이와 같은 방법을 계속하면(즉, 수학적 귀납법을 적용하면) 우리는

$$\begin{aligned} &K_1 \subset U_1,\ K_2 \subset U_2,\ \ldots,\ K_{n-1} \subset U_{n-1}, \\ &X_n \subset U_n, \\ &K_1 \cup \cdots \cup K_{n-1} \cup X_n = X \end{aligned}$$

를 만족하는 X의 컴팩트집합 $K_1, \ldots, K_{n-1}, X_n$을 얻을 수 있다. 이제 마지막으로 $K_n = X_n$으로 놓으면 된다.

문제 9.1.23. 보기 9.1.9에 의해 우리는 $\varnothing \neq A \subset [a, b]$인 집합 A에 대하여

$$\mathrm{glb}(A) \in [a, b], \quad \mathrm{lub}(A) \in [a, b]$$

임을 보이면 충분하다. $A \neq \varnothing$이고 X가 정렬집합이므로 $\mathrm{glb}(A) \in A$이다. 따라서 $\mathrm{glb}(A) \in [a, b]$이다.

이제 $\mathrm{lub}(A) \in A$임을 보이자. b는 A의 상계이다. 따라서 X에서의 A의 상계들의 모임

$$B = \{x \in X \mid x\text{는 } A\text{의 상계}\}$$

는 공집합이 아닌 정렬집합 X의 부분집합이다. 따라서 $\mathrm{glb}(B) \in B$이다. 그리고 $b \in B$이므로 $\mathrm{glb}(B) \preceq b$이다. 한편 a는 집합 A의 하계이므로 $a \preceq \mathrm{glb}(B)$이다. 그러므로 $\mathrm{lub}(A) = \mathrm{glb}(B) \in [a, b]$이다.

9.2 Tychonoff 정리 †

문제 9.2.1. 각각의 α에 대하여 사영사상 $\pi_\alpha \colon \Pi_{\alpha\in\Lambda} X_\alpha \to X_\alpha$이 연속이고 $\Pi_{\alpha\in\Lambda} X_\alpha$이 컴팩트하므로 이의 상 $X_\alpha = \pi_\alpha(\Pi_{\alpha\in\Lambda} X_\alpha)$는 컴팩트이다.

문제 9.2.3. (1) 먼저 I가 컴팩트이므로 Tychonoff 정리에 의해 곱공간 $(I^\omega, \mathscr{T}_p)$는 컴팩트이다.

(2) 이제 상자공간 $(I^\omega, \mathscr{T}_b)$이 컴팩트가 아님을 보이자. 주어진 점 $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots) \in I^\omega$에 대하여 다음과 같은 I^ω의 부분집합

$$U(\mathbf{x}, \frac{1}{2}) = (x_1 - \frac{1}{2}, x_1 + \frac{1}{2}) \cap I \times \cdots \times (x_n - \frac{1}{2}, x_n + \frac{1}{2}) \cap I \times \cdots$$

를 생각하자. 그러면 $U(\mathbf{x}, \frac{1}{2})$는 점 $\mathbf{x}$의 열린근방이다. 따라서 $\mathscr{U} = \{U(\mathbf{x}, \frac{1}{2}) \mid \mathbf{x} \in I^\omega\}$는 상자공간 $(I^\omega, \mathscr{T}_b)$의 열린덮개이다. 이제 $\mathscr{U}$가 유한 부분덮개를 갖지 않음을 보이자. 만약 $U(\mathbf{x}^1, \frac{1}{2}), \ldots, U(\mathbf{x}^k, \frac{1}{2})$를 $\mathscr{U}$의 임의의 유한 부분집합이라 하고, $\mathbf{x}^i = (x_1^i, x_2^i, \ldots)$로 표현하자. 이제 각각의 $i = 1, \ldots, k$에 대하여 점 $y_i \in I - (x_i^i - \frac{1}{2}, x_i^i + \frac{1}{2})$를 택하자. 그러면 점 $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_k, 0, 0, 0, \ldots) \in I^\omega$이지만 $\mathbf{y} \notin \cup_{i=1}^k U(\mathbf{x}^i, \frac{1}{2})$이다. 따라서 $\mathscr{U}$는 유한 부분덮개를 갖지않는다.

(3) 이제 고른공간 $(I^\omega, \mathscr{T}_{\bar{\rho}})$이 컴팩트가 아님을 보이자. 주어진 점 $\mathbf{x} \in I^\omega$에 대하여 $B_{\bar{\rho}}(\mathbf{x}, \frac{1}{3}) \subset U(\mathbf{x}, \frac{1}{2})$이다. 따라서 I^ω의 열린덮개 $\mathscr{V} = \{B_{\bar{\rho}}(\mathbf{x}, \frac{1}{3}) \mid \mathbf{x} \in I^\omega\}$는 유한 부분덮개를 갖지 않는다.

9.3 유클리드공간 $\mathbb{R}^n$ 상의 컴팩트

문제 9.3.1. $\mathbb{Q}$가 $\mathbb{R}$의 닫힌집합이 아니므로 Heine-Borel 정리에 의하여 $\mathbb{Q}$는 컴팩트가 아니다.

문제 9.3.3. (1) $f\colon S^1 \to \mathbb{R}$를 연속사상이라 하자. 그러면 S^1이 컴팩트이므로 $f(S^1)$도 컴팩트이다. 그런데 $\mathbb{R}$이 컴팩트가 아니므로 $f(S^1) \neq \mathbb{R}$이다. 따라서 f는 전사가 아니다.

(2) 단사인 연속사상 $f\colon S^1 \to \mathbb{R}$가 존재한다고 가정하자. 그러면 $f(S^1)$은 $\mathbb{R}$의 컴팩트이고 연결된 부분집합이다. 그런데 $\mathbb{R}$의 연결된 부분집합은

$$\mathbb{R},\ (-\infty, b),\ (a, \infty),\ (-\infty, b],\ [a, \infty),\ (a, b),\ (a, b],\ [a, b),\ [a, b],\ \{a\}$$

중 하나이다. 이 중 컴팩트인 것은 $[a, b]$와 $\{a\}$이다. 그런데 f가 단사이고 S^1이 무한집합이므로 $f(S^1)$도 무한집합이 되어 $f(S^1) = [a, b]$가 되어야 한다. 그리고 S^1이 컴팩트이고 $[a, b]$가 하우스도르프이므로 $f\colon S^1 \to [a, b]$는 위상동형사상이 된다. 따라서 S^1과 $[a, b]$가 위상동형이 된다. 이는 S^1과 $[a, b]$가 위상동형이 아니라는 사실에 모순이다.

문제 9.3.5. X를 두 점 이상으로 이루어진 연결된 컴팩트 Hausdorff 공간이라 하자. 우리는 정리 9.3.11에 의해 X가 고립점을 갖지 않음을 보이면 된다. 귀류법을 사용하기 위해 X가 고립점 p를 갖는다고 가정하자. 그러면 $\{p\}$는 X의 열린집합이다. 그리고 X가 Hausdorff이므로 $\{p\}$는 X의 닫힌집합이다. 따라서 $\varnothing \subsetneq \{p\} \subsetneq X$인 열린집합인 동시에 닫힌집합인 $\{p\}$가 존재하므로 정리 8.1.4에 의해 X는 비연결이다. 이는 모순이다. 따라서 X는 고립점을 갖지 않는다.

문제 9.3.7. X는 유클리드공간 $\mathbb{R}^2$의 유계인 닫힌집합이므로 Heine-Borel 정리에 의하여 X는 컴팩트이다.

문제 9.3.9.

(1) (i) 정의에 의해 $\varnothing \in \mathscr{T}$ 이다. 그리고 $(\mathbb{R}^2)^c = \varnothing$이 $(\mathbb{R}^2, \mathscr{U})$의 컴팩트집합이므로 $\mathbb{R}^2 \in \mathscr{T}$ 이다.

(ii) $U_\alpha \in \mathscr{T}(\alpha \in \Lambda)$라 하자. 그러면 $(\cup_\alpha U_\alpha)^c = \cap_\alpha U_\alpha^c$이므로 $(\cup_\alpha U_\alpha)^c$는 $(\mathbb{R}^2, \mathscr{U})$의 컴팩트집합들의 교집합이다. 따라서 $(\cup_\alpha U_\alpha)^c$는 $(\mathbb{R}^2, \mathscr{U})$의 컴팩트집합이므로 $\cup_\alpha U_\alpha \in \mathscr{T}$ 이다.

(iii) $U, V \in \mathscr{T}$ 라 하자. 그러면 U^c와 V^c이 모두 $(\mathbb{R}^2, \mathscr{U})$의 컴팩트집합이므로 $(U \cap V)^c = U^c \cup V^c$도 컴팩트이다. 그래서 $U \cap V \in \mathscr{T}$ 이다.

따라서 (i), (ii), (iii)에 의해 $\mathscr{T}$는 집합 $\mathbb{R}^2$ 상의 위상이다.

(2) 만약 $U \in \mathscr{T}$ 이면 U^c이 하우스도르프공간 $(\mathbb{R}^2, \mathscr{U})$의 컴팩트집합이므로 U^c은 $(\mathbb{R}^2, \mathscr{U})$의 닫힌집합이다. 따라서 U는 $(\mathbb{R}^2, \mathscr{U})$의 열린집합이므로 $U \in \mathscr{U}$ 이다.

(3) (귀류법) 위상공간 $(\mathbb{R}^2, \mathscr{T})$가 하우스도르프라고 가정하자. 그러면 서로 다른 두 점 $x = (-1, 0)$과 $y = (1, 0)$에 대하여

$$x \in U, \quad y \in V, \quad U \cap V = \varnothing$$

을 만족하는 $U, V \in \mathscr{T}$가 존재한다. 그리고 $U \neq \varnothing$이고 $V \neq \varnothing$이므로, $\mathscr{T}$의 정의에 의해, $(\mathbb{R}^2, \mathscr{U})$의 컴팩트집합 E와 F가 존재하여 $U = \mathbb{R}^2 - E$, $V = \mathbb{R}^2 - F$를 만족한다. 그래서

$$\mathbb{R}^2 = \varnothing^c = (U \cap V)^c = U^c \cup V^c = E \cup F$$

이다. 그런데 $E \cup F$는 $(\mathbb{R}^2, \mathscr{U})$의 컴팩트집합이지만, $\mathbb{R}^2$는 $(\mathbb{R}^2, \mathscr{U})$의 컴팩트집합이 아니므로 모순이다.

(4) (귀류법) $(\mathbb{R}^2, \mathscr{T})$이 비연결이라고 가정하자. 그러면 $(\mathbb{R}^2, \mathscr{T})$의 열린분리 $U, V \in \mathscr{T}$가 존재하여

$$U \neq \varnothing, \quad V \neq \varnothing, \quad U \cap V = \varnothing, \quad U \cup V = \mathbb{R}^2$$

를 만족한다. 그리고 $U \neq \varnothing$이고 $V \neq \varnothing$이므로, $\mathscr{T}$의 정의에 의해, $(\mathbb{R}^2, \mathscr{U})$의 컴팩트집합 E와 F가 존재하여 $U = \mathbb{R}^2 - E$, $V = \mathbb{R}^2 - F$를 만족한다. 그래서

$$\mathbb{R}^2 = \varnothing^c = (U \cap V)^c = U^c \cup V^c = E \cup F$$

이다. 그런데 $E \cup F$는 $(\mathbb{R}^2, \mathscr{U})$의 컴팩트집합이지만, $\mathbb{R}^2$은 $(\mathbb{R}^2, \mathscr{U})$의 컴팩트집합이 아니므로 모순이다.

(5) $\{U_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$를 $(\mathbb{R}^2, \mathscr{T})$의 열린덮개라 하자. 그리고 $U_{\alpha_0} \neq \varnothing$인 $\alpha_0 \in \Lambda$를 택하자. 그러면

$\mathscr{T}$의 정의에 의해 $U_{\alpha_0} = \mathbb{R}^2 - K$인 $(\mathbb{R}^2, \mathscr{U})$의 컴팩트집합 K가 존재한다. 한편

$$\mathbb{R}^2 = U_{\alpha_0} \bigcup (\cup_{\alpha \neq \alpha_0} U_\alpha)$$

이므로 $K = U_{\alpha_0}^c \subset \cup_{\alpha \neq \alpha_0} U_\alpha$이다. 한편 $\mathscr{T} \subset \mathscr{U}$이므로 모든 U_α는 보통공간 $(\mathbb{R}^2, \mathscr{U})$의 열린집합이다. 따라서 $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \Lambda - \{\alpha_0\}$이 존재하여 $K = U_{\alpha_0}^c \subset U_{\alpha_1} \cup \cdots \cup U_{\alpha_n}$을 만족한다. 그러므로

$$\mathbb{R}^2 = U_{\alpha_0} \cup U_{\alpha_0}^c = U_{\alpha_0} \cup U_{\alpha_1} \cup \cdots \cup U_{\alpha_n}$$

이다. 따라서 $(\mathbb{R}^2, \mathscr{T})$는 컴팩트이다.

(6) 먼저 A는 $(\mathbb{R}^2, \mathscr{U})$의 컴팩트집합이 아니므로 A^c은 $(\mathbb{R}^2, \mathscr{T})$의 열린집합이 아니다. 따라서 A는 $(\mathbb{R}^2, \mathscr{T})$의 닫힌집합이 아니다.

이제 A가 $(\mathbb{R}^2, \mathscr{T})$의 컴팩트집합임을 보이자: 주어진 A의 열린덮개 $\{U_\alpha \in \mathscr{T} \mid \alpha \in \Lambda\}$에 대해 $A \neq \varnothing$이므로 $U_{\alpha_0} \neq \varnothing$을 만족하는 $\alpha_0 \in \Lambda$가 존재한다. $\mathscr{T}$의 정의에 의해 $U_{\alpha_0}^c$는 $(\mathbb{R}^2, \mathscr{U})$의 컴팩트집합이다. 그리고 A가 $(\mathbb{R}^2, \mathscr{U})$의 닫힌집합이므로 $A \cap U_{\alpha_0}^c$은 $(\mathbb{R}^2, \mathscr{U})$의 컴팩트집합 $U_{\alpha_0}^c$의 닫힌집합이 되어 $A \cap U_{\alpha_0}^c$는 $(\mathbb{R}^2, \mathscr{U})$의 컴팩트집합이다. 한편 $\mathscr{T} \subset \mathscr{U}$이고 $A \cap U_{\alpha_0}^c \subset \cup_{\alpha \neq \alpha_0} U_\alpha$이므로 위상공간 $(\mathbb{R}^2, \mathscr{U})$상에서 $\{U_\alpha \mid \alpha \neq \alpha_0\}$는 컴팩트집합 $A \cap U_{\alpha_0}^c$의 열린덮개이다. 그러므로 $A \cap U_{\alpha_0}^c \subset U_{\alpha_1} \cup \cdots \cup U_{\alpha_n}$을 만족하는 $\alpha_i \neq \alpha_0 (i = 1, 2, \ldots, n)$이 존재한다. 따라서 $A \subset U_{\alpha_0} \cup U_{\alpha_1} \cup \cdots \cup U_{\alpha_n}$이 되어 A는 $(\mathbb{R}^2, \mathscr{T})$의 컴팩트집합이다.

(7) 먼저 A가 $(\mathbb{R}^2, \mathscr{U})$의 닫힌집합이라 하자. A의 주어진 열린덮개 $\{U_\alpha \in \mathscr{T} \mid \alpha \in \Lambda\}$에 대해 $A \neq \varnothing$이므로 $U_{\alpha_0} \neq \varnothing$을 만족하는 $\alpha_0 \in \Lambda$가 존재한다. $\mathscr{T}$의 정의에 의해 $U_{\alpha_0}^c$는 $(\mathbb{R}^2, \mathscr{U})$의 컴팩트집합이다. 그리고 A가 $(\mathbb{R}^2, \mathscr{U})$의 닫힌집합이므로 $A \cap U_{\alpha_0}^c$은 $(\mathbb{R}^2, \mathscr{U})$의 컴팩트집합 $U_{\alpha_0}^c$의 닫힌집합이 되어 $A \cap U_{\alpha_0}^c$는 $(\mathbb{R}^2, \mathscr{U})$의 컴팩트집합이다. 한편 $\mathscr{T} \subset \mathscr{U}$이고 $A \cap U_{\alpha_0}^c \subset \cup_{\alpha \neq \alpha_0} U_\alpha$이므로 위상공간 $(\mathbb{R}^2, \mathscr{U})$상에서 $\{U_\alpha \mid \alpha \neq \alpha_0\}$는 컴팩트집합 $A \cap U_{\alpha_0}^c$의 열린덮개이다. 그러므로 $A \cap U_{\alpha_0}^c \subset U_{\alpha_1} \cup \cdots \cup U_{\alpha_n}$을 만족하는 $\alpha_i \neq \alpha_0 (i = 1, 2, \ldots, n)$이 존재한다. 따라서 $A \subset U_{\alpha_0} \cup U_{\alpha_1} \cup \cdots \cup U_{\alpha_n}$이 되어 A는 $(\mathbb{R}^2, \mathscr{T})$의 컴팩트집합이다.

이제 A가 $(\mathbb{R}^2, \mathscr{U})$의 닫힌집합이 아니라고 가정하자. 그러면 점 $p \in A' - A$가 존재하고 자연수 n에 대해 $C_n = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x - p\| \leq \frac{1}{n}\}$이라 하면 C_n이 $(\mathbb{R}^2, \mathscr{U})$의 컴팩트집합이므로 $U_n = \mathbb{R}^2 - C_n$는 $(\mathbb{R}^2, \mathscr{T})$의 열린집합이다. 그리고 $p \notin A$이므로 $\{U_n\}$은 A의 $\mathscr{T}$-열린덮개이다. 그러나 유한 부분덮개는 존재하지 않는다. 따라서 A는 $(\mathbb{R}^2, \mathscr{T})$의 컴팩트집합이 아니다.

(8) 대우를 사용하면 우리는 다음이 서로동치임을 보이면 된다.

(a$'$) A는 $(\mathbb{R}^2, \mathscr{T})$의 비연결집합이다.

(b′) A는 $(\mathbb{R}^2,\mathscr{U})$의 유계이고 비연결집합이다.

먼저 A가 $(\mathbb{R}^2,\mathscr{T})$의 비연결집합이라 하자. 그러면 $\mathscr{T}\subset\mathscr{U}$이므로 $(\mathbb{R}^2,\mathscr{T})$의 부분공간 A의 열린분리 $\{U_A,V_A\}$는 $(\mathbb{R}^2,\mathscr{U})$의 부분공간 A의 열린분리가 된다. 따라서 A는 $(\mathbb{R}^2,\mathscr{U})$의 비연결집합이다.

한편 A가 $(\mathbb{R}^2,\mathscr{T})$의 비연결집합이므로 A의 열린분리 $\{U_A,V_A\}$가 존재한다. 그래서 $U_A=A\cap U$, $V_A=A\cap V$를 만족하는 공집합이 아닌 $U,V\in\mathscr{T}$가 존재한다. 그리고 $\varnothing=U_A\cap U_B=A\cap(U\cap V)$이므로 $A\subset(U\cap V)^c=U^c\cup V^c$이다. 그런데 U^c와 V^c가 $(\mathbb{R}^2,\mathscr{U})$의 컴팩트집합이므로 유계이다. 따라서 A도 유계인 집합이다.

역으로 A가 $(\mathbb{R}^2,\mathscr{U})$의 유계이고 비연결집합이라 하자. A가 $(\mathbb{R}^2,\mathscr{U})$의 비연결집합이므로

$$U\cap A\neq\varnothing,\ V\cap A\neq\varnothing,\ U\cap V\cap A=\varnothing,\ U\cup V\supset A$$

를 만족하는 $U,V\in\mathscr{U}$가 존재한다. 이제 $C=U\cap A$, $D=V\cap A$라 하면

$$C\cap D=\varnothing,\ C\cup D=A,\ C\subset V^c,\ D\subset U^c$$

이다. 한편 A가 유계이므로 C,D도 유계이다. 따라서 $(\mathbb{R}^2,\mathscr{U})$에서의 C와 D의 폐포 $\overline{C}$와 $\overline{D}$는 유계인 닫힌집합이다. 그래서 $\overline{C}$와 $\overline{D}$는 $(\mathbb{R}^2,\mathscr{U})$의 컴팩트집합이다. 그리고 $U^*=\mathbb{R}^2-\overline{D}$, $V^*=\mathbb{R}^2-\overline{C}$에 대해 $U^*,V^*\in\mathscr{T}$이고

$$U^*\cap A=C\neq\varnothing,\quad V^*\cap A=D\neq\varnothing,$$
$$U^*\cup V^*\supset C\cup D=A,\quad U^*\cap V^*\cap A=C\cap D=\varnothing$$

을 만족한다. 따라서 $(\mathbb{R}^2,\mathscr{T})$의 부분공간 A는 비연결이다.

문제 9.3.11. (1) 먼저 $d(x,A)=0$이라 하자. 그러면 주어진 자연수 $n\in\mathbb{N}$에 대해 $d(x,a_n)<\frac{1}{n}$을 만족하는 $a_n\in A$이 존재한다. 그리고 임의로 주어진 양의 실수 $\varepsilon>0$에 대하여 $\frac{1}{m}<\varepsilon$을 만족하는 자연수 m이 존재한다. 그래서 $a_m\in B_d(x,\varepsilon)$이므로 $A\cap B_d(x,\varepsilon)\neq\varnothing$이다. 따라서 $x\in\overline{A}$이다.

역으로 $x\in\overline{A}$라 하자. 그러면 임의의 자연수 n에 대하여 $a_n\in A\cap B(x,\frac{1}{n})$을 만족하는 $a_n\in A$이 존재한다. 그리고 $d(x,a_n)\to 0$이므로 $d(x,A)=0$이다.

(2) 먼저 $x\in U(A,\varepsilon)$이면 $d(x,A)<\varepsilon$이다. 이제 $d(x,A)<\delta<\varepsilon$을 만족하는 δ를 택하자. 그러면 $d(x,a_*)<\delta$를 만족하는 $a_*\in A$가 존재하여 $x\in B_d(a_*,\delta)$이고, $x\in B_d(a_*,\varepsilon)$이다. 따라서 $U(A,\varepsilon)\subset\cup_{a\in A}B_d(a,\varepsilon)$이다.

역으로 만약 $x\in\cup_{a\in A}B_d(a,\varepsilon)$이면 적당한 $a_*\in A$에 대해 $x\in B_d(a_*,\varepsilon)$이다. 그리고 $d(x,A)\leq d(x,a_*)<\varepsilon$이므로 $x\in U(A,\varepsilon)$이다. 따라서 $\cup_{a\in A}B_d(a,\varepsilon)\subset U(A,\varepsilon)$이다.

(3) 임의의 점 $a\in A$에 대해 $a\in V$이고 V가 열린집합이므로 $B_d(a,\varepsilon_a)\subset V$를 만족하는 양의 실수 ε_a가 존재한다. 그리고 $\{B_d(a,\frac{\varepsilon_a}{2})\}_{a\in A}$는 컴팩트집합 A의 열린덮개이므로 유한

부분덮개 $\{B_d(a_i, \frac{\varepsilon_{a_i}}{2})\}_{i=1}^n$이 존재하여

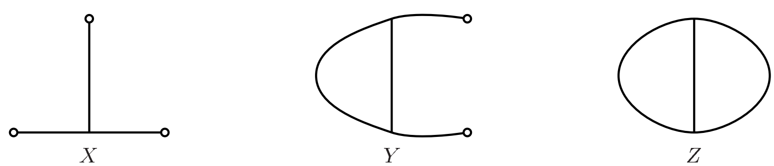
$$A \subset \cup_{i=1}^n B_d(a_i, \frac{\varepsilon_{a_i}}{2})$$

이다. 이제 $\varepsilon = \min\{\varepsilon_{a_1}, \varepsilon_{a_2}, \ldots, \varepsilon_{a_n}\}$이라 하면 삼가부등식에 의하여 $A \subset U(A, \varepsilon) \subset V$를 만족한다.

(4) 보통거리공간 $\mathbb{R}^2$의 닫힌집합 $A = \mathbb{R} \times \{0\}$를 생각하자. 그리고 $V = \{(x, y) \mid xy < 1\}$는 $\mathbb{R}^2$의 열린집합이고 $A \subset V$이다. 그러나 $A \subset U(A, \varepsilon) \subset V$를 만족하는 양의 실수 ε은 존재하지 않는다.

9.4 국소컴팩트와 한 점 컴팩트화

문제 9.4.1. 그림과 같은 유클리드공간 $\mathbb{R}^2$의 두 부분공간 X와 Y는 서로 위상동형이 아니지만, 이들의 한 점 컴팩트화 X^*와 Y^*는 모두 Z와 위상동형이다.



문제 9.4.3. 먼저 보기 9.4.16의 위상동형사상 $\tilde{f} \colon S^1 \to \mathbb{R}^*$를 생각하자. 여기서 $n = (0, 1)$이고 $\tilde{f}(n) = p$이다. 그리고 $\tilde{f}$의 역사상 $\tilde{g} \colon \mathbb{R}^* \to S^1$도 위상동형사상이고 $\tilde{g}(p) = n$이다. 한편 $\mathbb{R}^*$의 부분집합 Y에 대하여

$$\tilde{g}(\overline{Y}) = \overline{\tilde{g}(Y)}, \quad \tilde{g}(Y^\circ) = (\tilde{g}(Y))^\circ$$

이므로

$$\overline{Y} = \tilde{f}(\overline{\tilde{g}(Y)}), \quad Y^\circ = \tilde{f}((\tilde{g}(Y))^\circ)$$

이다. 이러한 사실을 이용하면 다음을 쉽게 보일 수 있다.

(1) $\overline{A} = [1, 2]$, $A^\circ = (1, 2)$.

(2) $\overline{B} = [1, \infty) \cup \{p\}$, $B^\circ = (1, \infty)$.

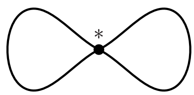
(3) $\overline{C} = [1, \infty) \cup \{p\}$, $C^\circ = (1, \infty)$.

(4) $\overline{D} = [1, \infty) \cup \{p\}$, $D^\circ = (1, \infty)$.

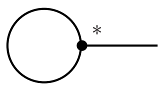
(5) $\overline{E} = [1, \infty) \cup \{p\}$, $E^\circ = (1, \infty)$.

문제 9.4.5. 만약 X가 컴팩트라고 가정하면 Y가 하우스도르프이므로 X는 Y의 닫힌집합이다. 따라서 $\overline{X} = X$이므로 $\overline{X} \neq Y$이다. 이는 X가 Y의 조밀한 부분집합이라는 가정에 모순이다.

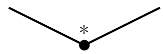
문제 9.4.7. 보기 9.4.19를 참고하자. 주어진 위상공간의 한 점 컴팩화는 다음 그림과 같은 유클리드공간 $\mathbb{R}^2$의 부분공간과 위상동형이다.



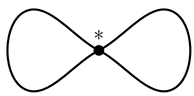
A^*



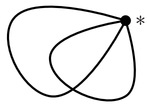
B^*



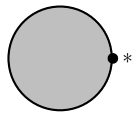
C^*



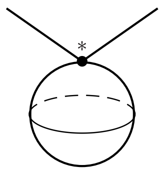
X^*



Y^*



Z^*



W^*

문제 9.4.9. X가 X^*의 부분공간임을 상기하자.

먼저 $\mathrm{cl}_X(A) = \mathrm{cl}_{X^*}(A)$이라 하자. 그러면 $\mathrm{cl}_{X^*}(A)$는 컴팩트공간 X^*의 닫힌집합이므로 컴팩트이다. 따라서 $K = \mathrm{cl}_X(A)$가 우리가 원하는 컴팩트집합이다.

역으로 $A \subset K \subset X$인 컴팩트집합 K가 존재한다고 가정하자. 그러면 X^*가 하우스도르프이므로 K는 X^*의 닫힌집합이다. 그래서 $\mathrm{cl}_{X^*}(A) \subset K \subset X$이므로 $\mathrm{cl}_X(A) = \mathrm{cl}_{X^*}(A) \cap X = \mathrm{cl}_{X^*}(A)$가 성립한다.

문제 9.4.11. (귀류법) $([0,1]^\omega, \bar{\rho})$가 국소컴팩트라고 가정하자. 그러면 점 $\mathbf{0}$에 대하여 $\mathbf{0} \in U \subset C$를 만족하는 열린집합 U와 컴팩트집합 C가 존재하여야 한다. 그리고 $([0,1]^\omega, \bar{\rho})$이 거리공간이므로 $\mathbf{0} \in B_{\bar{\rho}}(\mathbf{0}, r) \subset U \subset C$를 만족하는 충분히 작은 양의 실수 $0 < r < \frac{1}{2}$이 존재한다. 한편 거리공간은 하우스도르프이므로 C는 닫힌집합이다. 따라서 $\overline{B_{\bar{\rho}}(\mathbf{0}, r)} \subset C$이므로 $\overline{B_{\bar{\rho}}(\mathbf{0}, r)}$도 컴팩트이다. 그런데 우리는 문제 9.2.3의 풀이와 같은 방법으로 $\overline{B_{\bar{\rho}}(\mathbf{0}, r)}$가 컴팩트가 아님을 보일 수 있다. 이는 서로 모순이다.

문제 9.4.13. 먼저 X가 Hausdorff임을 상기하자. 점 $\mathbf{0} = (0,0)$에 대하여 임의의 열린구 $B(\mathbf{0}, r)$에 대해 $A = B(\mathbf{0}, r) \cap X$라 하자. 그러면 $\mathrm{cl}_X(A)$는 $\mathbb{R}^2$의 닫힌집합이 아니므로 컴팩트집합이 아니다. 따라서 X는 점 $\mathbf{0}$에서 국소컴팩트가 아니다.

한편 $\mathrm{cl}_{\mathbb{R}^2}(X)$는 $\mathbb{R}^2$의 유계인 닫힌집합이므로 컴팩트하다. 따라서 $\mathrm{cl}_{\mathbb{R}^2}(X)$는 국소컴팩트이다.

제 10 장

가분공간과 가산성

10.1 가분공간(separable space)

문제 10.1.1. (1) $(X, \mathscr{T}_2)$가 가분공간이므로 조밀한 가산 부분집합 A가 존재한다. 이제 우리는 A가 $(X, \mathscr{T}_1)$의 조밀한 부분집합임을 보이면 충분하다. $(X, \mathscr{T}_1)$의 임의의 열린집합 $U \in \mathscr{T}_1$에 대하여 $U \in \mathscr{T}_2$이고 A가 $(X, \mathscr{T}_2)$의 조밀한 부분집합이므로 $A \cap U \neq \varnothing$이다. 따라서 A는 $(X, \mathscr{T}_1)$의 조밀한 부분집합이다.

(2) $\mathscr{U}$와 $\mathscr{D}$를 각각 실수 집합 $\mathbb{R}$상의 보통위상과 이산위상이라 하자. 그러면 $\mathscr{U} \subset \mathscr{D}$이다. 그리고 유클리드공간 $(\mathbb{R}, \mathscr{U})$는 가분이고, 이산공간 $(\mathbb{R}, \mathscr{D})$는 가분이 아니다.

문제 10.1.3. (1) (t1) 정의에 의해 $\varnothing \in \mathscr{T}_Y$이다. 그리고 $X \in \mathscr{T}_X$이므로 $Y = X \cup \{p\} \in \mathscr{T}_Y$이다.

(t2) 이제 $V_\alpha \in \mathscr{T}_Y$ $(\alpha \in \Lambda)$이라 하자. 먼저

$$\Lambda_1 = \{\alpha \in \Lambda \mid V_\alpha = \varnothing\}, \quad \Lambda_2 = \{\alpha \in \Lambda \mid V_\alpha \neq \varnothing\}$$

이라 하자.

(i) $\Lambda_2 = \varnothing$인 경우는 $\Lambda_1 = \Lambda$이므로 $\cup_{\alpha \in \Lambda} V_\alpha = \varnothing$이 되어 $\cup_{\alpha \in \Lambda} V_\alpha \in \mathscr{T}_Y$이다.

(ii) 한편 $\Lambda_2 \neq \varnothing$인 경우는 $\cup_{\alpha \in \Lambda} V_\alpha = \cup_{\alpha \in \Lambda_2} V_\alpha$이다. 그리고 각각의 $\alpha \in \Lambda_2$에 대해 $V_\alpha = U_\alpha \cup \{p\}$를 만족하는 $U_\alpha \in \mathscr{T}_X$가 존재한다. 그래서

$$\cup_{\alpha \in \Lambda} V_\alpha = \cup_{\alpha \in \Lambda_2} V_\alpha = \cup_{\alpha \in \Lambda_2} (U_\alpha \cup \{p\}) = (\cup_{\alpha \in \Lambda_2} U_\alpha) \cup \{p\}$$

이고 $\cup_{\alpha \in \Lambda_2} U_\alpha \in \mathscr{T}_X$이므로 $\cup_{\alpha \in \Lambda} V_\alpha \in \mathscr{T}_Y$이다.

(t3) $V_1, \ldots, V_n \in \mathscr{T}_Y$이라 하자. 먼저 $V_i = \varnothing$인 V_i가 존재하면 $\cap_{i=1}^n V_i = \varnothing$이므로 $\cap_{i=1}^n V_i \in \mathscr{T}_Y$이다. 한편 모든 $i = 1, 2, \ldots, n$에 대해 $V_i \neq \varnothing$인 경우는 각각의 i에 대해

$V_i = U_i \cup \{p\}$를 만족하는 $U_i \in \mathscr{T}_X$가 존재한다. 그래서

$$\cap_{i=1}^n V_i = \cap_{i=1}^n (U_i \cup \{p\}) = (\cap_{i=1}^n U_i) \cup \{p\}$$

이고 $\cap_{i=1}^n U_i \in \mathscr{T}_X$이므로 $\cap_{i=1}^n V_i \in \mathscr{T}_Y$이다.

따라서 $\mathscr{T}_Y$는 집합 Y상의 위상이다.

(2) 우리는 한 점 집합 $\{p\}$가 Y의 조밀한 부분집합임을 보이면 된다. 임의의 점 $y \in Y$와 y의 열린근방 $V \in \mathscr{T}_Y$에 대하여, $\mathscr{T}_Y$의 정의에 의해, $V = U \cup \{p\}$을 만족하는 $U \in \mathscr{T}_X$가 존재한다. 그래서 $p \in V$이고 $\{p\} \cap V \neq \varnothing$이므로 $y \in \mathrm{cl}_Y(\{p\})$이다. 따라서 $\mathrm{cl}_Y(\{p\}) = Y$이다.

(3) $\mathscr{T}_X = \{X \cap V \mid V \in \mathscr{T}_Y\}$이므로 $(X, \mathscr{T}_X)$는 $(Y, \mathscr{T}_Y)$의 부분공간이다.

문제 10.1.5. 우리는 일반성을 잃지 않고 $\mathcal{F}$의 모든 원소가 공집합이 아니라 가정 할 수 있다. X가 가분공간이므로 조밀한 가산 부분집합 A가 존재한다. 임의의 $U \in \mathcal{F}$에 대해 $A \cap U \neq \varnothing$이므로 $a_U \in A \cap U$이 존재한다. 그리고 서로 다른 $U, V \in \mathcal{F}$에 대해 $U \cap V = \varnothing$이므로 $a_U \neq a_V$이다. 따라서 함수 $\varphi\colon \mathcal{F} \to A$, $\varphi(U) = a_U$가 단사이므로 $\mathrm{card}(\mathcal{F}) \leq \mathrm{card}(A)$이다. 그리고 A가 가산집합이므로 $\mathcal{F}$도 가산집합이다.

문제 10.1.7. 먼저 $\mathcal{A}$를 성분이 1 또는 -1로만 이루어진 $\mathbb{R}^\omega$의 원소들의 모임이라 하자. 즉,

$$\mathcal{A} = \{(a_1, a_2, a_3, \ldots) \mid a_i = 1 \text{ 또는 } -1\} = \{-1, 1\} \times \{-1, 1\} \times \{-1, 1\} \times \cdots$$

이다. 그리고 $\mathrm{card}(\mathcal{A}) = 2^{\aleph_0} = \mathfrak{c}$이므로 $\mathcal{A}$는 비가산집합이다. 그러면

$$\mathcal{F} = \{B_{\bar{\rho}}(\mathbf{a}, \frac{1}{2}) \mid \mathbf{a} \in \mathcal{A}\}$$

는 비가산개의 서로소인 $(\mathbb{R}^\omega, \bar{\rho})$의 열린집합들의 모임이다. 따라서 문제 10.1.5에 의해 $(\mathbb{R}^\omega, \bar{\rho})$는 가분이 아니다.

10.2 가산성(countability)

문제 10.2.1. 먼저 f가 열린사상이므로 $f(X)$는 Y의 열린부분공간임을 상기하자.

(1) 임의로 주어진 점 $y \in f(X)$에 대해 $f(x) = y$인 점 $x \in X$를 택하자. X가 제1가산이므로 점 x에서의 가산국소기저 $\mathscr{B}_x = \{B_n\}_{n \in \mathbb{N}}$가 존재한다. 이제 우리는 $\mathscr{C}_y = \{f(B_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$이 점 y에서의 가산국소기저가 됨을 보이면 된다.

(i) 자명하게 $\mathscr{C}_y$는 가산집합이다.

(ii) f가 열린사상이고 B_n이 X의 열린집합이므로 $f(B_n)$은 Y의 열린집합이다. 그래서 $f(B_n)$은 부분공간 $f(X)$의 열린집합이다.

(iii) 모든 $n \in \mathbb{N}$에 대해 $x \in B_n$이므로 $y = f(x) \in f(B_n)$이다.

(iv) 점 $y \in f(X)$의 임의의 열린근방 $V \subset f(X)$에 대해 V는 Y의 열린집합이다. 더구나 f가 연속사상이므로 $f^{-1}(V)$는 x의 열린근방이다. 그리고 $\mathscr{B}_x$가 점 x에서의 국소기저이므로 $x \in B_k \subset f^{-1}(V)$를 만족하는 $k \in \mathbb{N}$가 존재하여 $y \in f(B_k) \subset V$이 된다.

따라서 $\mathscr{C}_y$는 점 y에서의 국소기저이다.

(2) X가 제2가산이므로 X의 가산기저 $\mathscr{B} = \{B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$가 존재한다. 우리는 $\mathscr{C} = \{f(B_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$가 $f(X)$의 가산기저임을 보이면 된다. 자명하게 $\mathscr{C}$는 가산집합이다. 이제 $\mathscr{C}$가 부분공간 $f(X)$의 기저가 됨을 보이자.

(i) $\cup_{n=1}^{\infty} B_n = X$이므로 $\cup_{n=1}^{\infty} f(B_n) = f(\cup_{n=1}^{\infty} B_n) = f(X)$이다.

(ii) 주어진 $y \in f(B_n) \cap f(B_m)$에 대하여 $f(x) = y$인 점 $x \in X$를 택하자. 그리고 f가 열린사상이고 B_n, B_m이 X의 열린집합이므로 $f(B_n)$, $f(B_m)$은 Y의 열린집합이 되어 $f(B_n) \cap f(B_m)$도 Y의 열린집합이다. 한편 f가 연속이므로 $f^{-1}(f(B_n) \cap f(B_m))$은 x의 열린근방이다. 그래서 $x \in B_k \subset f^{-1}(f(B_n) \cap f(B_m))$를 만족하는 $B_k \in \mathscr{B}$가 존재하여, $y = f(x) \in f(B_k) \subset f(B_n) \cap f(B_m)$이 된다.

(iii) 우리는 $\mathscr{C}$가 부분공간 $f(X)$의 기저임을 보여야 한다. 임의의 점 $y \in f(X)$와 y의 열린근방 V가 주어졌다고 하자. 먼저 $f(x) = y$인 점 $x \in X$를 택하자. 그러면 f가 연속이므로 $f^{-1}(V)$는 x의 열린근방이다. 그리고 $\mathscr{B}$가 X의 기저이므로 $x \in B_k \subset f^{-1}(V)$를 만족하는 $k \in \mathbb{N}$가 존재하여 $y \in f(B_k) \subset V$이 된다. 그러므로 $\mathscr{C}$는 부분공간 $f(X)$의 가산기저이다.

따라서 $f(X)$는 제2가산이다.

문제 10.2.3. (b)⇒(a) 정리 10.2.24에 의해 성립한다.

(a)⇒(c) (대우) X가 비가산집합이면 보기 10.2.7에 의해 $(X, \mathscr{T}_f)$는 제1가산이 아니다. 따라서 $(X, \mathscr{T}_f)$가 제1가산이면 X는 가산집합이 되어야 한다.

(c)⇒(b) 이제 X를 가산집합이라 하자.

(i) 먼저 X가 유한집합인 경우: $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$이라 하자. 그러면 $(X, \mathscr{T}_f)$가 이산공간이므로 $\mathscr{B} = \{\{x_1\}, \ldots, \{x_n\}\}$이 $(X, \mathscr{T}_f)$의 가산기저이다. 따라서 $(X.\mathscr{T}_f)$는 제2가산이다.

(ii) X가 무한 가산집합인 경우: 이 경우 $X \sim \mathbb{N}$이다. 그리고

$$\begin{aligned}
\mathscr{C}_0 &= \{X\}, \\
\mathscr{C}_1 &= \{\{x\} \mid x \in X\}, \\
\mathscr{C}_2 &= \{\{x, y\} \mid x, y \in X\}, \\
\mathscr{C}_3 &= \{\{x, y, z\} \mid x, y, z \in X\}, \\
&\ \vdots \\
\mathscr{C}_n &= \{\{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \mid x_i \in X\}, \\
&\ \vdots
\end{aligned}$$

이라 하자. 그러면 $\mathscr{C}_1 \sim X \sim \mathbb{N}$, $\mathscr{C}_2 \sim \mathbb{N}\times\mathbb{N}$, $\mathscr{C}_n \sim \mathbb{N}\times\cdots\times\mathbb{N}$이므로 모든 $\mathscr{C}_n$은 가산집합이다. 그래서 $\mathscr{C} = \cup_{n=0}^{\infty}\mathscr{C}_n$도 가산집합이다. 그리고

$$E \in \mathscr{C} \;\Leftrightarrow\; E = \text{유한집합 이거나 } X$$

이다. 따라서 $\{X - E \mid E \in \mathscr{C}\}$도 가산집합이고 $\mathscr{T}_f = \{X - E \mid E \in \mathscr{C}\}$이다. 그러므로 $\mathscr{B} = \mathscr{T}_f$는 $(X, \mathscr{T}_f)$의 가산기저가 된다. 따라서 $(X, \mathscr{T}_f)$는 제2가산이다.

문제 10.2.5. (i) 먼저 A가 가산집합이라 하자. 그러면 $\mathbb{R}_l$이 제1가산이므로 부분공간 A도 제1가산이다. 그래서 임의의 점 $a \in A$에 대해 a에서의 가산국소기저 $\mathscr{B}_a$가 존재한다. 그러면 $\mathscr{B} = \cup\{\mathscr{B}_a \mid a \in A\}$가 부분공간 A의 가산기저가 된다. 실제로 $\mathscr{B} = \{A \cap [a, a+\frac{1}{n}) \mid a \in A,\ n \in \mathbb{N}\}$으로 잡으면 된다. 따라서 부분공간 A는 제2가산이다.

(ii) 이제 A가 비가산집합이라 하자. 우리는 부분공간 A가 제2가산이 아님을 보이면 된다.

이를 위해 $\mathscr{B}$를 부분공간 A의 임의의 기저라 하자. 임의로 주어진 점 $x \in A$에 대해 $A \cap [x, x+1)$이 부분공간 A에서 x의 열린근방이므로 $x \in B_x \subset A \cap [x, x+1)$를 만족하는 기저의 원소 $B_x \in \mathscr{B}$가 존재한다. 그리고 만약 $x, y \in A$가 서로 다른 두 점이라 하면 우리는 $x < y$라 할 수 있다. 그런데 $x \in B_x$, $x \notin B_y$이므로 $B_x \neq B_y$이다. 그러므로 $f\colon A \to \mathscr{B}$, $f(x) = B_x$는 단사함수가 되어 $\operatorname{card}(A) \preceq \operatorname{card}(\mathscr{B})$이다. 그리고 A가 비가산집합이므로 $\mathscr{B}$도 비가산집합이다.

따라서 부분공간 A의 가산기저가 존재하지 않으므로 A는 제2가산이 아니다.

문제 10.2.7. 집합 $\mathbb{R}$상의 보통거리(유클리드)위상 $\mathscr{U}$, 여유한위상 $\mathscr{T}_f$, 하극한위상 $\mathscr{T}_l$을 생각하자. 그러면 $\mathscr{T}_f \subset \mathscr{U} \subset \mathscr{T}_l$이다.

(1) 가산개의 유클리드공간 $\mathbb{R}$의 곱집합 $\mathbb{R}^\omega$ 상의 곱위상 $\mathscr{T}_p$와 상자위상 $\mathscr{T}_b$를 생각하자. 그러면 $\mathscr{T}_p \subset \mathscr{T}_b$이다. 한편 $(\mathbb{R}^\omega, \mathscr{T}_p)$는 제1가산이고, $(\mathbb{R}^\omega, \mathscr{T}_p)$는 제1가산이 아니다.

(2)(4) $(\mathbb{R}, \mathscr{T}_f)$는 제1가산도 아니고 제2가산도 아니다. 그러나 $(\mathbb{R}, \mathscr{U})$는 제2가산이고 제1가산이다.

(3) $(\mathbb{R}, \mathscr{U})$는 제2가산이지만, $(\mathbb{R}, \mathscr{T}_l)$는 제2가산이 아니다.

문제 10.2.9. X가 무한집합이므로 $q \neq p$인 $q \in X$가 존재한다. 이제 X의 부분집합 $A = X - \{q\}$를 생각하자. 먼저 $A \neq \varnothing, X$이다. 그리고 $p \in A$이므로 A는 X의 닫힌집합이다. 한편 A^c이 유한집합이므로 A는 X의 열린집합이다. 따라서 X는 비연결이다.

문제 10.2.11. (a)$\Rightarrow$(b) 먼저 X가 제1가산이므로

$$B_1 \supset B_2 \supset \cdots \supset B_n \supset B_{n+1} \supset \cdots$$

을 만족하는 x에서의 가산 국소기저 $\mathscr{B}_x = \{B_n \mid n \in \mathbb{N}\}$가 존재한다. 그리고 B_1이 x의 열린근방이고 $x \in A'$이므로 $B_1 \cap A - \{x\} \neq \varnothing$이다. 따라서 $a_1 \in B_1 \cap A - \{x\}$이 존재하여

$a_1 \neq x$이다.

한편 X가 T_1이므로 $\{a_1\}$은 닫힌집합이므로 $B_2 - \{a_1\}$은 x의 열린근방이다. 그리고 $x \in A'$이므로 $a_2 \in (B_2 - \{a_1\}) \cap (A - \{x\})$가 존재한다. 이와 같은 방법을 계속하여(즉, 수학적 귀납법을 사용하여) 우리는 각각의 자연수 n에 대해 $a_n \in (B_n - \{a_1, \ldots a_{n-1}\}) \cap (A - \{x\})$가 존재함을 보일 수 있다. 그리고 이러한 수열 $\{a_n\}$이 우리가 원하는 수열이다.

(b)⇒(a) 성질 4.3.6(2)에 의하여 성립한다.

문제 10.2.13. (1) 자명하게 X는 국소컴팩트 하우스도르프이고 제1가산이다.

(2) 정리 9.4.12에 의해 X의 한 점 컴팩트화 $X^* = X \cup \{p\}$는 컴팩트 하우스도르프이다. 이제 우리는 X^*가 제1가산이 아님을 보이자. 이를 위해 점 p에서의 (X^* 상의) 가산국소기저가 존재하지 않음을 보이면 충분하다. $\{U_i\}_{i \in J}$를 가산개로 이루어진 p의 열린근방들의 모임이라 하자. 여기서 J는 가산집합임을 유의하자. 그러면 각각의 i에 대해 $U_i^c = X^* - U_i = X - U_i$는 X의 컴팩트 부분집합이다. 그리고 X가 이산공간이므로 U_i^c은 유한집합이다. 따라서

$$(\bigcap_{i \in J} U_i)^c = \bigcup_{i \in J} U_i^c$$

은 가산집합이다. 또한 X가 비가산이므로 $\cap_{i \in J} U_i$는 비가산집합이 되어야 한다. 따라서 $a \neq p$인 점 $a \in \cap_{i \in J} U_i$가 존재한다. 그러면 $X^* - \{a\}$는 p의 열린근방이지만 $p \in U_i \subset X - \{a\}$를 만족하는 U_i가 존재하지 않는다. 따라서 $\{U_i\}_{i \in J}$는 점 p에서의 국소기저가 아니다.

문제 10.2.15. 먼저 $\mathscr{B}$를 X의 가산기저라 하자. 이제 A'이 비가산집합임을 귀류법을 사용하여 보이자: 이를 위해 A'이 가산이라 가정하자. 그러면 $A_1 = A \cap A'$은 가산집합이고 $A_2 = A - A_1$은 비가산집합이다. 각각의 점 $x \in A_2$에 대해 $x \notin A'$이므로 $x \in B_x$이고 $B_x \cap A = \{x\}$인 기저의 원소 $B_x \in \mathscr{B}$가 존재한다. 한편 서로 다른 두 점 $x, y \in A_2$에 대해 $x \in B_x$, $x \notin B_y$이므로 $B_x \neq B_y$이다. 따라서 $\mathscr{B}_* = \{B_x \mid x \in A_2\}$는 $\mathscr{B}$의 비가산 부분집합이다. 이는 $\mathscr{B}$가 가산이라는 사실에 모순이다.

문제 10.2.17. 임의로 주어진 점 $x \in X$에서의 가산국소기저 $\mathscr{B}_x$를 택하자. 이제 우리는 $\{x\} = \cap_{B \in \mathscr{B}_x} B$임을 보이면 된다: 먼저 모든 $B \in \mathscr{B}_x$에 대해 $x \in B$이므로 $\{x\} \subset \cap_{B \in \mathscr{B}_x} B$이다. 역으로 만약 $y \notin \{x\}$이면 $y \neq x$이다. 한편 X가 하우스도르프이므로 한 점 집합 $\{y\}$는 X의 닫힌집합이 되어 $X - \{y\}$는 x의 열린근방이다. 그리고 $\mathscr{B}_x$가 x에서의 국소기저이므로 $x \in B_y \subset X - \{y\}$를 만족하는 $B_y \in \mathscr{B}_x$가 존재한다. 그래서 $y \notin B_y$이므로 $y \notin \cap_{B \in \mathscr{B}_x} B$이다. 그러므로 $\{x\} \supset \cap_{B \in \mathscr{B}_x} B$이다.

10.3 적합사상과 완전사상

문제 10.3.1. (a)⇒(b) 먼저 X의 부분집합 A가 모든 컴팩트집합 $K \subset X$에 대해 $A \cap K$이 부분공간 K의 닫힌집합이라고 가정하자. 그러면 모든 컴팩트집합 K에 $K - (A \cap K)$는 부분공간 K의 열린집합이다. 한편 $(X - A) \cap K = K - (A \cap K)$이므로 $(X - A) \cap K$는 K의 열린집합이다. 따라서 조건 (a)에 의해 $X - A$는 X의 열릴집합이므로 A는 X의 닫힌집합이다.

(b)⇒(a) 이제 X의 부분집합 A가 모든 컴팩트집합 $K \subset X$에 대해 $A \cap K$이 부분공간 K의 열린집합이라고 가정하자. 그러면 모든 컴팩트집합 K에 $K-(A\cap K)$는 부분공간 K의 닫힌집합이다. 한편 $(X-A)\cap K = K-(A\cap K)$이므로 $(X-A)\cap K$는 K의 닫힌집합이다. 따라서 조건 (a)에 의해 $X - A$는 X의 닫힌집합이므로 A는 X의 열린집합이다.

문제 10.3.3. (a)⇒(b) 정리 9.1.29에 의해 성립한다.

(b)⇒(a) (대우) X가 컴팩트가 아니라고 가정하자. 그러면 정리 9.3.6에 의해 극한점을 갖지않는 무한집합 $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\} \subset X$이 존재한다. 이제 $A = \{(x_n, \frac{1}{n}) \mid n \in \mathbb{N}\}$으로 놓으면 A도 극한점을 갖지않으므로 A는 $X \times [0,1]$의 닫힌집합이다. 그런데 $p(A) = \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$이 $[0,1]$의 닫힌집합이 아니므로 p는 닫힌사상이 아니다.

문제 10.3.5. (1) 편의상 $f_\alpha = f|_{f^{-1}(U_\alpha)}$라 하자. 그리고 K를 Y의 컴팩트집합이라 하자. 그러면 Y가 하우스도르프이므로 K는 Y의 닫힌집합이다. 한편 $\{U_\alpha\}$가 K의 열린덮개이므로 $K \subset U_{\alpha_1} \cup \cdots \cup U_{\alpha_n}$을 만족하는 유한개의 $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$이 존재한다. 이제 $V_i = K \cap U_{\alpha_i}$라 하면 V_i는 K의 열린집합이고 $\{V_1, \ldots, V_n\}$은 K의 덮개이다.

$A = K - (V_2 \cup \cdots \cup V_n)$는 K의 닫힌집합이고 $A \subset V_1$이다. 그런데 K는 컴팩트 하우스도르프이므로 정규이다. 따라서 $A \subset W_1 \subset \overline{W}_1 \subset V_1$을 만족하는 K의 열린집합 W_1이 존재한다. 더구나 $\{W_1, V_2, \ldots, V_n\}$는 K의 열린덮개이다.

만약 $\{W_1, \ldots, W_{k-1}, V_k, \ldots, V_n\}$이 K의 덮개가 되는 K의 열린집합 $W_1, \ldots, W_k$이 주어졌다면 $B = X - (W_1 \cup \cdots \cup W_{k-1}) - (V_{k+1} \cup \cdots \cup V_n)$는 K의 닫힌집합이고 $B \subset V_k$이다. 그런데 K가 정규이므로 $B \subset W_k \subset \overline{W}_k \subset V_k$을 만족하는 K의 열린집합 W_k이 존재한다. 더구나 $\{W_1, \ldots, W_k, V_{k+1}, \ldots, V_n\}$은 K의 덮개이다. 이 방법을 n번하면 우리는 $\overline{W}_i \subset V_i$이고 $K = \cup_{i=1}^n W_i$인 K의 열린집합 $W_1, \ldots, W_n$을 얻을 수 있다.

한편 $\overline{W}_i$는 K의 닫힌집합이므로 $\overline{W}_i$는 컴팩트이다. 편의상 $C_i = \overline{W}_i$, $f_i = f_{\alpha_i}$라 하자. 그러면 $K = \cup_{i=1}^n C_i$이다. 그러므로 $f^{-1}(K) = \cup_{i=1}^n f_1^{-1}(C_i)$이다. 그런데 각각의 f_i가 적합사상이므로 $f_i^{-1}(C_i)$는 컴팩이다. 따라서 $f^{-1}(K) = \cup_{i=1}^n f_1^{-1}(C_i)$는 컴팩트이다.

(2) 편의상 $f_i = f|_{f^{-1}(C_i)}$이라 하고, K를 Y의 컴팩트집합이라 하자. 그러면 각각의 $K_i = K \cap C_i$는 컴팩트공간 K의 닫힌집합이므로 컴팩트이다. 그래서 K_i는 C_i의 컴팩트집합이다. 그리고 f_i가 적합사상이므로 $f_i^{-1}(K_i)$는 컴팩트이다. 따라서 $f^{-1}(K) = \cup_{i=1}^n f_i^{-1}(K_i)$는 컴팩트이다.

문제 10.3.7. (1) X, Y, Z를 모두 유클리드공간 $\mathbb{R}$이라 하고, f와 g를 모두 항등사상 $\mathrm{id}_{\mathbb{R}}$이라 하자. 그러면 자명하게 f와 g는 모두 완전사상이다. 그런데 $F(\mathbb{R}) = \{(x,x) \mid x \in \mathbb{R}\}$이므로 F는 전사가 아니다. 따라서 F는 완전사상이 아니다.

(2) (i) 먼저 f와 g가 연속이므로 $F = (f,g)$도 연속이다. 그리고 자명하게 $F\colon X \to F(X)$는 전사이다.

(ii) 임의의 점 $(y,z) \in F(X)$에 대하여 f와 g가 완전사상이므로 $f^{-1}(y)$와 $g^{-1}(z)$는 모두 X의 컴팩트집합이다. 그리고 X가 하우스도르프이므로 $F^{-1}(y,z) = f^{-1}(y) \cap g^{-1}(z)$도 X의 컴팩트집합이다.

(iii) 이제 F가 닫힌사상임을 보이자: 이를 위해 C를 X의 닫힌집합이라 하고 $(y,z) \in \overline{F(C)}$라 하자. 먼저 f, g가 닫힌사상이므로

$$(x,y) \in \overline{F(C)} = \overline{\{(f(c),g(c)) \mid c \in C\}} \subset \overline{f(C) \times g(C)} = \overline{f(C)} \times \overline{g(C)} = f(C) \times g(C)$$

이 되어 $f(c_1) = x$, $g(c_2) = y$를 만족하는 $c_1, c_2 \in C$가 존재한다. 이제 우리는 $f^{-1}(x) \cap g^{-1}(y) \cap C \neq \varnothing$임을 보이자. 만약 $f^{-1}(x) \cap g^{-1}(y) \cap C = \varnothing$이라 가정하면 $f^{-1}(x) \cap C$와 $g^{-1}(y) \cap C$는 X의 서로소인 컴팩트집합이다. 그리고 X가 Hausdorff이므로 정리 9.1.16에 의해

$$f^{-1}(x) \cap C \subset U_x, \quad g^{-1}(y) \cap C \subset U_y, \quad U_x \cap U_y = \varnothing$$

을 만족하는 X의 열린집합 U_x와 U_y가 존재한다. 한편 참고 5.2.9에 의해

$$x \in V_x, \quad f^{-1}(V_x) \subset U_x, \quad y \in V_y, \quad g^{-1}(V_y) \subset U_y$$

를 만족하는 열린집합 $V_x \subset Y$, $V_y \subset Z$가 존재한다. 그러면 (x,y)의 열린근방 $V_x \times V_y$에 대하여 $F(C) \cap (V_x \times V_y) = \varnothing$이 되어 $(x,y) \notin \overline{F(X)}$이다. 이는 모순이다. 따라서 $f^{-1}(x) \cap g^{-1}(y) \cap C \neq \varnothing$이 되어야 한다. 그리고 점 $c \in f^{-1}(x) \cap g^{-1}(y) \cap C$에 대해 $F(c) = (x,y)$이므로 $(x,y) \in F(C)$이다. 그러므로 $F(C)$는 $F(X)$의 닫힌집합이다.

문제 10.3.9. (귀류법) $f|\colon D \to Y$가 닫힌사상이라 가정하자.

(i) 먼저 $f(D) = f(X)$임을 보이자: D는 부분공간 D의 닫힌집합이고 $f|$이 닫힌사상이므로 $f|(D)$는 Y의 닫힌집합이다. 한편 $f|(D) = f(D)$이므로 $f(D)$는 Y의 닫힌집합이다. 그리고 $f\colon X \to Y$가 연속이므로 $f^{-1}(f(D))$는 X의 닫힌집합이다. 그런데 $D \subset f^{-1}(f(D))$이므로 폐포의 최소성에 의해 $\overline{D} \subset f^{-1}(f(D))$이다. 한편 $\overline{D} = X$이므로 $f^{-1}(f(D)) = X$이 되어 $f(D) = f(X)$이다.

(ii) 이제 모든 $y \in f(X)$에 대해 $f^{-1}(y) \subset D$임을 보이자: 귀류법을 사용하여 보이자. 이를 위해 $f^{-1}(y) \nsubseteq D$인 점 $y \in f(X)$가 존재한다고 가정하자. 그러면 $f^{-1}(y) - D \neq \varnothing$이므로 점 $x \in f^{-1}(y) - D$가 존재한다. 그러면 (i)에 의해 $f^{-1}(y) \cap D \neq \varnothing$이고 가정에 의해

$f^{-1}(y) \cap D$는 X의 컴팩트집합이다. 그리고 $x \notin f^{-1}(y) \cap D$이고 X가 Hausdorff이므로

$$x \in U, \quad f^{-1}(y) \cap D \subset V, \quad U \cap V = \varnothing$$

을 만족하는 X의 열린집합 U와 V가 존재한다. 그러면 $D \cap V^c$이 D의 닫힌집합이고 $f|$가 닫힌사상이므로 $f(D \cap V^c) = f|(D \cap V^c)$은 Y의 닫힌집합이다. 그리고 f가 연속이므로 $[f^{-1}(f(D \cap V^c))]^c$은 X의 열린집합이다. 편의상 $W = [f^{-1}(f(D \cap V^c))]^c$이라 하자. 그러면 $x \in W$이다. (왜냐하면 만약 $x \notin W$이라 가정하면 $x \in f^{-1}(f(D \cap V^c))$이므로 $f(x) \in f(D \cap V^c)$이다. 그래서 $f(d) = f(x)$인 $d \in D \cap V^c$가 존재한다. 그런데 $f(x) = y$이므로 $d \in f^{-1}(y) \cap D \subset V$이다. 이는 $d \in D \cap V^c$에 모순이다.)

그래서 $U \cap W$는 x의 열린근방이다. 그러면 D가 X의 조밀한 부분집합이므로 $U \cap W \cap D \neq \varnothing$이 되어 $z \in U \cap W \cap D$가 존재하여야 한다. 그래서 $z \in W$이므로 $z \notin f^{-1}(f(D \cap V^c))$이 되어 $f(z) \notin f(D \cap V^c)$이다. 따라서 $z \notin D \cap V^c$이다. 그런데 $z \in D$이므로 $z \notin V^c$이 되어 $z \in V$이다. 그러므로 $z \in U \cap V$이다. 이는 $U \cap V = \varnothing$에 모순이다. 따라서 모든 $y \in f(X)$에 대해 $f^{-1}(y) \subset D$이 되어야 한다.

(iii) 한편 $X = f^{-1}(f(X))$이므로 $X = \cup_{y \in f(X)} f^{-1}(y)$이다. 따라서 (ii)에 의해 $X \subset D$가 되어 $D = X$이다. 이는 D가 X의 진부분집합이라는 가정에 모순이다.

제 11 장

거리공간상의 컴팩트

11.1 여러 가지 컴팩트

문제 11.1.1. (a)⇒(b) 극한점컴팩트의 정의에 의해 성립한다.

(b)⇒(a) A를 X의 무한 부분집합이라 하자. 그러면 A는 가산인 무한 부부집합 B를 포함한다. 그리고 (b)에 의해 $B' \neq \varnothing$이고 $B' \subset A'$이므로 $A' \neq \varnothing$이 된다. 그러므로 A도 극한점을 갖는다. 따라서 X는 극한점컴팩트이다.

문제 11.1.3. $(\mathbb{R}, \mathscr{T}_c)$상의 수열 $1, 2, 3, \ldots$은 수렴하는 부분수열을 갖지 않는다(보기 4.3.5 참조).

문제 11.1.5. (1) B를 A의 무한부분집합이라 하자. 그러면 B는 극한점컴팩트공간 X의 무한 부분집합이므로 극한점 $p \in B'$을 갖는다. 그런데 $B \subset A$이고 A가 닫힌집합이므로 $p \in B' \subset \overline{B} \subset A$이다. 따라서 B의 극한점 p가 A에서 존재하므로 A도 극한점컴팩트이다.

(2) $\mathscr{V} = \{V_n \mid n \in \mathbb{N}\}$을 부분공간 A의 가산 열린덮개라 하자. 그러면 각각의 V_n은 A의 열린집합이고 $A = \cup_{n=1}^{\infty} V_n$이다. 한편 부분공간위상의 정의에 의해 $V_n = U_n \cap A$를 만족하는 X의 열린집합 U_n이 존재하여 $A \subset \cup_{n=1}^{\infty} U_n$이다. 그러므로 $\mathscr{U} = \{U_n \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{A^c\}$은 X의 가산열린덮개가 된다. 한편 X가 가산컴팩트이므로 $\mathscr{U}$의 유한 부분덮개가 존재하여

$$X = U_{n_1} \cup U_{n_2} \cup \cdots \cup U_{n_k} \cup A^c \quad \text{또는} \quad X = U_{n_1} \cup U_{n_2} \cup \cdots \cup U_{n_k}$$

이 된다. 어느 경우든 $A \subset U_{n_1} \cup U_{n_2} \cup \cdots \cup U_{n_k}$이므로 $A = V_{n_1} \cup V_{n_2} \cup \cdots \cup V_{n_k}$이다. 따라서 부분공간 A도 가산컴팩트이다.

(3) $\{a_n\}$을 A상의 수열이라 하자. 그러면 $\{a_n\}$은 X상의 수열도 되고, X가 수열컴팩트이므로 X에서 수렴하는 부분수열 $\{a_{n_k}\}$가 존재한다. 우리는 부분수열 $\{a_{n_k}\}$의 극한을 $p \in X$라 하자. 이제 $B = \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$, $B_1 = \{a_{n_k} \mid k \in \mathbb{N}\}$이라 하면 $B_1 \subset B \subset A$이다. 그

리고 A가 닫힌집합이므로 $p \in \overline{B}_1 \subset \overline{B} \subset A$이다. 따라서 부분수열 $\{a_{n_k}\}$는 A에서 수렴한다. 그러므로 A는 수열컴팩트이다.

문제 11.1.7. $\{y_n\}$을 $f(X)$상의 수열이라 하자. 그리고 각각의 $n \in \mathbb{N}$에 대해 $f(x_n) = y_n$을 만족하는 $x_n \in X$을 택하자. 그런데 X가 수열컴팩트이므로 수열 $\{x_n\}$은 수렴하는 부분수열 $\{x_{n_k}\}$를 갖는다. 우리는 부분수열 $\{x_{n_k}\}$의 극한을 $p \in X$라 하자. 이제 수열 $\{y_n\}$의 부분수열 $\{y_{n_k} = f(x_{n_k})\}$이 $f(p)$로 수렴함을 보이자. $f(p)$의 열린근방 $V \subset Y$에 대하여 f가 연속이므로 $f^{-1}(V)$는 p의 열린근방이다. 그리고 부분수열 $\{x_{n_k}\}$이 p로 수렴하므로 $x_{n_k} \in f^{-1}(V)$ $(\forall k \geq k_0)$를 만족하는 자연수 k_0가 존재한다. 이러한 자연수 k_0에 대해 $y_{n_k} = f(x_{n_k}) \in V$ $(\forall k \geq k_0)$이 되므로 부분수열 $\{y_{n_k} = f(x_{n_k})\}$는 $f(p) \in f(X)$로 수렴한다. 따라서 $f(X)$는 수열컴팩트이다.

문제 11.1.9. (1) 임의의 점 $x \in X$와 양의 실수 $\varepsilon > 0$에 대해 $\delta = \varepsilon$으로 택하면

$$d(x, y) < \delta \;\Rightarrow\; d(f(x), f(y)) = d(x, y) < \delta = \varepsilon$$

을 만족한다. 따라서 f는 연속이다.

(2) 만약 $f(x) = f(y)$이면 $d(f(x), f(y)) = 0$이다. 그래서 $d(x, y) = 0$이 되어 $x = y$이다. 따라서 f는 단사이다.

(3) (귀류법) f가 전사가 아니라 가정하자. 그러면 $a \in X - f(X)$가 존재한다. 그리고 X가 컴팩트이고 f는 연속이므로 $f(X)$는 거리공간(Hausdorff) X의 컴팩트 부분집합이되어 $f(X)$는 X의 닫힌집합이다. 따라서 $X - f(X)$는 X의 열린집합이 되어 $a \in B_d(a, \varepsilon) \subset X - f(X)$인 열린구 $B_d(a, \varepsilon)$가 존재하여 $B_d(a, \varepsilon) \cap f(X) = \varnothing$이다. 이제 수열

$$x_1 = a,\; x_2 = f(x_1),\; \ldots,\; x_n = f(x_{n-1}),\; \ldots$$

를 생각하자. 그러면 $x_1 = a$이고 $x_2 = f(x_1) \in f(X)$이므로 $d(x_1, x_2) \geq \varepsilon$이다. 이제 임의의 서로 다른 두 자연수 m, n에 대해 $m > n$이라 하면

$$d(x_m, x_n) = d(f^{m-1}(a), f^{n-1}(a)) = d(f^{m-2}(a), f^{n-2}(a)) = \cdots = d(f^{m-n}(a), a)$$

이다. 그리고 $m - n \geq 1$이므로 $f^{m-n}(a) \in f(X)$이 되어 $d(x_m, x_n) = d(f^{m-n}(a), a) \geq \varepsilon$이다. 그러므로 수열 $\{x_n\}$은 수렴하는 부분수열을 갖지 않는다. 따라서 거리공간 X가 수열컴팩트가 아니므로 컴팩트도 아니다. 이는 가정에 모순이다.

(4) 만약 X가 컴팩트하면 (1), (2), (3)에 의해 f는 전단사인 연속사상이다. 그러므로 우리는 f^{-1}이 연속임을 보이는 대신에 f가 닫힌사상임을 보이면 된다. 그런데 f의 정의역 X가 컴팩트이고 공역 X가 Hausdorff이므로 f는 닫힌사상이다.

11.2 완비 거리공간(complete metric spaces)

문제 11.2.1. (a)⇒(b) 먼저 (X, d)가 완전유계라 가정하자. 그리고 임의의 양의 실수 $\varepsilon > 0$이 주어졌다 하자. 그러면 (X, d)가 완전유계이므로

$$X = B_d(x_1, \varepsilon) \cup \cdots \cup B_d(x_n, \varepsilon)$$

을 만족하는 유한개의 점 $x_1, \ldots, x_n \in X$이 존재한다. 그런데 $B_d(x_i, \varepsilon) \subset B_{\bar{d}}(x_i, \varepsilon)$이므로

$$X = B_d(x_1, \varepsilon) \cup \cdots \cup B_d(x_n, \varepsilon) \subset B_{\bar{d}}(x_1, \varepsilon) \cup \cdots \cup B_{\bar{d}}(x_n, \varepsilon) \subset X$$

이 되어

$$X = B_{\bar{d}}(x_1, \varepsilon) \cup \cdots \cup B_{\bar{d}}(x_n, \varepsilon)$$

이다. 따라서 $(X, \bar{d})$도 완전유계이다.

(b)⇒(a) 역으로 $(X, \bar{d})$가 완전유계라 가정하자. 그리고 임의의 양의 실수 $\varepsilon > 0$이 주어졌다 하자. 먼저 $0 < \varepsilon' < \min\{\varepsilon, 1\}$인 ε'을 택하자. 그러면 $(X, \bar{d})$가 완전유계이므로

$$X = B_{\bar{d}}(x_1, \varepsilon') \cup \cdots \cup B_{\bar{d}}(x_n, \varepsilon')$$

을 만족하는 유한개의 점 $x_1, \ldots, x_n \in X$이 존재한다. 그런데 $B_{\bar{d}}(x_i, \varepsilon') = B_d(x_i, \varepsilon') \subset B_d(x_i, \varepsilon)$이므로

$$X = B_{\bar{d}}(x_1, \varepsilon') \cup \cdots \cup B_{\bar{d}}(x_n, \varepsilon') \subset B_d(x_1, \varepsilon) \cup \cdots \cup B_d(x_n, \varepsilon) \subset X$$

이 되어

$$X = B_d(x_1, \varepsilon) \cup \cdots \cup B_d(x_n, \varepsilon)$$

이다. 따라서 (X, d)도 완전유계이다.

문제 11.2.3. (1) 먼저 평균값 정리에 의해 $\frac{f(x)-f(y)}{x-y} = f'(c)$인 x와 y사이의 실수 c가 존재한다. 따라서

$$\left|\frac{f(x) - f(y)}{x - y}\right| = |f'(c)| = \frac{1}{2}\left|1 + \frac{c}{\sqrt{c^2 + 1}}\right| < 1$$

이 되어 $|f(x) - f(y)| < |x - y|$이다.

(2) 만약 자연수 n에 대해 $x > y > n$이면 $x > c > y > n$인 실수 c가 존재하여

$$\left|\frac{f(x) - f(y)}{x - y}\right| = |f'(c)| = \frac{1}{2}\left|1 + \frac{c}{\sqrt{c^2 + 1}}\right| > \frac{1}{2}\left|1 + \frac{n}{\sqrt{n^2 + 1}}\right|$$

이다. 그리고 $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+1}} = 1$이므로 되어

$$|f(x) - f(y)| < \alpha|x - y| \ \ \forall x, y \in \mathbb{R}$$

를 만족하는 $0 \le \alpha < 1$는 존재하지 않는다.

(3) 만약 $f(x) = x$이면 $(x + \sqrt{x^2+1})/2 = x$이므로 $\sqrt{x^2+1} = x$이다. 그런데 이 식을 만족하는 실수 x가 존재하지 않으므로 f의 고정점은 존재하지 않는다.

문제 11.2.5. 유클리드공간 $\mathbb{R}$은 완비이지만 $C_n = (0, \frac{1}{n}) \subset \mathbb{R}$에 대해 $\cap_{n=1}^{\infty} C_n = \varnothing$이다.

문제 11.2.7. (1) $\{x_n\}$이 (X, d)상의 코시수열이라 하자. 그리고 임의로 주어진 $\varepsilon_1 > 0$에 대해 $\varepsilon_2 = \min\{\varepsilon, \varepsilon_1\}$이라 하자. 그러면

$$n, m \ge n_0 \quad \Rightarrow \quad d(x_n, x_m) < \frac{\varepsilon_2}{2}$$

를 만족하는 자연수 n_0이 존재한다. 그리고

$$B_d(x_{n_0}, \frac{\varepsilon_2}{2}) \subset B_d(x_{n_0}, \frac{\varepsilon}{2}) \subset \overline{B_d(x_{n_0}, \frac{\varepsilon}{2})} \subset \overline{B_d(x_{n_0}, \varepsilon)}$$

이고

$$x_n \in B_d(x_{n_0}, \frac{\varepsilon_2}{2}) \subset \overline{B_d(x_{n_0}, \varepsilon)} \ \ \forall n \ge n_0$$

이므로 $\{x_n\}_{n \ge n_0}$은 컴팩트 거리공간 $\overline{B_d(x_{n_0}, \varepsilon)}$상의 코시수열이다. 그런데 컴팩트 거리공간은 완비이므로 $\{x_n\}_{n \ge n_0}$은 수렴한다. 따라서 수열 $\{x_n\}_{n \ge 1}$도 수렴한다.

(2) 유클리드공간 $\mathbb{R}$의 부분공간 $X = (0, 1)$를 생각하자. 이제 각각의 $x \in X$에 대해 $\varepsilon_x = \frac{1}{2}\min\{x, 1-x\}$로 택하면 $\overline{B(x, \varepsilon_x)} = [x - \varepsilon_x, x + \varepsilon_x]$는 X의 컴팩트 부분집합이다. 하지만 X상의 코시수열 $\{\frac{1}{n}\}$은 X상에서 수렴하지 않으므로 X는 완비가 아니다.

문제 11.2.9. X가 컴팩트하므로 $\mathcal{C}(X, Y) \subset \mathcal{B}(X, Y)$이다. 따라서 ρ는 $\mathcal{C}(X, Y)$상의 잘 정의된 거리이다.

(1) 먼저 $\mathcal{C}(X, Y)$가 $(\mathcal{B}(X, Y), \rho)$의 닫힌집합임을 보이자. 이를 위해 $f \in \mathcal{B}(X, Y)$가 $\mathcal{C}(X, Y)$의 극한점이라 하자. 그러면 거리 ρ에 의해 f로 수렴하는 수열 $f_n \in \mathcal{C}(X, Y)$이 존재한다. 그리고 수열 $\{f_n\}$은 Y상의 거리 d에 의해 f로 고르게 수렴한다. 따라서 $f\colon X \to Y$도 연속이므로 $f \in \mathcal{C}(X, Y)$이다. 그러므로 $\mathcal{C}(X, Y)$는 $(\mathcal{B}(X, Y), \rho)$의 닫힌집합이다.

(2) (Y, d)가 완비이므로 문제 11.2.8에 의해 $(\mathcal{B}(X, Y), \rho)$도 완비이다. 그리고 (1)에 의해 $\mathcal{C}(X, Y)$가 $(\mathcal{B}(X, Y), \rho)$의 닫힌집합이므로 정리 11.2.10에 의해 $\mathcal{C}(X, Y)$도 완비이다.

11.3 Baire 공간 †

문제 11.3.1. (i) 먼저 임의의 Y의 부분집합 B에 대하여 $\overline{f^{-1}(B)} = f^{-1}(\overline{B})$임을 보이자: $B \subset \overline{B}$이고 f가 연속이므로 $f^{-1}(\overline{B})$는 $f^{-1}(B)$를 포함하는 X상의 닫힌집합이다. 따라서 $\overline{f^{-1}(B)} \subset f^{-1}(\overline{B})$이다. 한편 f가 열린사상이므로 문제 5.2.9에 의해 $\overline{f^{-1}(B)} \supset f^{-1}(\overline{B})$이다. 따라서 $\overline{f^{-1}(B)} = f^{-1}(\overline{B})$이다.

(ii) 이제 Y가 Baire 공간임을 보이자. $\{V_n \mid n \in J\}$을 Y의 가산개의 조밀한 열린집합들의 모임이라 하자. 그러면 f가 연속이므로 $U_n = f^{-1}(V_n)$은 X의 열린집합이다. 그리고 (i)에 의해 $\overline{U}_n = f^{-1}(\overline{V}_n) = f^{-1}(Y) = X$이다. 한편 X가 Baire 공간이므로 $\overline{\cap_{n\in J} U_n} = X$이다. 그리고

$$\begin{aligned}
Y &= f(X) && (\because f\text{가 전사})\\
&= f(\overline{\cap_n U_n}) &&\\
&\subset \overline{f(\cap_n U_n)} && (\because f\text{가 연속})\\
&\subset \overline{\cap_n f(U_n)} &&\\
&= \overline{\cap_n f(f^{-1}(V_n))} &&\\
&= \overline{\cap_n V_n} && (\because f\text{가 전사})
\end{aligned}$$

이므로 $\overline{\cap_{n\in J} V_n} = Y$이다. 따라서 Y도 Baire 공간이다.

문제 11.3.3. $\{C_n \mid n \in J\}$을 $\mathrm{int}_X(C_n) = \varnothing$인 가산개의 닫힌집합들이라 하자. 이제 우리는 $\mathrm{int}_X(\cup_{n\in J} C_n) = \varnothing$임을 귀류법을 사용하여 보이면 된다(성질 11.3.7): 만약 $\mathrm{int}_X(\cup_{n\in J} C_n) \neq \varnothing$이라 가정하면 점 $x \in \mathrm{int}_X(\cup_n C_n)$이 존재하여 $x \in V_x \subset \cup_n C_n$를 만족하는 x의 열린근방 V_x가 존재한다. 한편 가정에 의해 Baire 공간이 되는 x의 열린근방 U_x도 존재한다. 이제 $C_n^* = C_n \cap U_x$라 놓으면 C_n^*는 U_x의 닫힌 부분집합이고, $\mathrm{int}_X(C_n^*) \subset \mathrm{int}_X(C_n) = \varnothing$이므로 $\mathrm{int}_X(C_n^*) = \varnothing$이다. 그리고

$$\varnothing = \mathrm{int}_X(C_n^*) = \mathrm{int}_{U_x}(C_n^*) \cap \mathrm{int}_X(U_x) = \mathrm{int}_{U_x}(C_n^*) \cap U_x = \mathrm{int}_{U_x}(C_n^*)$$

이다. 한편

$$\cup_n C_n^* = \cup_n (U_x \cap C_n) = U_x \cap (\cup_n C_n) \supset U_x \cap V_x$$

이고 $U_x \cap V_x$가 U_x의 열린 부분집합이므로 $\mathrm{int}_{U_x}(\cup_n C_n^*) \supset U_x \cap V_x \ni x$이다. 그래서 $\mathrm{int}_{U_x}(\cup_{n\in J} C_n^*) \neq \varnothing$이다. 이는 U_x가 Baire 공간이라는 가정에 모순이다(성질 11.3.7).

문제 11.3.5. 먼저 집합 $\mathbb{R}$상의 보통위상 $\mathscr{U}$와 하극한위상 $\mathscr{T}_l$에 대하여 $\mathscr{U} \subset \mathscr{T}_l$이다. 따라서 $\mathbb{R}$의 열린집합은 $\mathbb{R}_l$의 열린집합이고, $\mathbb{R}$의 닫힌집합은 $\mathbb{R}_l$의 닫힌집합이다.

(1) 먼저 U를 $\mathbb{R}_l$의 조밀한 열린집합이라 하자. 당연히 $\mathrm{int}_{\mathbb{R}}(U)$는 $\mathbb{R}$의 열린집합이다. 이제 $\mathrm{int}_{\mathbb{R}}(U)$이 $\mathbb{R}$의 조밀한 집합임을 보이자. 유클리드공간 $\mathbb{R}$의 공집합이 아닌 기저의 임의의 원소 (a, b)에 대하여 (a, b)는 $\mathbb{R}_l$의 공집합이 아닌 열린집합이다. 그리고 U가 $\mathbb{R}_l$의 조밀한 집합이므로 $U \cap (a, b) \neq \varnothing$이다. 따라서 $U \cap (a, b)$는 $\mathbb{R}_l$의 공집합이 아닌 열린집합이므로

$[c,d) \subset U \cap (a,b)$를 만족하는 $\mathbb{R}_l$의 공집합이 아닌 기저의 원소 $[c,d)$가 존재한다. 그리고

$$(c,d) = \mathrm{int}_{\mathbb{R}}([c,d)) \subset \mathrm{int}_{\mathbb{R}}(U \cap (a,b)) \subset \mathrm{int}_{\mathbb{R}}(U) \cap \mathrm{int}_{\mathbb{R}}((a,b)) = \mathrm{int}_{\mathbb{R}}(U) \cap (a,b)$$

이고 $(c,d) \neq \varnothing$이므로 $\mathrm{int}_{\mathbb{R}}(U) \cap (a,b) \neq \varnothing$이다. 따라서 $\mathrm{int}_{\mathbb{R}}(U)$는 $\mathbb{R}$의 조밀한집합이다.

(2) D를 $\mathbb{R}$의 조밀한집합이라 하자. $\mathbb{R}_l$의 공집합이 아닌 기저의 임의의 원소 $[a,b)$에 대하여 (a,b)가 $\mathbb{R}$의 공집합이 아닌 열린집합이므로 $D \cap (a,b) \neq \varnothing$이다. 그리고 $D \cap (a,b) \subset D \cap [a,b)$이므로 $D \cap [a,b) \neq \varnothing$이다. 따라서 D는 $\mathbb{R}_l$의 조밀한집합이다.

(3) $\{U_n \mid n \in J\}$를 $\mathbb{R}_l$의 가산개의 조밀한 열린집합들의 모임이라 하자. 각각의 $n \in J$에 대하여 U_n이 $\mathbb{R}_l$의 조밀한 열린집합이므로 (1)에 의해 U_n은 $\mathbb{R}$의 조밀한 열린집합이다. 그리고 $\mathbb{R}$이 Baire이므로 $\cap_{n\in J} U_n$은 $\mathbb{R}$의 조밀한집합이다. 따라서 (2)에 의해 $\cap_{n\in J} U_n$은 $\mathbb{R}_l$의 조밀한집합이다. 그러므로 $\mathbb{R}_l$은 Baire이다.

문제 11.3.7. 정리 11.3.9에 의해 성립한다.

문제 11.3.9. $\mathbb{Q}$가 가산집합이므로 $\mathbb{Q} = \{q_1, q_2, \ldots\}$이라 하자. 그리고 $W_n = \mathbb{R} - \{q_n\}$이라 하자. 그러면 $\mathbb{Q}^c = \cap W_n$이므로 $\mathbb{Q}^c$는 완비거리공간 $\mathbb{R}$의 G_δ-집합이다. 따라서 문제 11.3.8에 의해 $\mathbb{Q}^c$은 Baire이다.

문제 11.3.11. 편의상 $C = \{x \in \mathbb{R} \mid f$는 점 x에서 연속$\}$이라 하자. 우리는 C가 비가산임을 보여야 한다. 문제 11.3.10(1)에 의해 C는 G_δ-집합이다. 그리고 정리 11.3.11에 의해 C는 $\mathbb{R}$의 조밀한 부분집합이다. 그런데 문제 11.3.10(2)에 의해 C는 가산이 될 수 없다. 따라서 C는 비가산이다.

11.4 힐버트공간 †

문제 11.4.1. $\mathbb{R}^\omega$상의 곱위상 $\mathscr{T}_p$, 고른위상 $\mathscr{T}_{\bar\rho}$, 상자위상 $\mathscr{T}_b$에 대하여

$$\mathscr{T}_p \subset \mathscr{T}_{\bar\rho} \subset \mathscr{T}_b$$

이다. 그리고 $\mathbb{H}$상의 이들의 부분공간위상을 각각 $\mathscr{T}_p^*$, $\mathscr{T}_{\bar\rho}^*$, $\mathscr{T}_b^*$라 하자. 그러면

$$\mathscr{T}_p^* \subset \mathscr{T}_{\bar\rho}^* \subset \mathscr{T}_b^*$$

이다. 이제 $\mathbb{H}$상의 ℓ^2-위상 $\mathscr{T}_\mu$에 대해

$$\mathscr{T}_{\bar\rho}^* \subset \mathscr{T}_\mu \subset \mathscr{T}_b^*$$

임을 보이면 된다.

먼저 $\mathscr{T}_{\bar{\rho}}^* \subset \mathscr{T}_\mu$임을 보이자: 임의로 주어진 점 $\mathbf{x} \in \mathbb{H}$와 양의 실수 ε에 대하여 $\delta = \min\{\frac{\varepsilon}{2}, 1\}$로 택하자. 그러면

$$\begin{aligned}
\mathbf{y} \in B_\mu(\mathbf{x}, \delta) \quad &\Rightarrow \quad \mu(\mathbf{x}, \mathbf{y}) < \delta \\
&\Rightarrow \quad d(x_n, y_n) \le \mu(\mathbf{x}, \mathbf{y}) < \delta \quad \forall n \\
&\Rightarrow \quad \bar{d}(x_n, y_n) = d(x_n, y_n) < \tfrac{\varepsilon}{2} \quad \forall n \\
&\Rightarrow \quad \bar{\rho}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \le \tfrac{\varepsilon}{2} < \varepsilon \\
&\Rightarrow \quad \mathbf{y} \in B_{\bar{\rho}}(\mathbf{x}, \varepsilon)
\end{aligned}$$

이다. 그러므로 $B_\mu(\mathbf{x}, \delta) \subset B_{\bar{\rho}}(\mathbf{x}, \varepsilon)$이다. 따라서 $\mathscr{T}_{\bar{\rho}}^* \subset \mathscr{T}_\mu$이다(성질 3.3.16).

이제 $\mathscr{T}_\mu \subset \mathscr{T}_b^*$임을 보이자: $\mathscr{T}_\mu$의 기저의 임의의 원소 $B_\mu(\mathbf{x}, \varepsilon)$이 주어졌다고 하자. 임의로 주어진 점 $\mathbf{y} \in B_\mu(\mathbf{x}, \varepsilon)$에 대해 $\delta = \varepsilon - \mu(\mathbf{x}, \mathbf{y})$이라 하면 $B_\mu(\mathbf{y}, \delta) \subset B_\mu(\mathbf{x}, \varepsilon)$이다. 그리고 각각의 자연수 n에 대해 $U_n = (y_n - \frac{\delta}{2^n}, y_n + \frac{\delta}{2^n})$이라 하면 U_n은 $\mathbb{R}$의 열린집합이다. 따라서 $\Pi_{n=1}^\infty U_n$은 $(\mathbb{R}^\omega, \mathscr{T}_b)$의 기저의 원소이므로 $V = (\Pi_{n=1}^\infty U_n) \cap \mathbb{H}$은 부분공간 $(\mathbb{H}, \mathscr{T}_b{}^*)$의 기저의 원소이다. 또한 임의의 점 $\mathbf{z} \in V$에 대하여

$$\mu(\mathbf{y}, \mathbf{z}) = \sqrt{\sum_{n=1}^\infty (y_n - z_n)^2} \le \sum_{n=1}^\infty |y_n - z_n| < \sum_{n=1}^\infty \frac{\delta}{2^n} = \delta$$

이므로 $V \subset B_\mu(\mathbf{y}, \delta)$이 되어 $\mathbf{y} \in V \subset B_\mu(\mathbf{x}, \varepsilon)$이다. 따라서 $\mathscr{T}_\mu \subset \mathscr{T}_b^*$이다(정리 3.2.9).

문제 11.4.3. (1) 먼저 $S \subset B_\mu(\mathbf{0}, 2)$이므로 S는 유계이다. 그리고 $f\colon \mathbb{H} \to \mathbb{R}$, $f(\mathbf{x}) = \mu(\mathbf{x}, \mathbf{0})$이 연속사상이고 $\{1\}$이 $\mathbb{R}$의 닫힌집합이므로 $S = f^{-1}(\{1\})$은 $\mathbb{H}$의 닫힌집합이다.

(2) S상의 다음과 같은 수열 $\{\mathbf{a}_n\}$을 생각하자.

$$\begin{aligned}
\mathbf{a}_1 &= (1, 0, 0, 0, 0, \ldots) \\
\mathbf{a}_2 &= (0, 1, 0, 0, 0, \ldots) \\
\mathbf{a}_3 &= (0, 0, 1, 0, 0, \ldots) \\
\mathbf{a}_4 &= (0, 0, 0, 1, 0, \ldots) \\
&\ \ \vdots
\end{aligned}$$

그러면 모든 $n \neq m$에 대해 $\mu(\mathbf{a}_n, \mathbf{a}_n) = \sqrt{2} > 1$이므로 수열 $\{\mathbf{a}_n\}$은 수렴하는 부분수열을 갖지 않는다. 그러므로 S는 수열컴팩트가 아니다. 따라서 정리 11.1.18에 의해 S는 컴팩트가 아니다.

제 12 장

Tietze 확장정리와 Urysohn 거리화정리

12.1 Urysohn 보조정리와 Tietze 확장정리

문제 12.1.1. 먼저 $A = \varnothing$ 또는 $B = \varnothing$인 경우를 생각하자. 우리는 $A = \varnothing$이라 하고 B를 임의의 닫힌집합이라 하자. 그러면 상수사상 $g\colon X \to [0,1]$, $g(x) = 1$은 연속이고 $g(\varnothing) = \varnothing \subset \{0\}$, $g(B) \subset \{1\}$이다.

이제 A와 B가 모두 공집합이 아니라 하자. 보기 5.1.22에 의해 $d(x,A)$와 $d(x,B)$가 모두 연속이므로 f는 연속사상이다. 그리고 $f(x) = \begin{cases} 0, & x \in A \\ 1, & x \in B \end{cases}$ 이다. 특별히 A와 B가 닫힌집합이므로 $f^{-1}(0) = A$이고 $f^{-1}(1) = B$이다.

문제 12.1.3. 먼저 X의 닫힌부분공간 $A \cup B \cup C$에서 정의된 함수

$$g\colon A \cup B \cup C \to [a,c], \quad g(x) = \begin{cases} a, & x \in A \\ b, & x \in B \\ c, & x \in C \end{cases}$$

는 연속이다. 따라서 Tietze 확장정리에 의해 연속사상

$$f\colon X \to [a,c] \ \text{s.t.}\ f|_{A\cup B\cup C} = g$$

가 존재한다. 그리고 자명하게 $f(A) \subset \{a\}$, $f(B) \subset \{b\}$, $f(C) \subset \{c\}$이다.

문제 12.1.5. (⇒) X가 컴팩트이고 f가 연속이므로 $f(X)$는 유클리드공간 $\mathbb{R}$의 컴팩트 부분집합이다. 그러므로 $f(X)$는 유계인 닫힌집합이다. 특별히 f는 유계이다.

(⇐) (귀류법) X가 컴팩트가 아니라 가정하자. 그러면 X가 거리공간이므로 X는 극한점컴팩트도 아니다. 따라서 극한점을 갖지않는 무한부분집합 $A \subset X$가 존재한다. 먼저 $A' = \varnothing$이므로 A는 X의 닫힌집합이다. 그리고 임의의 점 $a \in A$에 대해 $a \notin A'$이므로 $U_a \cap A = \{a\}$를 만족하는 a의 열린근방 $U_a \subset X$가 존재하여 $\{a\}$는 부분공간 A의 열린집합이 된다. 따라서 부분공간 A는 이산위상을 갖는다. 그리고 A가 무한집합이므로 $g(A) = \mathbb{N}$인 연속사상 $g\colon A \to \mathbb{R}$이 존재한다. (보다 구체적으로 A가 무한집합이므로 가부번 집합 $B = \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\} \subset A$가 존재한다. 이제 $g(a_n) = n$, $g(A - B) = \{1\}$로 정의하면 된다. 그리고 A가 이산공간이므로 g는 연속이다.) 한편 거리공간 X는 정규이고, A는 X의 닫힌집합이므로 Tietze 확장정리에 의해 g의 확장 $f\colon X \to \mathbb{R}$이 존재한다. 그런데 $f(X) \supset \mathbb{N}$이므로 f는 유계가 아니다. 이는 모순이다.

문제 12.1.7. 함수 $r\colon \mathbb{R}^2 - \{\mathbf{0}\} \to S^1$, $r(\mathbf{x}) = \frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|}$은 연속이고, 모든 $\mathbf{x} \in S^1$에 대해 $r(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$이다. 따라서 $\tilde{f} = f \circ r\colon \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\} \to S^1$이 f의 확장이다.

문제 12.1.9. 먼저 $X \subset X^*$임을 상기하자. 그리고 $x_n = (1 - \frac{1}{n})\frac{\pi}{2}$, $y_n = (-1 + \frac{1}{n})\frac{\pi}{2}$라 하자. 그러면

$$\lim_{n\to\infty} x_n = * = \lim_{n\to\infty} y_n$$

이지만

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \infty, \quad \lim_{n\to\infty} f(y_n) = -\infty$$

이므로 f는 연속사상 $g\colon X^* \to \mathbb{R}$로 확장할 수 없다.

문제 12.1.11. $g_1,\ g_2\colon \overline{A} \to Z$를 f의 확장이라 하자. 그러면

$$h\colon \overline{A} \to Z \times Z, \quad h(x) = (g_1(x), g_2(x))$$

는 연속이다. 한편 Z가 Hausdorff이므로 $\Delta = \{(z,z) \mid z \in Z\}$는 $Z \times Z$의 닫힌집합이다. 그리고 h가 연속이므로 $h^{-1}(\Delta)$는 $\overline{A}$의 닫힌집합이고 $A \subset h^{-1}(\Delta)$이다. 그런데 $\overline{A}$가 A를 포함하는 가장 작은 닫힌집합이므로 $h^{-1}(\Delta) = \overline{A}$이 된다. 따라서 $g_1 = g_2$이다.

문제 12.1.13. (c)⇔(d) $(X, \mathscr{T})$가 거리화가능 공간이므로 거리공간으로 볼수 있다. 따라서 정리 11.1.18에 의해 성립한다.

(d)⇒(b) 만약 $\phi\colon X \to \mathbb{R}$가 연속이면 X가 컴팩트이므로 $\phi(X)$도 $\mathbb{R}$의 컴팩트 부분집합이다. 그리고 Heine-Borel 정리에 의해 $\phi(X)$는 $\mathbb{R}$의 유계인 닫힌집합이다. 따라서 ϕ는 유계이다.

(d)⇒(a) X가 컴팩트이면 곱공간 $X \times X$도 컴팩트이다. 그리고 주어진 거리 d에 대해 $d\colon X \times X \to \mathbb{R}$이 연속이므로 $d(X \times X)$는 $\mathbb{R}$의 컴팩트 부분집합이다. 따라서 Heine-Borel 정리에 의해 $d(X \times X)$는 $\mathbb{R}$의 유계인 닫힌집합이다. 따라서 d는 유계이다.

(a)⇒(b) (귀류법) 먼저 $(X, \mathscr{T})$가 거리화가능 공간이므로 $\mathscr{T}_d = \mathscr{T}$인 X상의 거리 d를 택하자.

이제 유계가 아닌 연속사상 $\phi\colon X \to \mathbb{R}$가 존재한다고 가정하자. 그러면 $F\colon X \to X \times \mathbb{R}$, $F(x) = (x, \phi(x))$는 넣기사상이다. 그리고 $F_*\colon X \to F(X)$, $F_*(x) = F(x)$는 위상동형사상이다. 그리고 $D((x,s),(y,t)) = \sqrt{d(x,y)^2 + (s-t)^2}$가 곱공간 $X \times \mathbb{R}$상의 거리이다. 이제 $d_*\colon X \times X \to \mathbb{R}$을

$$d_*(x,y) = D(F(x), F(y)) = \sqrt{d(x,y)^2 + (\phi(x) - \phi(y))^2}$$

로 정의하면 F_*가 위상동형사상이므로 d_*는 X상의 거리이고 $\mathscr{T}_{d_*} = \mathscr{T}$이다. 그러나 ϕ가 유계가 아니므로 d_*는 유계가 아니다.

(b)⇒(c) (귀류법) X가 극한점컴팩트가 아니라고 가정하자. 그러면 $A' = \varnothing$인 X의 무한부분집합 A가 존재한다. 임의의 점 $a \in A$에 대해 $a \notin A'$이므로 a의 열린근방 U가 존재하여 $U \cap A = \{a\}$이다. 그러므로 한 점 집합 $\{a\}$는 부분공간 A의 열린집합이다. 따라서 부분공간 A는 이산위상을 갖는다.

한편 A가 무한집합이므로 (선택공리에 의해) 전사함수 $\varphi\colon A \to \mathbb{N}$이 존재한다. 그리고 부분공간 A가 이산위상을 가지므로 $\varphi\colon A \to \mathbb{R}$은 연속이다. 또한 모든 거리공간은 정규이므로 X는 정규이고, $A' = \varnothing$이므로 A는 X의 닫힌부분집합이다. 따라서 Tietze 확정정리에 의해 φ의 연속인 확장 $\phi\colon X \to \mathbb{R}$이 존재한다. 그런데 $\phi(X) \supset \mathbb{N}$이므로 ϕ는 유계가 아니다.

문제 12.1.15. (i) 상수사상 $c\colon X \to \mathbb{R}$, $c(x) = 0$이 연속이고, $\mathbb{R}$이 $\mathbb{R}$의 열린집합이므로 $X = c^{-1}(\mathbb{R}) \in \mathcal{S}$이다. 따라서 $\mathcal{S}$는 집합 X상의 부분기저이다.

(ii) 임의의 연속사상 $f\colon X \to \mathbb{R}$와 $\mathbb{R}$의 열린집합 U에 대해 $f^{-1}(U) \in \mathscr{T}$이므로 $\mathcal{S} \subset \mathscr{T}$이다. 한편 $\mathscr{T}_{\mathcal{S}}$가 $\mathcal{S}$를 포함하는 가장작은 위상이므로 $\mathscr{T}_{\mathcal{S}} \subset \mathscr{T}$이다.

역으로 $U \in \mathscr{T}$라 하자. 그러면 U^c는 $(X, \mathscr{T})$의 닫힌집합이다. 각각의 점 $x \in U$에 대해 X가 정규이므로 한 점 집합 $\{x\}$는 X의 닫힌집합이고 $\{x\} \cap U^c = \varnothing$이다. 따라서 Urysohn Lemma에 의해 연속사상

$$f_x\colon X \to [0,1] \hookrightarrow \mathbb{R} \ \text{ s.t. } \ f(x) = 1,\ f(U^c) \subset \{0\}$$

이 존재한다. 그러면 $V_x = f^{-1}((0,2)) \in \mathcal{S}$이고 $x \in V_x \subset U$이다. 더구나 $\mathcal{S} \subset \mathscr{T}_{\mathcal{S}}$이므로 $V_x \in \mathscr{T}_{\mathcal{S}}$이다. 그리고 $U = \cup_{x \in U} V_x$이므로 $U \in \mathscr{T}_{\mathcal{S}}$이다. 따라서 $\mathscr{T} \subset \mathscr{T}_{\mathcal{S}}$이다.

12.2 완전정칙 공간과 Urysohn 거리화정리

문제 12.2.1. 먼저 X가 거리화가능이라 하자. 그리고 성질 10.2.31에 의해 컴팩트 거리공간은 제2가산이므로 X는 제2가산이다.

역으로 X가 제2가산이라 하자. X가 컴팩트 하우스도르프이므로 X는 정규이다. 따라서 Urysohn 거리화정리에 의해 X는 거리화가능이다.

문제 12.2.3. 먼저 $(X, \mathscr{T}_f)$가 거리화가능이면 $(X, \mathscr{T}_f)$는 Hausdorff이다. 따라서 X는 유한집합이다.

역으로 X가 유한집합이면 $(X, \mathscr{T}_f)$는 이산위상을 갖는다. 따라서 $(X, \mathscr{T}_f)$는 이산거리를 갖는 거리공간이다.

문제 12.2.5. 먼저 $\mathbb{R}_l$이 정규이므로 정칙이다. 따라서 부분공간 A도 정칙이다. 그리고 A가 가산집합이므로 부분공간 A는 제2가산이다. 따라서 Urysohn 거리화정리에 의해 부분공간 A는 거리화가능이다.

문제 12.2.7. 먼저 $\varDelta = \{(x,x) \mid x \in X\}$가 컴팩트공간 X와 위상동형이므로 $\varDelta$는 곱공간 $X \times X$의 컴팩트 부분집합이다.

(1) 각각의 $i \in \mathbb{N}$에 대해 $W_i = f^{-1}((-\frac{1}{i}, \frac{1}{i})\}$이라 하면 W_i는 $X \times X$의 열린집합이다. 그리고 $\varDelta = \cap_{i=1}^{\infty} W_i$이다.

(2) 이제 고정된 W_i와 임의의 점 $(x,x) \in \varDelta$에 대해 W_i가 (x,x)의 열린근방이므로 $(x,x) \in U_x \times O_x \subset W_i$를 만족하는 X의 열린집합 U_x, O_x가 존재한다. 그리고 $V_x = U_x \cap O_x$라 하면 V_x는 X의 열린집합으로서 $(x,x) \in V_x \times V_x \subset W_i$를 만족한다. 또한 $\mathscr{V}_i = \{V_x \times V_x \mid x \in X\}$가 컴팩트집합 $\varDelta$의 열린덮개이므로 유한 부분덮개 $\{V_{i,j} \times V_{i,j} \mid j = 1, \ldots, n_i\} \subset \mathscr{V}_i$가 존재하여 $\varDelta \subset \cup_{j=1}^{n_i} V_{i,j} \times V_{i,j} \subset W_i$를 만족한다.

(3) 이제 $\mathscr{B} = \cup_{i=1}^{\infty}\{V_{i,j} \mid j = 1, \ldots, n_i\}$가 X의 기저가 됨을 보이자.

(i) 임의의 점 $x \in X$와 x의 열린근방 U에 대해 U^c이 컴팩트공간 X의 닫힌집합이므로 U^c은 컴팩트이다. 이제 $g\colon U^c \to \mathbb{R}$, $g(y) = |f(x,y)|$이라 하면 g는 연속이므로 $g(z) = \min\{g(y) \mid y \in U^c\}$를 만족하는 $z \in U^c$가 존재한다. 한편 $g(z) = |f(x,z)| > 0$이다. 이제 $r = g(z) = |f(x,z)|$이라 하면 $\frac{1}{i} < r$인 자연수 i이 존재한다. 그리고 $(x,x) \in \varDelta \subset \cup_{j=1}^{n_i} V_{i,j} \times V_{i,j} \subset W_i$이므로 $(x,x) \in V_{i,j} \times V_{i,j} \subset W_i$를 만족하는 $V_{i,j} \in \mathscr{B}$가 존재한다.

만약 $y \in V_{i,j}$이면 $(x,y) \in V_{i,j} \times V_{i,j} \subset W_i$이므로 $|f(x,y)| < \frac{1}{i} < r$이 되어 $y \in U$이다. 따라서 $V_{i,j} \subset U$이다. 그러므로 $x \in V_{i,j} \subset U$이다.

(ii) 그리고 만약 $x \in V_{i,j} \cap V_{k,l}$이면 $U = V_{i,j} \cap V_{k,l}$는 x의 열린근방이다. 그러면 (i)에 의해 $x \in V_{s,t} \subset U$를 만족하는 $V_{s,t} \in \mathscr{B}$가 존재한다.

(4) 따라서 X는 제2가산이다. 그리고 가정에 의해 X가 컴팩트 하우스도르프이므로 정규이다. 따라서 Urysohn 거리화정리에 의해 X는 거리화가능이다.

문제 12.2.9. X를 국소컴팩트 하우스도르프공간이라 하자. 그러면 X는 정칙이므로 X는 T_1이다.

이제 X의 닫힌집합 C와 점 $x \notin C$이 주어졌다 하자. 그러면 C^c가 점 x의 열린근방이고 X가 정칙이므로

$$x \in V \subset \overline{V} \subset C^c$$

을 만족하는 x의 열린근방 V가 존재한다. 한편 X가 국소컴팩트이므로 $x \in U \subset K$를 만족하는 열린집합 U와 컴팩트집합 K가 존재한다. 이제 $W = U \cap V$, $L = K \cap \overline{V}$라 하면 W는 열린집합, L은 컴팩트집합으로서 $x \in W \subset L$이다. 그리고 L이 컴팩트 하우스도르프이므로 부분공간 L은 정규이고 $\{x\}$와 $L - W$이 서로소인 닫힌집합이므로 Urysohn Lemma에 의해 연속사상

$$g \colon L \to [0,1] \ \text{s.t.}\ g(\{x\}) \subset \{1\},\ g(L-W) \subset \{0\}$$

이 존재한다. 이제

$$f \colon X \to [0,1], \quad f(x) = \begin{cases} g(x), & x \in L \\ 0, & x \in X - L \end{cases}$$

이라 하면 f는 연속이고, $f(x) = 1$, $f(C) \subset \{0\}$이다.

따라서 X는 완전정칙이다.

문제 12.2.11. 첨자집합 Λ가 비가산집합이라 하고 X를 곱공간 $[0,1]^\Lambda$라 하자. 이제 X가 제1가산이 아님을 귀류법을 사용하여 보이자. 만약 X가 제1가산이라 가정하면 점 $\mathbf{0} = (0)_{\alpha\in\Lambda} \in X$에서의 가산 국소기저 $\mathscr{B}_{\mathbf{0}} = \{B_n \mid n \in \mathbb{N}\}$이 존재하여 모든 B_n에 대해 $\mathbf{0} \in B_n \in \mathscr{T}_p$이다. 이제 각각의 $\alpha \in \Lambda$에 대해

$$W_\alpha = \Pi_{\beta\in\Lambda} U_\beta,\ \text{여기서}\ U_\beta = \begin{cases} [0,1), & \beta = \alpha \\ [0,1], & \beta \neq \alpha \end{cases}$$

이라 하면 $\mathbf{0} \in W_\alpha \in \mathscr{T}_p$이다. 그리고 $\mathscr{B}_{\mathbf{0}}$이 점 $\mathbf{0}$에서의 국소기저이므로 주어진 $\alpha \in \Lambda$에 대해 $\mathbf{0} \in B_{n_\alpha} \subset W_\alpha$를 만족하는 $B_{n_\alpha} \in \mathscr{B}_{\mathbf{0}}$이 존재한다. 이제 함수

$$\varphi \colon \Lambda \to \mathbb{N}, \quad \varphi(\alpha) = n_\alpha$$

를 생각하자. 그러면 $\Lambda = \cup_{n=1}^\infty \varphi^{-1}(n)$이고 Λ가 비가산이므로 적어도 하나의 $\varphi^{-1}(n)$은 비가산집합이다. 이러한 n에 대해 $B_n \subset \cap_{\alpha\in\varphi^{-1}(n)} W_\alpha$이므로 $B_n \notin \mathscr{T}_p$가 되어 모순이다.

문제 12.2.13. 먼저 완전사상 p가 전사인 닫힌사상이고 X가 T_1이므로 Y도 T_1이다.

한편 주어진 Y의 닫힌집합 C와 점 $y \notin C$에 대해 p가 완전사상이므로 $A = p^{-1}(y)$는 컴팩트이고 $B = p^{-1}(C)$는 닫힌집합으로서 $A \cap B = \varnothing$이다. 문제 12.2.12에 의해 연속사상

$$f\colon X \to [0,1] \text{ s.t. } f(A) \subset \{0\},\ f(B) \subset \{1\}$$

이 존재한다. 이제 각각의 $r \in (0,1)$에 대해 $U_r = f^{-1}([0,r))$은 X의 열린집합이다. 만약 $0 < r < s < 1$이면 $r < t < s$인 실수 t이 존재하여

$$U_r \subset D_t = f^{-1}([0,t]) \subset U_s$$

이다. 그리고 D_t가 닫힌집합이므로

$$U_r \subset \overline{U}_r \subset D_t = f^{-1}([0,t]) \subset U_s$$

을 만족한다. 이제 $V_r = p(U_r)$이라 하면 p가 열린사상이므로 V_r은 Y의 열린집합이다. 만약 $r < s$이면

$$V_r = p(U_r) \subset p(\overline{U}_r) \subset p(U_s) = V_s$$

이다. 그런데 p가 닫힌사상이므로 $p(\overline{U}_r)$는 Y의 닫힌집합이다. 따라서

$$V_r \subset \overline{V}_r \subset p(\overline{U}_r) \subset V_s$$

이다.

따라서 각각의 $r \in (0,1)$에 대하여 다음을 만족하는 Y의 열린집합 V_r이 존재한다:

(i) $\overline{U}_r \subset U_s \quad (r < s,\ r, s \in (0,1))$,

(ii) $A \subset U_r \quad (\forall r \in (0,1))$,

(iii) $\overline{U}_r \subset B^c \quad (\forall r \in (0,1))$.

이제 함수 $f\colon X \to [0,1]$를 다음과 같이 정의하자. 먼저 모든 $r \in (0,1)$에 대하여 $x \in U_r$이면 $f(x) = 0$으로 정의하고, 만약 $x \notin U_r$인 $r \in D$이 존재하는 경우는

$$f(x) = \sup\{r \mid x \notin U_r\}$$

로 정의하자. 즉,

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in U_r\ \forall r \in (0,1) \\ \sup\{r \mid x \notin U_r\}, & \text{그 밖의 경우} \end{cases}$$

이다. 그러면 f는 정의에 의하여 자명하게

$$f(X) \subset [0,1], \quad f(A) = 0, \quad f(B) = 1$$

을 만족한다. 그리고 Urysohn 보조정리(lemma)의 증명과정과 같이 f가 연속임을 보일 수 있다.

12.3 Stone-Čech 컴팩트화

문제 12.3.1. X가 컴팩트 Hausdorff 공간 $\beta(X)$의 컴팩트 부분공간이므로 X는 $\beta(X)$의 닫힌 부분집합이다. 따라서 $\beta(X) = \overline{X} = X$이다.

문제 12.3.3. (1) 넣기사상 $h\colon (0,1) \hookrightarrow S^1$, $h(x) = (\cos 2\pi x, \sin 2\pi x)$가 유도하는 $(0,1)$의 컴팩트화가 Y_1이므로 $Y_1 \cong \overline{h(X)} = S^1$이다. 따라서 우리는 문제 12.3.2에 의해 연속사상

$$\tilde{f}_*\colon S^1 \to \mathbb{R} \text{ s.t. } \tilde{f}_* \circ h = f$$

가 존재하지 않음을 보이면 된다. 이러한 연속사상 $\tilde{f}_*$가 존재한다고 가정하자. 그리고 $p = (1,0) \in S^1$이라 하자. 그러면 두 수열 $x_n = \frac{1}{n}$, $y_n = 1 - \frac{1}{n}$ $(\forall n \in \mathbb{N})$에 대해 $\lim\limits_{n\to\infty} h(x_n) = p = \lim\limits_{n\to\infty} h(y_n)$이므로

$$\begin{aligned}
\tilde{f}_*(p) &= \tilde{f}_*(\lim_{n\to\infty} h(x_n)) = \lim_{n\to\infty} \tilde{f}_*(h(x_n)) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} x_n = 0,\\
\tilde{f}_*(p) &= \tilde{f}_*(\lim_{n\to\infty} h(y_n)) = \lim_{n\to\infty} \tilde{f}_*(h(y_n)) = \lim_{n\to\infty} f(y_n) = \lim_{n\to\infty} y_n = 1
\end{aligned}$$

이 되어 모순이다.

(2) 포함사상 $i\colon (0,1) \hookrightarrow [0,1]$가 유도하는 $(0,1)$의 컴팩트화가 Y_2이므로 $Y_2 = [0,1]$이다. 따라서 연속사상

$$\tilde{f}\colon [0,1] \to \mathbb{R} \text{ s.t. } \tilde{f} \circ i = f$$

가 존재하지 않음을 보이면 된다. 이러한 연속사상 $\tilde{f}$가 존재한다고 가정하자. 그러면 두 수열 $x_n = \frac{1}{2n\pi + \frac{1}{2}\pi}$, $y_n = \frac{1}{2n\pi + \frac{3}{2}\pi}$ $(\forall n \in \mathbb{N})$에 대해 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0 = \lim\limits_{n\to\infty} y_n$이므로

$$\begin{aligned}
\tilde{f}(0) &= \tilde{f}(\lim_{n\to\infty} i(x_n)) = \lim_{n\to\infty} \tilde{f}(i(x_n)) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} 1 = 1,\\
\tilde{f}(0) &= \tilde{f}(\lim_{n\to\infty} i(y_n)) = \lim_{n\to\infty} \tilde{f}(i(y_n)) = \lim_{n\to\infty} f(y_n) = \lim_{n\to\infty} -1 = -1
\end{aligned}$$

이 되어 모순이다.

(3) 넣기사상 $h\colon (0,1) \hookrightarrow I^2 = [-1,1]^2$, $h(x) = (x, \sin\frac{1}{x})$가 유도하는 $(0,1)$의 컴팩트화가 Y_3이므로 $Y_3 \cong \overline{h(X)} = \{0\} \times [-1,1] \cup \{(x, \sin\frac{1}{x}) \mid 0 < x \le 1\}$이다. 따라서 우리는 문제 12.3.2에 의해 연속사상

$$\tilde{f}_*\colon \overline{h(X)} \to \mathbb{R} \text{ s.t. } \tilde{f}_* \circ h = f$$

가 존재하지 않음을 보이면 된다. 이러한 연속사상 $\tilde{f}_*$가 존재한다고 가정하자. 그러면 두 수열 $x_n = \frac{1}{2n\pi+\frac{1}{4}\pi}$, $y_n = \frac{1}{2n\pi+\frac{3}{4}\pi}$ $(\forall n \in \mathbb{N})$에 대해 $\lim_{n\to\infty} h(x_n) = (0, \frac{1}{\sqrt{2}}) = \lim_{n\to\infty} h(y_n)$이므로

$$\begin{aligned}\tilde{f}_*(0, \tfrac{1}{\sqrt{2}}) = \tilde{f}_*(\lim_{n\to\infty} h(x_n)) = \lim_{n\to\infty} \tilde{f}_*(h(x_n)) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = \tfrac{1}{\sqrt{2}},\\ \tilde{f}_*(0, \tfrac{1}{\sqrt{2}}) = \tilde{f}_*(\lim_{n\to\infty} h(y_n)) = \lim_{n\to\infty} \tilde{f}_*(h(y_n)) = \lim_{n\to\infty} f(y_n) = -\tfrac{1}{\sqrt{2}}\end{aligned}$$

이 되어 모순이다.

(4) 넣기사상 $h\colon X = (0,1) \hookrightarrow I^3 = [-1,1]^3$, $h(x) = (x, \sin\frac{1}{x}, \cos\frac{1}{x})$에 의해 유도되는 $(0,1)$의 컴팩트화 Y를 생각하자. 그러면

$$Y \cong \overline{h(X)} = \{0\} \times S^1 \cup \{(x, \sin\frac{1}{x}, \cos\frac{1}{x}) \mid 0 < x \le 1\} \subset [0,1] \times S^1$$

이다. 따라서 우리는 문제 12.3.2에 의해 연속사상

$$\tilde{f}_i\colon \overline{h(X)} \to \mathbb{R} \ \text{s.t.}\ \tilde{f}_i \circ h = f$$

가 존재함을 보이면 된다. 그런데 각각의 $i = 1,2,3$에 대해 사영사상

$$\pi_i\colon \overline{h(X)} \to \ \mathbb{R},\ \pi(x_1, x_2, x_3) = x_i$$

은 연속이고 $\pi_i \circ h = f_i$이므로 우리가 원하는 연속사상 $\tilde{f}_i = \pi_i$가 존재한다.

문제 12.3.5. (1) (귀류법) 주어진 $\varepsilon > 0$에 대해 조건을 만족하는 $a \in S_\Omega$가 존재하지 않는다고 가정하자. 그러면

$$b_n \prec b_{n+1}, \quad |f(b_{n+1}) - f(b_n)| \ge \varepsilon$$

을 만족하는 증가수열 $b_n \in S_\Omega$이 존재한다. 그리고 S_Ω의 가산부분집합 $\{b_n \in S_\Omega \mid n \in \mathbb{N}\}$의 상계 $b \in S_\Omega$가 존재한다(정리 4.2.47). 그러면 b_n은 b로 수렴하지만 $f(b_n)$은 수렴하지 않는다. 이는 f가 연속이라는 가정에 모순이다.

(2) 각각의 자연수 $n \in \mathbb{N}$에 대해 $\frac{1}{n} > 0$이므로, (1)에 의해, 모든 $b \succ a_n$에 대해

$$|f(b) - f(a_n)| < \frac{1}{n}$$

을 만족하는 $a_n \in S_\Omega$가 존재한다. 그리고 S_Ω의 가산부분집합 $\{a_n \in S_\Omega \mid n \in \mathbb{N}\}$의 상계 $a \in S_\Omega$가 존재한다(정리 4.2.47). 그러면 임의의 $x, y \in (a, \Omega)$에 대해 $x, y \succ a_n (\forall n \in \mathbb{N})$이므로 모든 자연수 $n \in \mathbb{N}$에 대해

$$|f(x) - f(y)| \le |f(x) - f(a_n)| + |f(a_n) - f(y)| < \frac{1}{n} + \frac{1}{n} = \frac{2}{n}$$

이 되어 $f(x) = f(y)$이다. 따라서 f는 (a, Ω)상에서 상수사상이다.

(3) 먼저 S_ω의 한 점 컴팩트화는 $\overline{S}_\Omega = S_\Omega \cup \{\Omega\}$이다. 그리고 (2)에 의해 임의의 (유계인) 연속사상 $f\colon S_\Omega \to \mathbb{R}$에 대해 적당한 $a \in S_\Omega$가 존재하여 $f((a,\Omega)) = \{p\}$이다. 그러면

$$\tilde{f}\colon \overline{S}_\Omega \to \mathbb{R}, \quad \tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x), & x \in S_\Omega \\ p, & x = \Omega \end{cases}$$

는 f의 확장이다. 따라서 Stone-Čech 컴팩트화의 정의에 의해 $\overline{S}_\Omega$는 S_Ω의 Stone-Čech 컴팩트화이다. 그리고 Stone-Čech 컴팩트화는 동치적으로 유일하므로 $\overline{S}_\Omega$는 $\beta(S_\Omega)$와 동치적이다.

(4) Y를 S_Ω의 컴팩트화라 하자. 그러면 문제 12.3.4에 의해 Y는 $\overline{S}_\Omega = S_\Omega \cup \{\Omega\}$의 상공간이다. 그래서 $\operatorname{card}(Y) \preceq \operatorname{card}(\overline{S}_\Omega)$이다. 그런데 S_Ω가 컴팩트가 아니므로 $S_\Omega \subsetneq Y$이다. 따라서 Y는 $S_\Omega \cup \{*\}$가 되어야 한다. 따라서 Y는 $\overline{S}_\Omega$와 동치적이다.

문제 12.3.7. (1) X가 이산공간이므로 $f\colon X \to \{0,1\}$, $f(A) = 0$, $f(X - A) = 1$은 연속사상이다. 따라서 f의 확장 $\tilde{f}\colon \beta(X) \to \{0,1\}$가 존재한다. 그러면 $A \subset f^{-1}(\{0\})$, $X - A \subset f^{-1}(\{1\})$이고 $f^{-1}(\{0\})$, $f^{-1}(\{1\})$가 모두 $\beta(X)$의 닫힌집합이므로 $\overline{A} \subset f^{-1}(\{0\})$, $\overline{X - A} \subset f^{-1}(\{1\})$이다. 따라서 $\overline{A} \cap \overline{X - A} = \varnothing$이다.

특별히 $\beta(X) = \overline{X} = \overline{A \cup (X - A)} = \overline{A} \cup \overline{X - A}$이므로 $\beta(X) - \overline{A} = \overline{X - A}$이다. 따라서 $\overline{A}$는 $\beta(X)$의 열린집합이다.

(2) 먼저 $U \cap X \subset U$이므로 $\overline{U \cap X} \subset \overline{U}$이다.

역으로 $x \in \overline{U}$라 하자. 그러면 임의로 주어진 x의 열린근방 V에 대하여 $U \cap V \neq \varnothing$이다. 그리고 X가 $\beta(X)$의 조밀한 부분집합이므로 $V \cap (U \cap X) = (V \cap U) \cap X \neq \varnothing$이 되어 $x \in \overline{U \cap X}$이다. 그러므로 $\overline{U} \subset \overline{U \cap X}$이다. 따라서 $\overline{U \cap X} = \overline{U}$이다.

그리고 (1)에 의해 $\overline{U} = \overline{U \cap X}$는 $\beta(X)$의 열린집합이다.

(3) Y를 서로 다른 두 점 x, y를 포함하는 $\beta(X)$의 부분집합이라 하자. 우리는 Y가 비연결임을 보이면 된다. $\beta(X)$가 Hausdorff이므로 $x \in U$, $y \notin \overline{U}$를 만족하는 $\beta(X)$의 열린집합 U가 존재한다. 그리고 (2)에 의해 $\overline{U}$는 $\beta(X)$의 열린집합인 동시에 닫힌집합이므로 $\{Y \cap \overline{U}, Y - \overline{U}\}$이 Y의 열린분리가 된다. 따라서 Y는 비연결이다.

문제 12.3.9. (1) $i \circ \mathrm{id}_X\colon X \to X \hookrightarrow \beta(X)$는 $\mathrm{id}_{\beta(X)} \circ i\colon X \hookrightarrow \beta(X) \to \beta(X)$에 대해 $i \circ \mathrm{id}_X = \mathrm{id}_{\beta(X)} \circ i$이므로 $\mathrm{id}_{\beta(X)}$는 $i \circ \mathrm{id}_X$의 확장이다.

$$\begin{tikzcd} \beta(X) \arrow[r, "\mathrm{id}_{\beta(X)}"] & \beta(X) \\ X \arrow[u, hook, "i"] \arrow[r, "\mathrm{id}_X"'] & X \arrow[u, hook, "i"'] \end{tikzcd}$$

따라서 확장의 유일성에 의해 $\beta(\mathrm{id}_X) = \mathrm{id}_{\beta(X)}$이다.

(2) 먼저 $i_X : X \hookrightarrow \beta(X)$, $i_Y : Y \hookrightarrow \beta(Y)$, $i_Z : Z \hookrightarrow \beta(Z)$를 포함사상들이라 하자.

$$\begin{tikzcd}
\beta(X) \arrow[r, "\beta(f)"] & \beta(Y) \arrow[r, "\beta(g)"] & \beta(Z) \\
X \arrow[u, hook, "i_X"] \arrow[r, "f"'] & Y \arrow[u, hook, "i_Y"] \arrow[r, "g"'] & Z \arrow[u, hook, "i_Z"']
\end{tikzcd}$$

그러면 $\beta(f)$와 $\beta(g)$의 정의에 의해 $\beta(f) \circ i_X = i_Y \circ f$, $\beta(g) \circ i_Y = i_Z \circ g$이므로

$$\beta(g) \circ \beta(f) \circ i_X = \beta(g) \circ i_Y \circ f = i_Z \circ g \circ f$$

이 되어 $\beta(g) \circ \beta(f)$는 $i_Z \circ (g \circ f)$의 확장이다. 따라서 확장의 유일성에 의해 $\beta(g \circ f) = \beta(g) \circ \beta(f)$이다.

제 13 장

상공간

13.1 상공간(quotient space)

문제 13.1.1. $C = \{n + \frac{1}{n} \mid 2 \leq n \in \mathbb{N}\}$은 $\mathbb{R}$의 닫힌집합이다. 그러나 점 $(1,0)$은 $f(C)$의 극한점이지만, $(1,0) \notin f(C)$이므로 $f(C)$는 S^1의 닫힌집합이 아니다. 따라서 f는 닫힌사상이 아니다.

문제 13.1.3. f에 의한 Y상의 상위상의 정의에 의해

$$\mathscr{T}_Y = \{U \subset Y \mid f^{-1}(U) \in \mathscr{T}_l\}$$

이다. 따라서

$$\mathscr{T}_Y = \{\varnothing, Y, \{1\}, \{4\}, \{1,4\}, \{3,4\}, \{1,3,4\}, \{2,3,4\}\}$$

이 된다.

문제 13.1.5. 먼저 $A = \{a\},\ B = \{b,e\},\ C = \{c,d\}$라 하자. 그러면 $\mathscr{P} = \{A,B,C\}$이다. 그리고

$$\pi\colon (X,\mathscr{T}) \to X/\mathscr{P} = \mathscr{P}, \quad \pi(x) = \begin{cases} A, & x \in A \\ B, & x \in B \\ C, & x \in C \end{cases}$$

이다. 따라서 $\mathscr{T}_Q = \{\varnothing, A, C, \{A,C\}, \{B,C\}, \mathscr{P}\}$이고 $X/\mathscr{P} = (\mathscr{P}, \mathscr{T}_Q)$이다.

문제 13.1.7. 먼저 π가 전사, 연속, 열린사상임을 상기하자.

(1) π가 열린사상이므로, 모든 $B \in \mathscr{B}$에 대해 $\pi(B) \in \mathscr{T}_Q$이다. 즉, $\mathscr{B}_Q$는 $X/\!\sim\ = (X/\!\sim, \mathscr{T}_Q)$의 열린집합들의 모임이다.

이제 임의의 점 $[x] \in X/_\sim$와 $[x]$의 열린근방 U(즉, $[x] \in U \in \mathscr{T}_Q$)에 대하여 $x \in \pi^{-1}(U) \in \mathscr{T}$이다. 그런데 $\mathscr{B}$가 X의 기저이므로 $x \in B \subset \pi^{-1}(U)$를 만족하는 $B \in \mathscr{B}$가 존재한다. 그리고 π가 전사이므로 $[x] \in \pi(B) \subset \pi(\pi^{-1}(U)) = U$이다. 따라서 성질 3.2.14에 의해 $\mathscr{B}_Q$는 상공간 $X/_\sim$의 기저이다.

(2) 만약 X가 제2가산이면 X의 가산기저 $\mathscr{B}$가 존재한다. 그리고 (1)에 의해 $\mathscr{B}_Q = \{\pi(B) \mid B \in \mathscr{B}\}$는 상공간 $X/_\sim$의 가산기저이므로 $X/_\sim$은 제2가산이다.

문제 13.1.9. (1) 편의상 고유사상 $\pi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}/B$를

$$\pi(x) = \begin{cases} b^*, & x \in B \\ x^*, & x \notin B \end{cases}$$

이라 하자. 이제 서로 다른 두 점 0^*, $b^* \in \mathbb{R}/B$를 생각하자. 0^*의 임의의 열린근방 $U \subset \mathbb{R}/B$에 대하여 $\pi^{-1}(U)$가 0의 열린근방이므로 $0 \in (a,b) \subset \pi^{-1}(U) \subset \mathbb{R}$을 만족하는 $\mathbb{R}$의 기저의 원소 (a,b)가 존재한다. 그러면 $(a,b) \cap B \neq \varnothing$이므로 $x \in (a,b) \cap B$가 존재하여 $b^* = \pi(x) \in U$이다. 따라서 $0^* \in U$이고 $b^* \notin U$인 열린집합 $U \subset \mathbb{R}/B$는 존재하지 않는다. 따라서 $\mathbb{R}/B$는 T_1이 아니다.

(2) 먼저 $\pi^{-1}(\{b^*\}) = B$이 $\mathbb{R}$의 열린집합이 아니고 닫힌집합도 아니므로 한 점 집합 $\{b^*\}$는 $\mathbb{R}/B$의 열린집합이 아니고 닫힌집합도 아니다.

(i) $(0,1)$은 $\mathbb{R}$의 열린집합이지만 $\pi((0,1)) = \{b^*\}$는 $\mathbb{R}/B$의 열린집합이 아니므로 π는 열린사상이 아니다.

(ii) 한 점 집합 $\{1\}$은 $\mathbb{R}$의 닫힌집합이지만 $\pi(\{1\}) = \{b^*\}$는 $\mathbb{R}/B$의 닫힌집합이 아니므로 π는 닫힌사상이 아니다.

문제 13.1.11. (1) 서로 다른 두 무리수 x와 y에 대하여 $x \nsim y$이므로 $\pi(x) = [x] \neq [y] = \pi(y)$이다. 그리고 무리수 집합 $\mathbb{Q}^c$이 비가산이므로 $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$는 비가산집합이다.

(2) $[1] = \mathbb{Q}$이므로 $\pi^1(\{\pi(1)\}) = \mathbb{Q}$이다. 그리고 $\pi^1(\{\pi(1)\}) = \mathbb{Q}$이 $\mathbb{R}$의 닫힌집합이 아니므로 상위상의 정의에 의해 $\{\pi(1)\}$는 $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$의 닫힌집합이 아니다.

(3) $[\sqrt{2}] = \{\sqrt{2}\}$이므로 $\pi^{-1}(\{\pi(\sqrt{2})\}) = \{\sqrt{2}\}$이다. 그리고 $\{\sqrt{2}\}$이 $\mathbb{R}$의 닫힌집합이므로 $\{\pi(\sqrt{2})\}$는 $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$의 닫힌집합이다.

(4) $\mathbb{R}$이 길연결이고 π가 전사인 연속사상이므로 $\mathbb{R}/\mathbb{Q} = \pi(\mathbb{R})$도 길연결이다.

(5) 각각의 자연수 n에 대하여

$$U_n = \mathbb{R}/\mathbb{Q} - \{\pi(k\sqrt{2}) \mid n \leq k \in \mathbb{N}\}$$

이라 하자. 그러면 $\pi^{-1}(U_n) = \mathbb{R} - \{k\sqrt{2} \mid n \leq k \in \mathbb{N}\}$이 $\mathbb{R}$의 열린집합이므로 U_n은 $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$의 열린집합이다. 그리고 $\cup_{n=1}^{\infty} U_n = \mathbb{R}/\mathbb{Q}$이므로 $\{U_n \mid n \in \mathbb{N}\}$은 $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$의 열린덮개이다. 그런데 $\{U_n \mid n \in \mathbb{N}\}$의 유한부분덮개가 존재하지 않으므로 $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$는 컴팩트가 아니다.

문제 13.1.13. $I = [0,1]$을 유클리드공간 $\mathbb{R}$의 부분공간이라 하자. 이제 $X/_\sim \cong I$임을 보이자.

먼저 사상

$$f\colon X \to I, \quad f(x,y) = x^2 + y^2$$

는 전사, 연속이고

$$(x_1,y_1) \sim (x_2,y_2) \;\Leftrightarrow\; f(x_1,y_1) = f(x_2,y_2)$$

를 만족한다. 그리고 X가 컴팩트이고 I가 하우스도르프이므로 f는 닫힌사상이 되어 f는 위상동형사상

$$\tilde{f}\colon X/_\sim \to I, \quad \tilde{f}([x,y]) = f(x,y) = x^2 + y^2$$

를 유도한다. 따라서 $X/_\sim \cong I$이다.

문제 13.1.15. $I = [0,2]$를 유클리드공간 $\mathbb{R}$의 부분공간이라 하자. 이제 $X/_\sim \cong I$임을 보이자.

먼저 사상

$$f\colon X \to I, \quad f(x,y) = x^2 + y^2$$

는 전사, 연속이고

$$(x_1,y_1) \sim (x_2,y_2) \;\Leftrightarrow\; f(x_1,y_1) = f(x_2,y_2)$$

를 만족한다. 그리고 X가 컴팩트이고 I가 하우스도르프이므로 f는 닫힌사상이 되어 f는 위상동형사상

$$\tilde{f}\colon X/_\sim \to I, \quad \tilde{f}([x,y]) = f(x,y) = x^2 + y^2$$

를 유도한다. 따라서 $X/_\sim \cong I$이다.

문제 13.1.17. S^1을 유클리드공간 $\mathbb{R}^2$의 부분공간이라 하자.

먼저 $x \in \mathbb{R}$의 동치류는 $[x] = x + 3\mathbb{Z} = \{x + 3n \mid n \in \mathbb{Z}\}$이다. 연속사상

$$f\colon \mathbb{R} \to S^1, \quad f(x) = (\cos\frac{2}{3}x\pi, \sin\frac{2}{3}x\pi)$$

는

$$x \sim y \;\Leftrightarrow\; f(x) = f(y)$$

를 만족한다. 그리고 f가 전사인 열린사상이므로 f는 위상동형사상

$$\tilde{f}\colon \mathbb{R}/_\sim \to S^1, \quad \tilde{f}([x]) = (\cos\frac{2}{3}x\pi, \sin\frac{2}{3}x\pi)$$

를 유도한다. 따라서 $\mathbb{R}/_\sim \cong S^1$이다.

문제 13.1.19. (1) $A = (-2,-1) \times (1,2) \cup \{P, Q\}$, $B = (1,2) \times (2,3) \cup \{R, S\}$이라 하자. 그러면 A와 B가 모두 연결이므로 $\pi(A)$와 $\pi(B)$도 모두 연결이다. 그리고 $Q \sim R$이므로 $\pi(P) = \pi(Q) \in \pi(A) \cap \pi(B)$이 되어 $\pi(A) \cap \pi(B) \neq \varnothing$이다. 따라서 $Y/_{\sim} = \pi(A) \cup \pi(B)$는 연결이다(정리 8.1.19).

(2) $C = \{(x, -x) \in Y \mid -1 \leq x \leq -1\}$, $D = \{(x, 4-x) \in Y \mid 1 \leq x \leq 2\}$이라 하자. 그러면 C와 D가 모두 컴팩트이므로 $\pi(C)$와 $\pi(D)$도 모두 컴팩트이다. 따라서 $Y/_{\sim} = \pi(C) \cup \pi(D)$는 컴팩트이다.

(3) (i) 먼저 연속사상 $f\colon Y \to [0,4]$, $f(x,y) = y - x$는 열린사상이 아니고 닫힌사상도 아님을 유의하자: 왜냐하면 $A = (-2,-1) \times (1,2) \cup \{P, Q\}$는 Y의 열린집합이지만 $f(A) = [2,4]$는 $[0,4]$의 열린집합이 아니다. 따라서 f는 열린사상이 아니다.

그리고 $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq -x + \frac{9}{2}\}$가 $\mathbb{R}^2$의 닫힌집합이므로 $F = Y \cap E$는 Y의 닫힌집합이다. 그런데 $f(F) = (\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$는 $[0,4]$의 닫힌집합이 아니다. 따라서 f는 닫힌사상이 아니다.

(ii) 한편 f는

$$(x_1, y_1) \sim (x_2, y_2) \;\Leftrightarrow\; f(x_1, y_1) = f(x_2, y_2)$$

를 만족하는 전사인 연속사상이므로 f가 유도하는 사상 $\tilde{f}\colon Y/_{\sim} \to [0,4]$, $\tilde{f}([(x,y)]) = y - x$도 전사인 연속사상이다.

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[d, "\pi"'] \arrow[dr, "f"] & \\ Y/_{\sim} \arrow[r, "\tilde{f}"'] & {[0,4]} \end{tikzcd}$$

그리고 자명하게 $\tilde{f}$는 단사이다. 따라서 $\tilde{f}$는 전단사인 연속사상이다.

한편 (2)에 의해 $Y/_{\sim}$이 컴팩트이고 $[0,4]$가 Hausdorff이므로 $\tilde{f}\colon Y/_{\sim} \to [0,4]$는 위상동형사상이다.

문제 13.1.21. (1) $f^{-1}([0, \frac{1}{2})) = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} [n, n + \frac{1}{2}) \notin \mathscr{U}$이므로 $[0, \frac{1}{2}) \notin \mathscr{T}$이다.

(2) $f^{-1}((\frac{1}{2}, 1)) = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} (n + \frac{1}{2}, n+1) \in \mathscr{U}$이므로 $(\frac{1}{2}, 1) \in \mathscr{T}$이다.

(3) $(\frac{1}{2}, 2) \in \mathscr{U}$이지만, $h^{-1}((\frac{1}{2}, 2)) = [0, \frac{1}{2}) \notin \mathscr{T}$이다. 따라서 h는 연속이 아니다.

(4) 우리는 $(\mathbb{R}, \mathscr{U})$의 기저의 원소 (a,b)에 대해 $f((a,b)) \in \mathscr{T}$임을 보이면 된다. 그런데 주어진 (a,b)에 대하여 $f^{-1}(f((a,b))) = \cup_{n \in \mathbb{Z}} (n+a, n+b) \in \mathscr{U}$이므로 $f((a,b)) \in \mathscr{T}$이다.

(5) 먼저 $\mathscr{T}$의 정의에 의해 $f\colon (\mathbb{R}, \mathscr{U}) \to X = ([0,1), \mathscr{T})$는 연속이다.

이제 $\mathscr{V}$를 $X = ([0,1), \mathscr{T})$의 열린덮개라 하자. 그러면 $0 \in V_0$인 $V_0 \in \mathscr{V}$가 존재한다. 그러면 $0 \in f^{-1}(V_0) \in \mathscr{U}$이므로 $0 \in (-r, r) \subset f^{-1}(V_0)$를 만족하는 실수 $0 < r < \frac{1}{3}$이 존재한다. 그러면 $[0,1) - f((-r,r)) = [r, 1-r]$이 $(\mathbb{R}, \mathscr{U})$에서 컴팩트이고 f가 연속이므로 $f([r, 1-r]) = [r, 1-r]$도 X에서 컴팩트이다. 그리고 $\mathscr{V}$가 $[r, 1-r]$의 열린덮개이므로

$[r, 1-r] \subset V_1 \cup \cdots \cup V_n$을 만족하는 유한개의 $V_1, \ldots, V_n \in \mathscr{V}$이 존재한다. 그래서

$$[0,1) = V_0 \cup V_1 \cup \cdots \cup V_n$$

이 된다. 따라서 $X = ([0,1), \mathscr{T})$은 컴팩트이다.

(6) 먼저 $f\colon (\mathbb{R}, \mathscr{U}) \to X$가 전사, 열린, 연속사상이므로 상사상이다. 이제 $\mathbb{R} = (\mathbb{R}, \mathscr{U})$상의 동치관계

$$x \sim y \;\Leftrightarrow\; f(x) = f(y)$$

에 의한 상공간 $\mathbb{R}/_\sim$은 X와 위상동형이다. 그런데

$$x \sim y \;\Leftrightarrow\; f(x) = f(y) \;\Leftrightarrow\; x - [x] = y - [y] \;\Leftrightarrow\; x - y \in \mathbb{Z}$$

이므로 $\mathbb{R}/_\sim$은 S^1과 위상동형이다(보기 13.1.15 참조). 따라서 X는 S^1과 위상동형이다.

문제 13.1.23. 먼저 $\sim$을 뫼비우스 띠 M을 만드는 I^2상의 동치관계라 하자(보기 13.1.19(2)). 그러면 주어진 연속사상 f는

$$(x,y) \sim (x',y') \;\Leftrightarrow\; f(x,y) = f(x',y')$$

이다. 그리고 I^2가 컴팩트하고 $f(I^2) \subset \mathbb{R}^3$이 하우스도르프이므로 f는 위상동형사상

$$\tilde{f}\colon M = I^2/_\sim \to f(I^2), \quad \tilde{f}([x,y]) = f(x,y)$$

을 유도하므로 $\tilde{f}\colon M = I^2/_\sim \to \mathbb{R}^3$는 뫼비우스 띠 M의 $\mathbb{R}^3$속으로의 넣기사상이다.

문제 13.1.25. 먼저 $\sim$을 클라인병 K을 만드는 I^2상의 동치관계라 하자(보기 13.2.21). 그러면 주어진 연속사상 g는

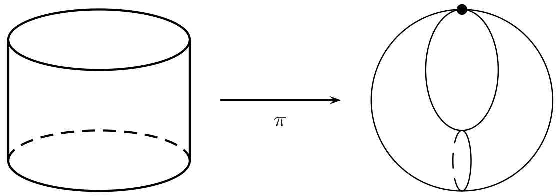
$$(x,y) \sim (x',y') \;\Leftrightarrow\; g(x,y) = g(x',y')$$

이다. 그리고 I^2가 컴팩트하고 $g(I^2) \subset \mathbb{R}^4$이 하우스도르프이므로 g는 위상동형사상

$$\tilde{g}\colon K = I^2/_\sim \to g(I^2), \quad \tilde{g}([x,y]) = g(x,y)$$

을 유도하므로 $\tilde{g}\colon K = I^2/_\sim \to \mathbb{R}^4$는 클라인병 K의 $\mathbb{R}^4$속으로의 넣기사상이다.

문제 13.1.27.



문제 13.1.29. 먼저 $\pi(A)$가 X/A의 한 점임을 상기하자. 그리고 $\pi^{-1}(\pi(A)) = A$가 X의 닫힌집합이므로 한 점 집합 $\{\pi(A)\}$는 X/A의 닫힌집합이고, $X/A - \{\pi(A)\}$는 X/A의 열린집합이다.

정의에 의해 자명하게 축소사상 $\pi|: X - A \to X/A - \{\pi(A)\}$는 전단사이다. 그리고 π가 연속이므로 축소사상 $\pi|$도 연속이다. 이제 우리는 $\pi|$가 전단사이므로 $(\pi|)^{-1}$이 연속임을 보이기 위해 $\pi|$가 열린사상임을 보이면 충분하다. 만약 U가 $X - A$의 열린집합이면 (A가 X의 닫힌집합이므로) U는 X의 열린집합이다. 따라서 $(\pi|)^{-1}(\pi|(U)) = \pi^{-1}(\pi(U)) = U$가 X의 열린집합이므로 $\pi|(U) = \pi(U)$는 X/A의 열린집합이다. 그리고 $\pi(U) \subset X/A - \{\pi(A)\}$이므로 $\pi|(U) = \pi(U)$는 $X/A - \{\pi(A)\}$의 열린집합이다. 따라서 $\pi|$는 열린사상이다.

문제 13.1.31. (1) 먼저 $CX = X \times I/X \times \{1\}$임을 상기하자. 그리고 $X \times I$가 컴팩트하므로 CX도 컴팩트이다. 한편 X가 컴팩트 하우스도르프이므로 $Y = X \times [0,1)$은 국소컴팩트 하우스도르프이다. 우리는 Y의 한 점 컴팩트화를 $Y^* = Y \cup \{p\}$라 하자. 그러면 Y^*는 컴팩트 하우스도르프공간이다.

다음과 같이 정의된 전사함수

$$f\colon X \times I \to Y^*, \quad f(x,t) = \begin{cases} (x,t), & t \neq 1 \\ p, & t = 1 \end{cases}$$

에 대해 $f^{-1}(p) = X \times \{1\}$이다.

(i) f는 연속이다: V를 Y^*의 열린집합이라 하자. 먼저 $p \notin V$인 경우에는 V가 $Y = X \times [0,1)$의 열린집합이므로 $f^{-1}(V) = V$도 $X \times [0,1)$의 열린집합이다. 그런데 $X \times [0,1)$이 $X \times I$의 열린집합이므로 $f^{-1}(V)$는 $X \times I$의 열린집합이다. 한편 $p \in V$인 경우는 V^c가 $X \times [0,1)$의 컴팩트집합이므로 $f^{-1}(V^c) = V^c$도 $X \times I$의 컴팩트집합이다. 그리고 $X \times I$가 Hausdorff이므로 $(f^{-1}(V))^c = f^{-1}(V^c)$은 $X \times I$의 닫힌집합이 되어 $f^{-1}(V)$는 $X \times I$의 열린집합이다. 따라서 f는 연속이다.

(ii) 한편 $f^{-1}(p) = X \times \{1\}$이므로 주어진 연속사상 f는

$$(x,t) \sim (y,s) \iff f(x,t) = f(y,s)$$

이다. 그리고 $X \times I$가 컴팩트하고 Y^*이 하우스도르프이므로 f는 위상동형사상

$$\tilde{f}\colon CX \to Y^*, \quad \tilde{f}([x,t]) = f(x,t)$$

을 유도한다. 따라서 $CX \cong Y^*$이다.

(2) 먼저 A가 X의 닫힌집합이므로 $Y = X - A$는 국소컴팩트 하우스도르프공간이다. 그리고 Y의 한 점 컴팩트화를 $Y^* = Y \cup \{p\}$이라 하자. 그러면 Y^*는 컴팩트 하우스도르프 공간이다.

다음과 같이 정의된 전사함수

$$f\colon X \to Y^*, \quad f(x) = \begin{cases} x, & x \notin A \\ p, & x \in A \end{cases}$$

에 대해 $f^{-1}(p) = A$이다.

(i) f는 연속이다: V를 Y^*의 열린집합이라 하자. 먼저 $p \notin V$인 경우에는 V가 $Y = X - A$의 열린집합이므로 $f^{-1}(V) = V$도 $X - A$의 열린집합이다. 그런데 $X - A$가 X의 열린집합이므로 $f^{-1}(V)$는 X의 열린집합이다. 한편 $p \in V$인 경우는 V^c가 $X - A$의 컴팩트집합이므로 $f^{-1}(V^c) = V^c$도 X의 컴팩트집합이다. 그리고 X가 Hausdorff이므로 $(f^{-1}(V))^c = f^{-1}(V^c)$은 X의 닫힌집합이 되어 $f^{-1}(V)$는 X의 열린집합이다. 따라서 f는 연속이다.

(ii) 한편 $f^{-1}(p) = A$이므로 주어진 연속사상 f는

$$x \sim y \ \Leftrightarrow\ f(x) = f(y)$$

이다. 그리고 X가 컴팩트하고 Y^*이 하우스도르프이므로 f는 위상동형사상

$$\tilde{f}\colon X/A \to Y^*, \quad \tilde{f}([x]) = f(x)$$

을 유도한다. 따라서 $X/A \cong Y^*$이다.

문제 13.1.33. 먼저 $p \circ f$가 전사이므로 p도 전사이다. 한편 $U \subset Y$에 대해 $p^{-1}(U)$가 X의 열린집합이면 f가 연속이므로 $f^{-1}(p^{-1}(U))$는 Y의 열린집합이다. 그리고 $f^{-1}(p^{-1}(U)) = (p \circ f)^{-1}(U) = \mathrm{id}_Y^{-1}(U) = U$이므로 U는 Y의 열린집합이다. 따라서 p는 상사상이다.

문제 13.1.35. (방법 1) 포함사상 $i\colon A \hookrightarrow X$, $i(a) = a$는 연속이고 $r \circ i = \mathrm{id}_A$를 만족한다. 따라서 문제 13.1.33에 의해 r은 상사상이다.

(방법 2) 먼저 $r(a) = a(\forall a \in A)$이므로 r은 전사이다. 한편 $U \subset A$에 대해 $r^{-1}(U)$이 X의 열린집합이라 가정하면 $U = r^{-1}(U) \cap A$이므로 U는 부분공간 A의 열린집합이다. 따라서 r은 상사상이다.

문제 13.1.37. 먼저 p가 상사상이므로 정리 13.1.32의해 $g \circ p$가 연속일 필요충분조건은 g가 연속인 것이다. 그리고 주어진 부분집합 $U \subset Z$에 대하여 $(g \circ p)^{-1}(U)$가 열린집합일 필요충분조건은 $g^{-1}(U)$가 열린집합인 것이다. 그러므로 (a)와 (b)는 서로 동치이다.

문제 13.1.39. X를 국소연결이라 하자. 그리고 Y가 국소연결임을 보이기 위해 Y의 임의의 열린집합 V의 연결성분이 열린집합임을 보이면 충분하다(정리 8.2.11).

이제 임의로 주어진 Y의 열린집합 V와 점 $y \in V$에 대해 D를 V에서의 y를 포함하는 연결성분이라 하자. 우리는 D가 Y의 열린집합임을 보이면 된다.

임의의 점 $x \in p^{-1}(D)$에 대해 $x \in p^{-1}(D) \subset p^{-1}(V) \subset X$이고 X가 국소연결이므로 열린집합 $p^{-1}(V)$에서의 점 x를 포함하는 연결성분 $C_x(\subset p^{-1}(V))$는 X의 열린집합이다. 그리고 p가 연속이므로 $p(C_x)$는 연결집합이고, p가 전사이므로 $p(x) \in p(C_x) \subset p(p^{-1}(V)) = V$이다. 그런데 D는 점 $p(x)$를 포함하는 V에서의 연결성분이므로 $p(C_x) \subset D \subset V$이어서 $x \in C_x \subset p^{-1}(D)$이다. 따라서 $p^{-1}(D) = \cup_{x \in p^{-1}(D)} C_x$이고 모든 C_x가 열린집합이므로 $p^{-1}(D)$는 X의 열린집합이다. 그리고 p가 상사상이므로 D는 Y의 열린집합이다. 따라서 Y는 국소연결이다.

문제 13.1.41.

(1) ($\subset$) 만약 $\mathbf{z} \in \pi^{-1}(\pi(A))$이면 $\pi(\mathbf{z}) \in \pi(A)$이다. 그래서 $\pi(\mathbf{a}) = \pi(\mathbf{z})$를 만족하는 $\mathbf{a} \in A$가 존재하여 $[\mathbf{a}] = [\mathbf{z}]$이다. 정의에 의해 $\lambda\mathbf{a} = \mathbf{z}$를 만족하는 $\lambda \in S^1$이 존재한다. 따라서 $\mathbf{z} = \mu(\lambda, \mathbf{a}) \in \mu(S^1 \times A)$이다.

($\supset$) 만약 $\mathbf{z} =\in \mu(S^1 \times A)$이면 $\mathbf{z} = \mu(\lambda, \mathbf{a})$를 만족하는 $(\lambda, \mathbf{a}) \in S^1 \times A$이 존재하여 $\mathbf{z} = \lambda\mathbf{a}$가 된다. 정의에 의해 $\pi(\mathbf{z}) = [\mathbf{z}] = [\mathbf{a}] = \pi(\mathbf{a}) \in \pi(A)$이 되어 $\mathbf{z} \in \pi^{-1}(\pi(A))$이다.

(2) 먼저 $\rho\colon \mathbb{R}^{2n+2} \to \mathbb{C}^{n+1}$,

$$\rho(x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots, x_{2n+1}, x_{2n+2}) = (x_1 + x_2 i, x_3 + x_4 i, \ldots, x_{2n+1} + x_{2n+2} i)$$

가 위상동형사상이고 유클리드공간 $\mathbb{R}^{2n+2}$의 부분집합인 $2n+1$-차원 구면 $S_*^{2n+1} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{2n+2} \mid \|\mathbf{x}\| = 1\}$이 컴팩트이므로 $S^{2n+1} = \rho(S_*^{2n+1})$도 컴팩트이다. 그리고 π가 전사인 연속사상이므로 $\mathbb{C}P^n = \pi(S^{2n+1})$도 컴팩트이다.

이제 $\mathbb{C}P^n$이 하우스도르프임을 보이자. 서로 다른 두 점 $[\mathbf{x}]$, $[\mathbf{y}] \in \mathbb{C}P^n$에 대하여 $\mathbf{x} \neq \mathbf{y} \in S^{2n+1} \subset \mathbb{C}^{n+1}$이므로 $r = |\mathbf{x} - \mathbf{y}| > 0$이다. 이제

$$U = B(\mathbf{x}, \frac{r}{4}) \cap S^{2n+1}, \quad V = B(\mathbf{y}, \frac{r}{4})$$

이라 하면 U와 V는 S^{2n+1}의 서로소인 열린집합이다. 이제

$$U_* = \mu(S^1 \times U), \quad V_* = \mu(S^1 \times V)$$

이라 하면 U_*와 V_*는 S^{2n+1}의 열린집합으로서

$$\mathbf{x} \in U_*, \quad \mathbf{y} \in V_*, \quad U_* \cap V_* = \varnothing$$

이다. 그리고 (1)에 의해 $\pi^{-1}(\pi(U)) = U_*$와 $\pi^{-1}(\pi(V)) = V_*$가 S^{2n+1}의 열린집합이므로 상위상의 정의에 의해 $\pi(U)$와 $\pi(V)$는 $\mathbb{C}P^n$의 열린집합으로서

$$[\mathbf{x}] \in \pi(U), \quad [\mathbf{y}] \in \pi(V), \quad \pi(U) \cap \pi(V) = \varnothing$$

이다. 따라서 $\mathbb{C}P^n$은 하우스도르프이다.

(3) A를 S^{2n+1}의 닫힌집합이라 하자. 그러면 S^{2n+1}이 컴팩트이므로 A도 컴팩트이다. 그리고 (1)에 의해 $\pi^{-1}(\pi(A)) = \mu(S^1 \times A)$이고 $S^1 \times A$는 $S^1 \times S^{2n+1}$의 컴팩트집합이다. 또한 μ가 연속이므로 $\pi^{-1}(\pi(A)) = \mu(S^1 \times A)$도 S^{2n+1}의 컴팩트집합이다. 그리고 S^{2n+1}이 하우스도르프이므로 $\pi^{-1}\pi(A)$은 S^{2n+1}의 닫힌집합이다. 따라서 상사상의 정의에 의해 $\pi(A)$는 $\mathbb{C}P^n$의 닫힌집합이다. 그러므로 π는 닫힌사상이다.

(4) 먼저 $S^3 \subset \mathbb{C}^2$이고 $\pi\colon S^3 \to S^3/_\sim = \mathbb{C}P^1$임을 상기하자. 이제

$$S^2_+ = \{(a,b,c) \in S^2 \mid c \geq 0\} \subset S^2 \subset \mathbb{R}^3$$

이라 하자. 그리고 S^2_+상의 다음과 같은 동치관계

$$(a,b,c) \sim_+ (u,v,w) \;\Leftrightarrow\; c = w = 0 \text{ 이거나 } (a,b,c) = (u,v,w)$$

에 의한 상공간 $S^2_+/_{\sim_+}$와 상사상 $\pi_+\colon S^2_+ \to S^2_+/_{\sim_+}$을 생각하자. 우리는 쉽게 상공간 $S^2_+/_{\sim_+}$이 S^2와 위상동형임을 알 수 있다. 따라서 우리는 $S^2_+/_{\sim_+}$와 $\mathbb{C}P^1 = S^3/_\sim$이 위상동형임을 보이면 된다. 이를 위해 다음과 같은 연속사상

$$h\colon S^2_+ \to S^3,\; h(a,b,c) = (a+bi, c)$$

를 생각하자. 그러면

$$f = \pi \circ h\colon S^2_+ \to S^3/_\sim = \mathbb{C}P^1, \quad f(a,b,c) = [a+bi, c]$$

도 연속이다.

$$\begin{tikzcd}
S^2_+ \arrow[r, "h"] \arrow[d, "\pi_+"'] \arrow[dr, "f"] & S^3 \arrow[d, "\pi"] \\
S^2_+/_{\sim_+} \arrow[r, dashed, "\tilde{f}"'] & S^3/_\sim
\end{tikzcd}$$

(i) 먼저 f가 전사임을 보이자: 임의로 주어진 점 $[(a+bi, c+di)] \in S^3/_\sim$에 대해 $(a+bi, c+di)] \in S^3$이다. 만약 $c+di = 0$이면 $f(a,b,0) = [(a+bi, 0)]$인 $(a,b,0) \in S^2_+$가 존재한다. 이제 $c+di \neq 0$인 경우를 살펴보자. 이 경우 $\lambda = \frac{c+di}{\sqrt{c^2+d^2}} \in S^1$, $(\frac{(c-di)(a+bi)}{\sqrt{c^2+d^2}}, \sqrt{c^2+d^2}) \in S^3$이고

$$\lambda(\frac{(c-di)(a+bi)}{\sqrt{c^2+d^2}}, \sqrt{c^2+d^2}) = (a+bi, c+di)$$

를 만족하므로 $[(\frac{(c-di)(a+bi)}{\sqrt{c^2+d^2}}, \sqrt{c^2+d^2})] = [(a+bi, c+di)]$이다. 따라서

$$f((Re\frac{(c-di)(a+bi)}{\sqrt{c^2+d^2}}, Im\frac{(c-di)(a+bi)}{\sqrt{c^2+d^2}}, \sqrt{c^2+d^2})) = [(a+bi, c+di)]$$

를 만족하는 $(Re\frac{(c-di)(a+bi)}{\sqrt{c^2+d^2}}, Im\frac{(c-di)(a+bi)}{\sqrt{c^2+d^2}}, \sqrt{c^2+d^2}) \in S^2_+$가 존재한다.

(ii) 이제 $(a,b,c), (u,v,w) \in S^2_+$에 대해

$$(a,b,c) \sim_+ (u,v,w) \;\Leftrightarrow\; f(a,b,c) = f(u,v,w)$$

임을 보이자.

($\Rightarrow$) 먼저 $(a,b,c) \sim_+ (u,v,w)$이라 하자. 그러면 $c = w = 0$ 이거나 $(a,b,c) = (u,v,w)$이다. $(a,b,c) = (u,v,w)$인 경우는 당연히 $f(a,b,c) = f(u,v,w)$이다. 이제 $c = w = 0$이라 하자. 이 경우 $\lambda = (a+bi)(u-vi) \in S^1$에 대해 $\lambda(u+vi, 0) = (a+bi, 0)$이므로 $f(a,b,0) = [(a+bi,0)] = [(u+vi,0)] = f(u,v,0)$이 성립한다.

($\Leftarrow$) 이제 $f(a,b,c) = f(u,v,w)$이라 하자. 그러면 $[(a+bi, c)] = [(u+vi, w)]$이므로 $\lambda(a+bi, c) = (u+vi, w)$를 만족하는 λ가 존재하고, 특별히 $\lambda c = w$이다. 먼저 $c = 0$인 경우는 $w = 0$이 되어 $(a,b,c) \sim_+ (u,v,w)$이다. 한편 $c \neq 0$인 경우는 $|\lambda| = 1$이므로 $w \neq 0$이어야 한다. 그리고 $0 \le c, w \in \mathbb{R}$이므로 $c = |c| = |\lambda||c| = |\lambda c| = |w| = w$이다. 그리고 $\lambda w = \lambda c = w$이므로 $\lambda = 1$이 되어 $a+bi = \lambda(a+bi) = u+vi$이 되어 $a = u$, $b = v$이다. 따라서 $(a,b,c) = (u,v,w)$이므로 $(a,b,c) \sim_+ (u,v,w)$이다.

(iii) 한편 S^2_+는 컴팩트이고 $S^3/_\sim = \mathbb{C}P^1$이 Hausdorff이므로 f가 유도하는 사상 $\tilde{f}$는 위상동형사상이 된다.

(5) 포함사상 $j\colon S^{2n+1} \to \mathbb{C}^{n+1} - \{\mathbf{0}\}$, $j(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$는 연속이다. 그리고

$$f = \pi_* \circ j\colon S^{2n+1} \to \mathbb{C}P^{n+1} - \{\mathbf{0}\}/_{\sim_*}, \quad f(\mathbf{x}) = [\mathbf{x}]_*$$

도 연속이다.

$$\begin{tikzcd}
S^{2n+1} \arrow[rr, "j"] \arrow[d, "\pi"'] \arrow[drr, "f"] & & \mathbb{C}^{n+1} - \{\mathbf{0}\} \arrow[d, "\pi_*"] \\
S^{2n+1}/_\sim \arrow[rr, dashed, "\tilde{f}"'] & & \mathbb{C}P^{n+1} - \{\mathbf{0}\}/_{\sim_*}
\end{tikzcd}$$

(i) 먼저 f가 전사임을 보이자: 임의로 주어진 점 $[\mathbf{x}]_* \in \mathbb{C}^{n+1} - \{\mathbf{0}\}/_{\sim_*}$에 대해 $[\mathbf{x}]_* \in \mathbb{C}^{n+1} - \{\mathbf{0}\}$이다. 그리고 $\mathbf{y} = \frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|} \in S^{2n+1}$, $w = |\mathbf{x}| \in \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$에 대해 $\mathbf{x} = w\mathbf{y}$이므로 $\mathbf{x} \sim_* \mathbf{y}$이다. 따라서 $f(\mathbf{y}) = [\mathbf{y}]_* = [\mathbf{x}]_*$이 되어 f는 전사이다.

(ii) 이제 $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in S^{2n+1}$에 대해

$$\mathbf{x} \sim \mathbf{y} \;\Leftrightarrow\; f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{y})$$

임을 보이자.

($\Rightarrow$) 먼저 $\mathbf{x} \sim \mathbf{y}$이라 하자. 그러면 $\mathbf{x} = \lambda\mathbf{y}$를 만족하는 $\lambda \in S^1 \subset \mathbb{C}$가 존재하므로 $\mathbf{x} \sim_* \mathbf{y}$이다. 따라서 $f(\mathbf{x}) = [\mathbf{x}]_* = [\mathbf{y}]_* = f(\mathbf{y})$이다.

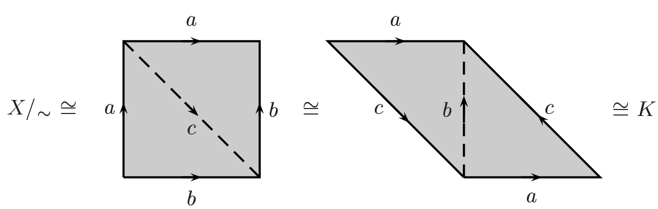
($\Leftarrow$) 이제 $f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{y})$이라 하자. 그러면 $[\mathbf{x}]_* = [\mathbf{y}]_*$이므로 $\mathbf{x} = w\mathbf{y}$를 만족하는 $w \in \mathbb{C}$가 존재한다. 그런데 $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in S^{2n+1}$이므로 $|\mathbf{x}| = |\mathbf{y}| = 1$이 되어 $1 = |\mathbf{x}| = |w\mathbf{y}| = |w||\mathbf{y}| = |w|$이다. 따라서 $w \in S^1$이 되어 $\mathbf{x} \sim \mathbf{y}$이다.

(iii) 한편 S^{2n+1}는 컴팩트이고 $\mathbb{C}^{n+1} - \{\mathbf{0}\}/_{\sim_*}$가 Hausdorff이므로 f가 유도하는 사상 $\tilde{f}$는 위상동형사상이 된다.

13.2 접착공간(adjunction space)

문제 13.2.1. 먼저 $f(\cos\theta, \sin\theta) = (\cos^2\theta - \sin^2\theta, 2\cos\theta\sin\theta) = (\cos 2\theta, \sin 2\theta)$이므로 $f(\cos\theta, \sin\theta) = f(\cos(\pi+\theta), \sin(\pi+\theta))$이다. 따라서 주어진 $(x, y) \in S^1 = A$에 대해 $f(x, y) = (-x, -y)$이다. 그래서 $X \cup_f Y \cong \mathbb{R}P^2$이다.

문제 13.2.3. 상공간 $X/_\sim$은 왼쪽 그림과 같다. 이제 c로 자른 다음 b를 붙이면 오른쪽 그림과 같은 클라인병 K가 된다.



13.3 상공간의 분리성

문제 13.3.1. X와 Y는 위상공간이고, A는 X의 닫힌집합이라 하자. 먼저 X/A의 원소는

$$[x] = \begin{cases} \{x\}, & x \in X - A \\ A, & x \in A \end{cases}$$

임을 상기하자.

(1) 만약 X가 정칙이면 X/A는 Hausdorff이다: 서로 다른 두 점 $[x], [y] \in X/A$가 주어졌다 하자.

(i) 먼저 $x, y \in X - A$인 경우: $\pi^{-1}([x]) = \{x\}$, $\pi^{-1}([y]) = \{y\}$이다. 그리고 X가 정칙(하우스도르프)이므로

$$x \in O,\ y \in W,\ O \cap W = \varnothing$$

을 만족하는 X의 열린집합 O, W가 존재한다. 그러면 $U = O \cap (X - A)$, $U = W \cap (X - A)$는 X의 열린집합으로서

$$x \in U,\ y \in V,\ U \cap V = \varnothing$$

을 만족한다. 그리고 $U_* = \pi(U)$, $V_* = \pi(V)$이라 하면 $U \cap A = \varnothing$, $V \cap A = \varnothing$이므로 $\pi^{-1}(U_*) = U$, $\pi^{-1}(V_*) = V$가 된다. 따라서 U_*, V_*는 X/A의 열린집합이고

$$[x] \in U_*,\ [y] \in V_*,\ U_* \cap V_* = \varnothing$$

이다.

(ii) 이제 $x \in A, y \in X - A$인 경우: 이 경우 $\pi^{-1}([x]) = A$이다. A가 정칙공간 X의 닫힌집합이므로

$$A \subset U,\ y \in V,\ U \cap V = \varnothing$$

을 만족하는 X의 열린집합 U, V가 존재한다. 그리고 $U_* = \pi(U)$, $V_* = \pi(V)$이라 하면 $A \subset U$, $V \cap A = \varnothing$이므로 $\pi^{-1}(U_*) = U$, $\pi^{-1}(V_*) = V$가 된다. 따라서 U_*, V_*는 X/A의 열린집합이고

$$[x] \in U_*,\ [y] \in V_*,\ U_* \cap V_* = \varnothing$$

이다.

(2) 만약 X가 정규이면 X/A도 정규이다: C_*, D_*를 X/A의 서로소인 닫힌집합이라 하자. 그리고 한 점 $a \in A$를 고정하자. 그러면 $[a] = A$이다.

(i) 먼저 $[a] \notin C_*$, $[a] \notin D_*$인 경우: $C = \pi^{-1}(C_*)$, $D = \pi^{-1}(D_*)$이라 하자. 그러면 π가 연속이므로 C, D는 X의 서로소인 닫힌집합이다. 그리고 X가 정규이므로

$$C \subset U_1,\ D \subset V_1,\ U_1 \cap V_1 = \varnothing$$

을 만족하는 X의 열린집합 U_1, V_1이 존재한다. 그리고 $U = U_1 \cap (X - A)$, $V = V_1 \cap (X - A)$는 X의 열린집합으로서

$$C \subset U,\ D \subset V,\ U \cap V = \varnothing$$

를 만족한다. 그리고 $U_* = \pi(U)$, $V_* = \pi(V)$이라 하면 $U \cap A = \varnothing$, $V \cap A = \varnothing$이므로 $\pi^{-1}(U_*) = U$, $\pi^{-1}(V_*) = V$가 된다. 따라서 U_*, V_*는 X/A의 열린집합이고

$$C_* \subset U_*,\ D_* \subset V_*,\ U_* \cap V_* = \varnothing$$

이다.

(ii) 이제 $[a] \in C_*$, $[a] \notin D_*$인 경우: $C = \pi^{-1}(C_*)$, $D = \pi^{-1}(D_*)$이라 하자. 그러면 π가 연속이므로 C, D는 X의 서로소인 닫힌집합이고, $A \subset C$, $D \subset X - A$이다. 그리고 X가 정규이므로

$$C \subset U,\ D \subset V,\ U \cap V = \varnothing$$

을 만족하는 X의 열린집합 U, V가 존재한다. 그리고 $U_* = \pi(U)$, $V_* = \pi(V)$이라 하면 $A \subset U$, $V \cap A = \varnothing$이므로 $\pi^{-1}(U_*) = U$, $\pi^{-1}(V_*) = V$가 된다. 따라서 U_*, V_*는 X/A의 열린집합이고

$$C_* \subset U_*,\ D_* \subset V_*,\ U_* \cap V_* = \varnothing$$

이다.

(3) 만약 X와 Y가 Hausdorff이고 $f\colon X \to Y$가 연속사상이면 M_f와 C_f도 Hausdorff이다: 경우의 수를 나누어 풀이하면 되므로 생략한다.

문제 13.3.3. ($\Rightarrow$) $X/_\sim$가 하우스도르프라 가정하자. 그러면 X가 컴팩트이므로 π는 자명하게 닫힌사상이다.

($\Leftarrow$) 이제 π가 닫힌사상이라 하자. 정리 13.3.4에 의해 $X/_\sim$이 정규이므로 하우스도르프이다.

문제 13.3.5. ($\Rightarrow$) $X/_\sim$가 거리화가능이면 $X/_\sim$를 거리공간으로 볼 수 있다. 그리고 거리공간은 하우스도르프이므로 $X/_\sim$는 하우스도르프공간이다.

($\Leftarrow$) 역은 따름정리 12.2.16에 의해 성립한다.

13.4 CW-복합체(CW-complex) †

문제 13.4.1. 0-세포: $f_0\colon D^0 = \{*\} \to \mathbb{R}P^2 = D^2/_\sim,\ f_0(*) = [(1,0)].\ f_0(D^0) = \{[(1,0)]\}.$

1-세포: $f_1\colon D^1 = [-1,1] \to \mathbb{R}P^2,\ f_1(t) = [(\cos\frac{t+1}{2}\pi, \sin\frac{t+1}{2}\pi)].\ f_1(D^1) = \mathbb{R}P^1.$

2-세포: $f_1\colon D^2 \to \mathbb{R}P^2,\ f_2(\mathbf{x}) = [\mathbf{x}].\ f_2(D^2) = \mathbb{R}P^2.$

13.5 궤도공간(orbit space) †

문제 13.5.1. $\mu\colon G \times G \to G$, $\mu(g,h) = gh$가 연속이고 U가 e의 열린근방이므로 $\mu^{-1}(U)$는 $G\times G$의 열린집합이고 점 (e,e)를 포함한다. 그러므로 $(e,e) \in W_1 \times W_2 \subset \mu^{-1}(U)$를 만족하는 G의 열린집합 W_1과 W_2가 존재하여 $e \in \mu(W_1 \times W_2) \subset U$이 된다. 여기서 $\mu(W_1 \times W_2) = W_1 \cdot W_2 = \{w_1w_2 \mid w_1 \in W_1, w_2 \in W_2\}$임을 유의하자. 이제 $W = W_1 \cap W_2$이라 하면 W는 e의 열린근방이고 $W \cdot W \subset U$이다. 이제 $V = W \cap W^{-1}$이라 하면 V는

$$e \in V,\quad V = V^{-1},\quad V \cdot V \subset U$$

을 만족하는 열린집합이다.

이제 $\overline{V} \subset U$임을 보이자. 임의의 점 $g \in \overline{V}$를 고정하자. 그러면 $gV = \{gv \mid v \in V\}$가 x의 열린근방이므로 $gV \cap V \neq \varnothing$이다. 그래서 $gv_1 = v_2$인 $v_1, v_2 \in V$가 존재한다. 그러면

$$g = v_2v_1^{-1} \in V \cdot V^{-1} = V \cdot V \subset U$$

이 되어 $g \in U$이다. 따라서 $\overline{V} \subset U$이다.

문제 13.5.3. H를 위상군 G의 열린부분군이라 하자. 그리고 $g \in \overline{H}$이라 하자. 그러면 gH는 g의 열린근방이므로 $gH \cap H \neq \varnothing$이다. 그런데 모든 잉여류는 같거나 서로소이므로 $gH = H$이다. 그러므로 $g = ge \in gH = H$이다. 따라서 $\overline{H} \subset H$이므로 $\overline{H} = H$이다. 그러므로 H는 닫힌집합이다.

문제 13.5.5. 모든 연경성분은 닫힌집합이므로 G_0는 G의 닫힌집합이다.

이제 G_0이 G의 정규부분군임을 보이자. G_0가 연결성분이므로 $G_0 \times G_0$도 $G \times G$의 연결된 부분집합이다. 그리고 $\rho\colon G \times G \to G$, $\rho(g,h) = gh^{-1}$가 연속사상이므로 $G_0G_0^{-1} = \rho(G_0 \times G_0)$도 e를 포함하는 G의 연결된 부분집합이다. 따라서 연결성분의 최대성에 의해 $G_0G_0^{-1} \subset G_0$이므로 G_0는 G의 부분군이다.

한편 임의의 $g \in G$에 대해 $c_g\colon G \to G$, $c_g(h) = ghg^{-1}$이 위상동형사상이므로 $c_g(G_0) = gG_0g^{-1}$는 e를 포함하는 G의 연결된 부분집합이다. 따라서 연결성분의 최대성에 의해 $gG_0g^{-1} \subset G_0$이다. 같은 방법으로 $c_{g^{-1}}(G_0) = g^{-1}G_0g \subset G_0$이므로 $gG_0g^{-1} = G_0$이다. 따라서 G_0는 G의 정규부분군이다.

문제 13.5.7. $\{e_1, \ldots, e_n\}$을 유클리드공간 $\mathbb{R}^n$의 표준기저라 하자. 이제 임의로 주어진 점 $x \in S^{n-1}$에 대해 단위 직교기저 $\{x = x_1, x_2, \ldots, x_n\}$이 존재한다. 그러면 행렬 $A_x = (x_1\ x_2\ \cdots\ x_n) \in O(n)$에 대해 $A_x(e_i) = x_i$이므로 $A_x(e_1) = x_1 = x$이다. 따라서 $O(n)(e_1) = S^{n-1}$이므로 $S^{n-1}/O(n)$은 한 점 $[e_1]$으로 이루어진 집합이다.

문제 13.5.9. (1) 수학적 귀납법을 사용하여 보이자. 먼저 $SO(1)$은 한 점 집합 $\{1\}$이므로 연결이다. 이제 $SO(n-1)$이 연결이라 가정하면 $SO(n)/SO(n-1) \cong S^{n-1}$도 연결이므로 정리 13.5.12에 의해 $SO(n)$도 연결이다. 따라서 모든 $SO(n)$은 연결공간이다.

(2) $\det\colon O(n) \to \mathbb{R}$은 연속이고, 모든 $A \in O(n)$에 대해 $\det(A) = \pm 1$이다. 그리고 $SO(n) = \det^{-1}(1)$과 $O(n) - SO(n) = \det^{-1}(-1)$이 $O(n)$의 (닫힌)분리가 되어 $O(n)$은 연결공간이 아니다. 임의로 택한 $A \in O(n) - SO(n)$에 대해 $\theta_A\colon O(n) \to O(n)$, $\theta_A(B) = AB$가 위상동형사상이고, $\theta_A(SO(n)) = O(n) - SO(n)$이다. 그런데 (1)에 의해 $SO(n)$이 연결이므로 $O(n) - SO(n)$도 연결집합이다. 따라서 $O(n)$은 두 연결성분 $SO(n)$과 $O(n) - SO(n)$으로 이루어졌다.

제 14 장

곡면의 분류정리

14.1 다양체(manifold)

문제 14.1.1. X를 n-다양체라 하고, 임의의 점 $x \in X$가 주어졌다하자.

먼저 x가 X의 내부점인 경우는 $\mathbb{R}^n$과 위상동형인 x의 열린근방 U가 존재한다. 우리는 $h\colon U \to \mathbb{R}^n$을 위상동형사상이라 하자. 이제 $V_* = B(h(x), 1)$, $C_* = \overline{B(h(x), 2)} \subset \mathbb{R}^n$이라 하면 V_*는 $h(x)$의 열린근방이고, C_*는 컴팩트하다. 따라서 $V = h^{-1}(U)$는 x의 열린근방이고 $C = h^{-1}(C_*)$는 컴팩트하고 $V \subset C$이다.

그리고 x가 X의 경계점인 경우는 $\mathbb{H}^n$과 위상동형인 x의 열린근방 U가 존재한다. 우리는 $h\colon U \to \mathbb{H}^n$을 위상동형사상이라 하자. 이제 $V_* = B(h(x), 1) \cap \mathbb{H}^n$, $C_* = \overline{B(h(x), 2)} \cap \mathbb{H}^n \subset \mathbb{H}^n$이라 하면 V_*는 $h(x)$의 열린근방이고, C_*는 컴팩트하다. 따라서 $V = h^{-1}(U)$는 x의 열린근방이고 $C = h^{-1}(C_*)$는 컴팩트하고 $V \subset C$이다.

따라서 다양체 X는 국소 컴팩트이다.

문제 14.1.3. (a)⇒(b) X가 정규공간이면 정리 14.1.6에 의해 $\{U_i\}$에 종속인 단위분할 $\{\phi_i\}$가 존재한다. 이제 $f_i = \phi_i$라 놓으면 (b)를 만족한다.

(b)⇒(a) X가 Hausdorff이므로 우리는 X가 조건 (N)을 만족함을 보이면 된다. 이를 위해 A_1와 A_2를 서로소인 X의 닫힌집합이라 하자. 그러면 $\{A_1^c, A_2^c\}$은 X의 열린덮개이므로 (b)에 의해

$$f_1(x) + f_2(x) = 1 \ \forall x \in X, \qquad f_i(x) = 0 \ \forall x \in X - A_i^c = A_i$$

을 만족하는 연속사상 $f_1, f_2\colon X \to I = [0,1]$이 존재한다. 이제 $U_i = f_i^{-1}([0, \frac{1}{2}))$라 하면 U_i는 X의 열린집합이고 $A_i \subset U_i$이다. 이제 $U_1 \cap U_2 = \varnothing$임을 보이면 된다. 만약 $U_1 \cap U_2 \neq \varnothing$이라 가정하면 $x \in U_1 \cap U_2$가 존재한다. 그러면 $f_i(x) < \frac{1}{2}$이므로 $f_1(x) + f_2(x) < 1$이 된다. 이는 $f_1(x) + f_2(x) = 1$이라는 사실에 모순이다. 따라서 $U_1 \cap U_2 = \varnothing$이 되어야 한다.

문제 14.1.5. 먼저 X가 컴팩트 하우스도르프이므로 정규이다. 정리 14.1.6에 의해 주어진 유한 열린덮개 $\{U_i\}$에 종속된 단위분할 $\{\phi_i\}$가 존재한다. 이제 $K_i = \mathrm{supp}(\phi_i)$이라 하면 $K_i \subset U_i$이고, K_i가 컴팩트공간 X의 닫힌집합이므로 K_i는 컴팩트이다. 이제 $\cup_{i=1}^n K_i = X$임을 보이자. 만약 $\cup_{i=1}^n K_i \neq X$이라 가정하면 $x \in X - (\cup_{i=1}^n K_i)$가 존재하여 모든 i에 대해 $x \notin K_i = \mathrm{supp}(\phi_i)$이 되어 $\phi_i(x) = 0$이 된다. 따라서 $\sum_{i=1}^n \phi_i(x) = 0$이 되어 $\{\phi_i\}$가 단위분할이라는 사실에 모순이다. 따라서 $\cup_{i=1}^n K_i = X$이다.

14.2 연결합(connected sum)

문제 14.2.1. $B(\mathbf{0},1)(\cong \mathbb{R}^2)$과 위상동형인 열린근방 U_1과 U_2를 택하고 $f_i\colon B(\mathbf{0},1) \to U_i$를 위상동형사상이라 하자. 그리고 $B_i = f_i(B(\mathbf{0},\frac{1}{2}))$는 X_i의 열린집합으로서 $f_i|\colon B(\mathbf{0},\frac{1}{2}) \to B_i$는 위상동형사상이고, $\overline{B}_i \subset U_i$, $\partial\overline{B}_i \cong S^1$이다. 이제 두 위상동형사상

$$h = f_2| \circ (f_1|)^{-1}\colon \partial\overline{B}_1 \xrightarrow{\cong} S^1 \xrightarrow{\cong} \partial\overline{B}_2$$

와 h^{-1}에 대해

$$X_1 \sharp X_2 = (X_1 - B_1) \cup_h (X_2 - B_2), \quad X_2 \sharp X_1 = (X_2 - B_2) \cup_{h^{-1}} (X_1 - B_1)$$

이다. 그리고 위상동형사상 $\varphi\colon (X_1 - B_1) \cup (X_2 - B_2) \to (X_2 - B_2) \cup (X_1 - B_1)$, $\varphi(z) = z$가 유도하는 $\tilde{\varphi}\colon X_1 \sharp X_2 \to X_2 \sharp X_1$가 위상동형사상이 된다.

문제 14.2.3. (1) $abacb^{-1}c^{-1} \underset{\text{변공}(4)}{\cong} ddb^{-1}cb^{-1}c^{-1} \cong \mathbb{R}P^2 \sharp T \cong 3\mathbb{R}P^2$이다.

(2) $abbca^{-1}ddc^{-1} \underset{(3)}{\cong} abbxdda^{-1}x^{-1} \underset{(1)}{\cong} x^{-1}abbxdda^{-1} \underset{(3)}{\cong} x^{-1}y^{-1}xddbby^{-1} \underset{(1)}{\cong} y^{-1}x^{-1}y^{-1}xddbb \cong K \sharp \mathbb{R}P^2 \sharp \mathbb{R}P^2 \cong 4\mathbb{R}P^2$이다.

(3) $abcda^{-1}b^{-1}c^{-1}d^{-1} \underset{(3)}{\cong} abcxb^{-1}c^{-1}a^{-1}x^{-1} \underset{(3)}{\cong} yb^{-1}c^{-1}bcxy^{-1}x^{-1} \underset{(1)}{\cong} b^{-1}c^{-1}bcxy^{-1}x^{-1}y \cong T \sharp T = 2T$

(4) (방법1) $x = abcd$으로 놓으면 $abcdabcd = xx = \mathbb{R}P^2$이다.

(방법2) $abcdabcd \underset{(4)}{\cong} axxa^{-1}d^{-1}c^{-1}cd \underset{(2)}{\cong} axxa^{-1}d^{-1}d \underset{(2)}{\cong} axxa^{-1} \underset{(1)}{\cong} xxa^{-1}a \underset{(2)}{\cong} xx = \mathbb{R}P^2$이다.

(5) $abcad^{-1}c^{-1}b^{-1}d \underset{(1)}{\cong} cad^{-1}c^{-1}b^{-1}dab \underset{(4)}{\cong} cxxd^{-1}bcdb \underset{(1)}{\cong} xxd^{-1}bcdbc \underset{(4)}{\cong} xxd^{-1}yyd^{-1}c^{-1}c \underset{(4)}{\cong} xxzzy^{-1}y^{-1}c^{-1}c \underset{(2)}{\cong} xxzzy^{-1}y^{-1} \cong \mathbb{R}P^2 \sharp \mathbb{R}P^2 \sharp \mathbb{R}P^2 = 3\mathbb{R}P^2$이다.

14.3 곡면의 분류

문제 14.3.1. (1) $3\mathbb{R}P^2$ (2) $2\mathbb{R}P^2$ (3) $4\mathbb{R}P^2$ (4) S^2 (5) $3\mathbb{R}P^2$ (6) $\mathbb{R}P^2$ (7) $3\mathbb{R}P^2$ (8) $3\mathbb{R}P^2$ (9) T

14.4 오일러 특성수와 가향성

문제 14.4.1. 문자열에 쌍 $\{d,d\}$가 있으므로 비가향이고, 오일러수는 -3이다. 따라서 $5\mathbb{R}P^2$와 위상동형이다.

문제 14.4.3. 우리는 열린원판을 주어진 삼각분할에서 삼각형의 내부로 볼 수 있다. 따라서 $2T$에서 삼각형 5개가 빠진곡면이다. 따라서 $\chi(2T) = -2$이므로 주어진 컴팩트 곡면의 오일러수는 $-2-5=-7$이다.

문제 14.4.5. 문자열 $abcdaebf$이 나타내는 곡면을 X라 하자. 그러면 문자열에 쌍 $\{d,d\}$가 있으므로 비가향이다. 또한 8각형의 모서리에 주어진 문자열을 배열한 다음, 꼭지점에 이름을 붙여보면 세 모서리 c,d,f가 하나의 삼각형(원)을 그리고 모서리 e가 또 하나의 삼각형(원)을 나타냄을 알수있다. 따라서 어떤 연결인 닫힌곡면 Y에서 열린원판(삼각형) 2개를 잘라내어 얻은 곡면이다. 또한 X가 비가향이므로 Y도 비가향이다. 그리고 $\chi(Y)=\chi(X)+2=-1+2=1$이므로 Y는 $\mathbb{R}P^2$이다. 따라서 X는 $\mathbb{R}P^2$에서 2개의 열린원판을 잘라내어 얻은 곡면이다.

문제 14.4.7. 먼저 모든 모서리는 정확히 두개의 삼각형과 만나므로 $3f=2e$이다. 그리고 $f=\frac{2}{3}e$이므로

$$\chi(X) = v-e+f = v-e+\frac{2}{3}e = v-\frac{1}{3}e$$

이 되어

$$e = 3(v-\chi(X)) \tag{a}$$

이다.

한편 $v \geq 4$이다. 또한 각 모서리는 두개의 꼭지점으로 만들어지므로

$$e \leq vC_2 = \frac{1}{2}v(v-1) \tag{b}$$

이다. 그러므로

$$\begin{aligned}
(2v-7)^2 &= 4v^2-28v+49 \\
&= 49+4(v^2-v)-24v \\
&\geq 49+8e-24v && (\because \text{(b)}) \\
&= 49-24\chi(X) && (\because \text{(a)})
\end{aligned}$$

이다. 따라서 $v \geq \frac{1}{2}(7 + \sqrt{49 - 24\chi(X)})$이다.

제 15 장

Paracompact와 거리화 정리

15.1 Lindelöf공간

문제 15.1.1. X를 Lindelöf공간이라 하고 A를 비가산 부분집합이라 하자. 이제 A가 극한점을 가짐을 귀류법을 사용하여 보이자. 이를 위해 A가 극한점을 갖지않는다고 가정하자. 그러면 $\overline{A} = A \cup A' = A \cup \varnothing = A$이므로 A는 X의 닫힌집합이다. 따라서 성질 15.1.9에 의해 부분공간 A도 Lindelöf이다. 이제 임의의 점 $x \in A$에 대해 x가 A의 극한점이 아니므로 $U_x \cap A = \{x\}$를 만족하는 x의 열린근방 $U_x \subset X$가 존재한다. 그러면 $\{U_x \cap A \mid x \in A\}$는 A의 열린덮개이지만 가산부분덮개를 갖지않는다. 이는 A가 Lindelöf란 사실에 모순이다.

문제 15.1.3. $\mathscr{U}$를 $(X, \mathscr{T}_c)$의 열린덮개라 하자. 먼저 공집합이 아닌 $U_0 \in \mathscr{U}$을 택하자. 그러면 U_0^c이 가산집합이므로 $U_0^c = \{x_n \mid n \in J\}$이라 하자. 단, 여기서 $J = \{1, 2, \ldots, k\}$ 또는 $J = \mathbb{N}$이다. 각각의 $n \in J$에 대하여 $x_n \in U_n$을 만족하는 $U_n \in \mathscr{U}$를 택하자. 그러면 $\{U_0\} \cup \{U_n \mid n \in J\}$가 우리가 원하는 $\mathscr{U}$의 가산부분덮개이다.

문제 15.1.5. (1) $\mathscr{U}$를 X의 열린덮개라 하자. 그러면 $0 \in U$인 $U \in \mathscr{U}$가 존재한다. 그리고 $\mathscr{T}$의 정의에 의해 $(-1, 1) \subset U$이 되어야 한다. 한편 $-1 \in V$, $1 \in W$인 $V, W \in \mathscr{U}$가 존재하므로 $\{U, V, W\}$가 유한부분덮개가 된다. 따라서 $(X, \mathscr{T})$는 컴팩트이다.

(2) 임의의 $a \in A$에 대해 $0 \notin \{a\}$이므로 $\{a\} \in \mathscr{T}$이다. 그래서 $\{a\} = A \cap \{a\} \in \mathscr{T}_A$이다. 그러면 $\{\{a\} \mid a \in A\}$는 A의 열린부분덮개이지만 가산부분덮개를 갖지 않는다. 따라서 부분공간 A는 Lindelöf가 아니다.

15.2 Paracompact 공간

문제 15.2.1. (방법1) 이산공간은 이산거리를 갖는 거리공간이므로 paracompact이다.

(방법2) X를 이산공간, $\mathscr{U}$를 X의 임의의 열린덮개라 하자. 그러면 $\mathscr{V} = \{\{x\} \mid x \in X\}$가 $\mathscr{U}$의 국소유한 열린세분 덮개이다.

문제 15.2.3. $S_\Omega \times \overline{S}_\Omega$는 컴팩트 Hausdorff 공간 $\overline{S}_\Omega \times \overline{S}_\Omega$의 열린부분공간이므로 국소컴팩트 Hausdorff 공간이다. 그러나 $S_\Omega \times \overline{S}_\Omega$는 정규가 아니므로 paracompact는 아니다.

문제 15.2.5. (1) 각각의 자연수 $n \in \mathbb{N}$에 대해 K_n이 X의 컴팩트 부분공간이고 $X = \cup_{n\in\mathbb{N}} K_n$이라 하자.

우리는 따름정리 15.2.12에 의해 X가 Lindelöf임을 보이면 충분하다. 이제 $\mathscr{U}$를 X의 열린덮개라 하자. 그러면 각각의 $n \in \mathbb{N}$에 대하여 $\mathscr{U}$가 compact 공간 K_n의 열린덮개이므로 $\mathscr{U}$의 유한부분덮개 $\mathscr{V}_n$이존재한다. 그러면 $\mathscr{V} = \cup_{n\in\mathbb{N}} \mathscr{V}_n$은 X의 덮개이고 $\mathscr{U}$의 가산부분덮개이다. 따라서 X는 Lindelöf이다.

(2) 우리는 정칙공간 X가 두개의 닫힌 paracompact 부분공간 A와 B의 합집합이면 X가 paracompact임을 보이면 충분하다. X의 열린덮개 $\mathscr{U}$가 주어졌다 하자. 그러면 $\mathscr{U}_A = \{A \cap U \mid U \in \mathscr{U}\}$와 $\mathscr{U}_B = \{B \cap U \mid U \in \mathscr{U}\}$는 각각 A와 B의 열린덮개이다. 그리고 A와 B가 paracompact이므로 이들의 국소유한 닫힌세분 덮개 $\mathscr{V}_A$와 $\mathscr{V}_B$가 존재한다. 이제 $\mathscr{V} = \mathscr{V}_A \cup \mathscr{V}_B$이라 하자. 그러면 $\mathscr{V}$는 X의 덮개이고 $\mathscr{U}$의 세분이다. 이제 $\mathscr{V}$가 국소유한임을 보이자. 점 $x \in X$가 임의로 주어졌다 하자.

(i) $x \in A - B$인 경우에는 $\mathscr{V}_A$가 국소유한이므로 $\mathscr{V}_A$의 유한개의 원소와만 만나는 x의 열린근방 $U \subset A$가 존재한다. 그리고 $U = A \cap O$를 만족하는 x의 열린근방 $O \subset X$가 존재한다. 그러면 $W = O - B$는 X의 열린집합이고 $x \in W$이다. 더구나 $W \subset U$이므로 W는 $\mathscr{V}_A$의 유한개의 원소와만 만나고, $\mathscr{V}_B$의 원소와는 만나지 않는다. 따라서 W는 $\mathscr{V}$의 유한개의 원소와만 만난다.

(ii) $x \in B - A$인 경우에는 (i)과 비슷하게 해결할수있다.

(iii) $x \in A \cap B$인 경우에는 $\mathscr{V}_A$가 국소유한이므로 $\mathscr{V}_A$의 유한개의 원소와만 만나는 x의 열린근방 $U \subset A$가 존재하고, $\mathscr{V}_B$가 국소유한이므로 $\mathscr{V}_B$의 유한개의 원소와만 만나는 x의 열린근방 $V \subset B$가 존재한다. 그러면 $U = A \cap O$, $V = B \cap G$를 만족하는 x의 열린근방 $O, G \subset X$가 존재한다. 이제 $W = O \cap G$라 하면 W는 x의 열린근방이다. 그리고

$$W = W \cap (A \cup B) = (W \cap A) \cup (W \cap B) \subset U \cup V$$

이므로 W는 $\mathscr{V}$의 유한개의 원소와만 만난다.

따라서 정리 15.2.11에 의해 X는 paracompact이다.

문제 15.2.7. (a)⇒(b) f는 전단사인 열린사상이라 하자. 이제 X의 열린덮개 $\mathscr{U}$에 대해 $\mathscr{V} = \{f(U) \mid U \in \mathscr{U}\}$로 잡으면 f가 전사 열린사사상이므로 $\mathscr{V}$는 Y의 열린덮개이다. 그리고 f가 전단사이므로 $f^{-1}(f(U)) = U$ $(\forall U \in \mathscr{U})$이 되어 $\{f^{-1}(V) \mid V \in \mathscr{V}\}$가 $\mathscr{U}$의 세분이 된다.

(b)⇒(a) 먼저 f가 단사임을 보이자: 귀류법. 서로 다른 두 점 $c, d \in X$에 대해 $f(c) = f(d) \in Y$이라 가정하자. 그러면 $\mathscr{U} = \{X - \{c\}, X - \{d\}\}$가 X의 열린덮개이므로 가정 (b)에 의해 $\{f^{-1}(V) \mid V \in \mathscr{V}\}$가 $\mathscr{U}$의 세분이 되는 Y의 열린덮개 $\mathscr{V}$가 존재한다. $\mathscr{V}$가 Y의 덮개이므로 $f(c) = f(d) \in V$인 V가 존재한다. 그리고 $\{f^{-1}(V) \mid V \in \mathscr{V}\}$가 $\mathscr{U}$의 세분이므로 $c, d \in f^{-1}(V) \subset U$인 $U \in \mathscr{U}$가 존재하여야 한다. 그런데 $\mathscr{U} = \{X - \{c\}, X - \{d\}\}$이므로 이러한 U가 존재하지 않는다. 이는 모순이다.

이제 f가 열린사상임을 보이자: X의 임의의 열린집합 U를 고정하자. 각각의 점 $a \in U$에 대해 $\mathscr{U}_a = \{U, X - \{a\}\}$이라 하면 $\mathscr{U}_a$는 X의 열린덮개이다. 그러면 가정 (b)에 의해 $\{f^{-1}(V) \mid V \in \mathscr{V}_a\}$가 $\mathscr{U}_a$의 세분이 되는 Y의 열린덮개 $\mathscr{V}_a$가 존재한다. $\mathscr{V}_a$가 Y의 덮개이므로 $f(a) \in V_a$인 $V_a \in \mathscr{V}_a$가 존재한다. 그리고 $\{f^{-1}(V) \mid V \in \mathscr{V}_a\}$가 $\mathscr{U}_a$의 세분이므로 $a \in f^{-1}(V_a) \subset W$인 $W \in \mathscr{U}_a$가 존재하여야 한다. 그런데 $\mathscr{U}_a = \{U, X - \{a\}\}$이므로 $W = U$가 되어야 하므로 $a \in f^{-1}(V_a) \subset U$이다. 그래서 $f(a) \in V_a \subset f(U)$이다. 그러므로 $f(U) = \cup\{V_a \mid a \in U\}$이고 V_a가 Y의 열린집합이므로 $f(U)$도 Y의 열린집합이다.

문제 15.2.9. 상사상 $\pi\colon X \amalg Y \to X \cup_f Y$가 전사인 연속사상이므로 우리는 π가 닫힌사상임을 보이면 충분하다(성질 15.2.18 참조). 먼저 f가 닫힌사상이므로 $f(A)$는 Y의 닫힌집합이다. 이제 C가 $X \amalg Y$의 닫힌집합이라 하자. 그러면 $C = E \cup F$인 X의 닫힌집합 E와 Y의 닫힌집합 F가 존재한다. 그리고

$$\pi^{-1}(\pi(E)) = E \cup f(A \cap E),$$
$$\pi^{-1}(\pi(F)) = f^{-1}(f(A) \cap F) \cup F$$

이다. 그런데 f가 닫힌사상이므로 $f(A \cap E)$는 Y의 닫힌집합이고, f가 연속이므로 $f^{-1}(f(A) \cap F)$는 X의 닫힌집합이다. 그래서 $\pi^{-1}(\pi(E))$와 $\pi^{-1}(\pi(F))$ 모두 $X \amalg Y$의 닫힌집합이므로 $\pi^{-1}(\pi(C)) = \pi^{-1}(\pi(E)) \cup \pi^{-1}(\pi(F))$는 $X \amalg Y$의 닫힌집합이다. 따라서 $\pi(C)$는 $X \cup_f Y$이므로 π는 닫힌사상이다.

문제 15.2.11. (1) 먼저 a_0를 S_Ω의 최소원이라 하자. 그러면 $\mathscr{U} = \{S_a \mid a \in S_\Omega - \{a_0\}\}$는 S_Ω의 열린덮개이다. 이제 $\mathscr{V}$를 $\mathscr{U}$의 임의의 열린세분이라 하자. 이제 다음 조건들을 만족하는 함수 $f\colon S_\Omega \to S_\Omega$를 하나 택하자.

(i) $f(a_0) = a_0$,

(ii) $f(a) \prec a \ \ \forall a \in S_\Omega - \{a_0\}$,

(iii) $\forall a \in S_\Omega - \{a_0\},\ \exists V_a \in \mathscr{V}\ \text{ s.t. } (f(a), a] \subset V_a$.

(주장) 다음을 만족하는 $z \in S_\Omega$가 존재한다:

$$\forall a \in S_\Omega,\ \exists b \in S_\Omega \ \text{ s.t. } \ b \succeq a,\ f(b) \prec z$$

(주장 풀이) 귀류법. 이러한 z가 존재하지 않는다고 가정하자. 그러면 각각의 $z \in S_\Omega$에 대해

$$b \in S_\Omega \ \text{ s.t.}\, b \succeq a(z) \ \Rightarrow \ z \preceq f(b)$$

를 만족하는 $a(z) \in S_\Omega$가 존재한다. 이제 $z_1 = a_0, z_{n+1} = a(z_n)$으로 정의하고, $z^* = \sup\{z_n \mid n \in \mathbb{N}\}$이라 하자. 그러면 $z^* \in S_\Omega$이다. 그리고 각각의 $n \in \mathbb{N}$에 대해 $z^* \succeq z_{n+1} = a(z_n)$이므로 $z_n \preceq f(z^*)$이다. 따라서 $z^* \preceq f(z^*) \prec z^*$이 되어 모순이다. □

따라서 우리는 다음을 만족하는 수열 $\{c_n\}$을 찾을 수 있다:

(iv) $c_1 \succ z$,

(v) $c_{n+1} \succ c_n \ \forall n \in \mathbb{N}$,

(vi) $f(c_n) \prec z \ \forall n \in \mathbb{N}$.

그러면 $z \in \cap_{n\in\mathbb{N}} V_{c_n}$이므로 $\mathscr{V}$는 점 z에서 국소유한이 아니다.

(2) $\overline{S}_\Omega$는 compact Hausdorff이므로 paracompact이다.

15.3 거리화 정리

문제 15.3.1. X가 제2가산 정칙공간이므로 Urysohn 거리화 정리에 의해 X는 거리화 가능이다. 따라서 Nagata-Smironov 거리화 정리에 의해 X는 σ-국소유한인 기저를 갖는다.

(1) 기초정리 15.3.4의 증명 과정 참조.

(2) Nagata-Smironov 거리화 정리(정리 15.3.5)의 증명 과정 참조.

제 16 장

함수공간

16.1 함수집합에서의 거리

문제 16.1.1. 각각의 점 $x \in (0, \infty)$에 대하여 $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{nx} = 0$이므로 f_n이 수렴한다면 $f\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = 0$으로 수렴해야 한다. 그런데 $\varepsilon = 1$과 각각의 자연수 $n \in \mathbb{N}$에 대해 $\frac{1}{n} < x$인 x가 존재하여 $|f_n(x) - f(x)| = |\frac{1}{nx} - 0| = \frac{1}{nx} > 1$이다. 그러므로 f_n은 f로 고르게 수렴하지 않는다. 그리고 참고 16.1.2에 의해 f_n은 f로 고른위상에서 수렴하지 않는다. 따라서 f_n은 고른위상에서 수렴하지 않는다.

문제 16.1.3. (1) $f, g, h \in \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$이라 하자.

(i) 모든 $x \in [0,1]$에 대해 $|f(x) - g(x)| \geq 0$이므로 $\varrho(f,g) = \int_0^1 |f(x) - g(x)|dx \geq 0$이다.

(ii) 만약 $f = g$이면 $\varrho(f,g) = \int_0^1 |f(x) - g(x)|dx = \int_0^1 0dx = 0$이다. 역으로 만약 $\varrho(f,g) = 0$이면 $\int_0^1 |f(x) - g(x)|dx = 0$이므로 $|f(x) - g(x)| = 0 (\forall x \in [0,1])$이 되어야 하므로 $f(x) = g(x) (\forall x \in [0,1])$이다. 따라서 $f = g$이다.

(iii) $\varrho(f,g) = \int_0^1 |f(x) - g(x)|dx = \int_0^1 |g(x) - f(x)|dx = \varrho(g,f)$이다.

(iv) 모든 $x \in [0,1]$에 대해 $|f(x) - h(x)| \leq |f(x) - g(x)| + |g(x) - h(x)|$이므로

$$\begin{aligned} \varrho(f,h) &= \int_0^1 |f(x) - g(x)|dx \leq \int_0^1 |f(x) - g(x)| + |g(x) - h(x)|dx \\ &= \int_0^1 |f(x) - g(x)|dx + \int_0^1 |g(x) - h(x)|dx = \varrho(f,g) + \varrho(g,h) \end{aligned}$$

이다.

따라서 ϱ는 집합 $\mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$상의 거리이다.

(2) 함수 $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$를 $f(x) = \begin{cases} 1, & x = 0 \\ 0, & x \neq 0 \end{cases}$로 정의하자. 그리고 $g\colon [0,1] \to \mathbb{R}$, $g(x) = 0$이라 하자. 그러면 $f, g \in \mathcal{R}([0,1], \mathbb{R})$이고 $f \neq g$이지만, $\varrho(f,g) = \int_0^1 |f(x) - g(x)| = 0$이다. 따라서 ϱ는 집합 $\mathcal{R}([0,1], \mathbb{R})$상의 거리가 아니다.

16.2 공간을 채우는 곡선 †

문제 16.2.1. (귀류법) $f\colon I \to I^2$가 위상동형사상이라 가정하자. 그러면 점 $p = \frac{1}{2} \in I$에 대해 축소사상 $f|\colon I - \{p\} \to I^2 - \{f(p)\}$도 위상동형사상이므로 $I - \{p\}$와 $I^2 - \{f(p)\}$는 위상동형이다. 그런데 $I - \{p\}$는 비연결이고, $I^2 - \{f(p)\}$는 연결이므로 이는 모순이다. 따라서 f는 위상동형사상이 아니다.

문제 16.2.3. (1) (귀류법) $\mathbb{R}^\omega$는 가산개의 컴팩트 부분공간 $K_n(\forall n \in \mathbb{N})$의 합집합으로 표현된다고 가정하자. 그러면 사영사상

$$\pi_n\colon \mathbb{R}^\omega \to \mathbb{R},\ \pi_n((x_1, x_2, \ldots)) = x_n$$

이 연속이므로 $\pi_n(K_n)$도 $\mathbb{R}$의 컴팩트 부분집합이다. 따라서 $y_n \in \mathbb{R} - \pi_n(K_n)$이 존재한다. 이제 $\mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3, \ldots) \in \mathbb{R}^\omega$이라 하자. 그러면 모든 자연수 n에 대해 $\mathbf{y} \notin \pi_n^{-1}(\pi_n(K_n))$이고 $K_n \subset \pi_n^{-1}(\pi_n(K_n))$이므로 $\mathbf{y} \notin K_n$이다. 이는 $\cup_{n=1}^\infty K_n = \mathbb{R}^\omega$이라는 가정에 모순이다.

(2) (귀류법) 전사인 연속사상 $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^\omega$가 존재한다고 가정하자. 그러면 각각의 정수 n에 대하여 $[n, n+1]$이 $\mathbb{R}$의 컴팩트 부분집합이고 f가 연속이므로 $f([n, n+1])$은 $\mathbb{R}^\omega$의 컴팩트 부분집합이다. 그리고 f가 전사이므로 $\mathbb{R}^\omega$는 가산개의 컴팩트 부분집합 $f([n, n+1])$들의 합집합이 된다. 이는 (1)에 모순이다.

(3) 먼저

$$\mathbb{R}^\infty = \cup_{n=1}^\infty \mathbb{R}^n \times \mathbf{0} = \cup_{n=1}^\infty [-n, n]^n \times \mathbf{0}$$

임을 상기하자.

이제 각각의 자연수 $n \in \mathbb{N}$에 대해 $[2n-1, 2n]$은 I와 위상동형이고 $[-n, n]^n$는 I^n와 위상동형이므로 문제 16.2.2에 의해 전사인 연속사상

$$f_n\colon [2n-1, 2n] \to [-n, n]^n$$

이 존재한다. 그리고

$$\tilde{f}_n\colon [2n-1, 2n] \to [-n, n]^n \times \mathbf{0} \hookrightarrow \mathbb{R}^\infty,\ \tilde{f}_n(x) = (f_n(x), 0, 0, 0, \ldots)$$

는 연속이고 $\tilde{f}_n([2n-1, 2n]) = [-n, n]^n \times \mathbf{0} \subset \mathbb{R}^\infty$이다. 그리고 $[2n-1, 2n](\forall n \in \mathbb{N})$이 서로소이므로

$$\tilde{f}\colon \bigcup_{n\in\mathbb{N}} [2n-1, 2n] \to \bigcup_{n\in\mathbb{N}} [-n, n]^n \times \mathbf{0} = \mathbb{R}^\infty,\quad \tilde{f}|_{[2n-1,2n]} = \tilde{f}_n$$

은 전사인 연속사상이다. 이제 $\tilde{f}$의 연속인 확장 g를 다음과 같이 구체적으로 만들 수 있다. 먼저 자연수 n에 대해 위상동형사상 $h_n\colon [2n, 2n+1] \to [0, 1]$, $h_n(x) = x - 2n$이 존재한다.

그러면

$$g\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}^\infty,\quad g(x)=\begin{cases}\tilde f_n(x), & x\in[2n-1,2n]\\ (1-h_n(x))\tilde f_n(2n)+h_n(x)\tilde f_{n+1}(2n+1), & x\in[2n,2n+1]\\ \tilde f_1(1), & x\in(-\infty,1]\end{cases}$$

이 전사인 연속사상이 된다.

(4) 우리는 $\mathscr{T}_p\subset\mathscr{T}_b$, $\mathscr{T}_p\subset\mathscr{T}_{\bar\rho}$임을 상기하자.

(2) 먼저 전사인 연속사상 $f\colon\mathbb{R}\to(\mathbb{R}^\omega,\mathscr{T}_b)$가 존재한다고 가정하자. 그러면 $h\colon(\mathbb{R}^\omega,\mathscr{T}_b)\to(\mathbb{R}^\omega,\mathscr{T}_p)$, $h(x)=x$가 전사인 연속이므로 $h\circ f\colon\mathbb{R}\to(\mathbb{R}^\omega,\mathscr{T}_p)$도 전사인 연속사상이다. 이는 (2)에 모순이다. 따라서 전사인 연속사상 $f\colon\mathbb{R}\to(\mathbb{R}^\omega,\mathscr{T}_b)$는 존재하지 않는다. 같은 방법으로 전사인 연속사상 $f\colon\mathbb{R}\to(\mathbb{R}^\omega,\mathscr{T}_{\bar\rho})$가 존재하지 않음을 보일 수 있다.

(3) 이제 $\mathbb{R}^n=\mathbb{R}^n\times\mathbf{0}$상에서는 $\mathscr{T}_p=\mathscr{T}_b=\mathscr{T}_{\bar\rho}$임을 상기하자. 따라서 두 위상 $\mathscr{T}_b$, $\mathscr{T}_{\bar\rho}$에 대해 (3)의 증명과정에서의

$$\tilde f_n\colon[2n-1,2n]\to[-n,n]^n\times\mathbf{0}\hookrightarrow\mathbb{R}^n\times\mathbf{0}\hookrightarrow\mathbb{R}^\infty,\ \tilde f_n(x)=(f_n(x),0,0,0,\ldots)$$

는 연속사상이다. 따라서 (3)은 두 위상 $\mathscr{T}_b$, $\mathscr{T}_{\bar\rho}$ 모두에 대해 성립한다.

16.3 Compact-Open 위상

문제 16.3.1. (1) 임의로 주어진 $f\in\mathcal{C}(X,Y)$에 대해 한 점 $x\in X$를 택하면 $S(\{x\},Y)\in\mathcal{S}$이고 $f\in S(\{x\},Y)$이다. 따라서 $\mathcal{S}$는 집합 $\mathcal{C}(X,Y)$상의 부분기저이다.

(2) 두 이산공간 $X=\{a,b\}$, $Y=\{0,1\}$을 생각하자. 그러면 $\mathcal{S}=\{S(K,U)\mid K\subset X,\ U\subset Y\}$이다. 그리고

$$\begin{aligned}f_1(a)=0,&\quad f_1(b)=0\\ f_2(a)=1,&\quad f_2(b)=1\\ f_3(a)=0,&\quad f_3(b)=1\\ f_4(a)=1,&\quad f_4(b)=0\end{aligned}$$

이라 하자. 그러면 $\mathcal{C}(X,Y)=\{f_1,f_2,f_3,f_4\}$이다. 한편 $S(\{a\},\{0\})=\{f_1,f_3\}$이고 $S(\{b\},\{1\})=\{f_2,f_3\}$이므로 $f_3\in S(\{a\},\{0\})\cap S(\{b\},\{1\})=\{f_3\}$이다. 그런데 $f_3\in S(K,U)\subset S(\{a\},\{0\})\cap S(\{b\},\{1\})=\{f_3\}$을 만족하는 $K\subset X$와 $U\subset V$가 존재하지 않는다. 따라서 $\mathcal{S}$는 집합 $\mathcal{C}(X,Y)$상의 기저가 되지 않는다. (참고로 $S(\varnothing,U)=\mathcal{C}(X,Y)=\{f_1,f_2,f_3,f_4\}$이고 $S(\{a\},\varnothing)=\varnothing$, $S(\{a\},Y)=\mathcal{C}(X,Y)=\{f_1,f_2,f_3,f_4\}$이다.)

문제 16.3.3. X가 이산공간이면 $\mathcal{C}(X,Y)$는 곱공간 $Y^X = \Pi_{x\in X} Y = \Pi_{x\in X} Y_x$와 위상동형임을 보이자. 단, 여기서 모든 $x \in X$에 대하여 $Y_x = Y$이다: 함수

$$\varphi\colon \mathcal{C}(X,Y) \to \Pi_{x\in X} Y_x, \quad \varphi(f) = (f(x))_{x\in X}$$

와 함수

$$\phi\colon \Pi_{x\in X} Y_x \to \mathcal{C}(X,Y), \quad \phi((y_x)_{x\in X})\colon X \to Y,\ x \mapsto y_x$$

는 서로 역함수 관계이다. 따라서 φ는 전단사이다.

(i) 먼저 φ가 연속임을 보이자: $\Pi_{x\in X} Y_x$의 기저의 원소 $B = \Pi_{x\in X} U_x$는 유한개의 $x_1, x_2, \ldots, x_n \in X$를 제외하고는 $U_x = Y_x = Y$이다. 그리고 U_{x_i}는 $Y_{x_i} = Y$의 열린집합이다. 그러면 $\varphi(B) = \cap_{i=1}^n S(\{x_i\}, U_{x_i})$이 되어 $\varphi(B)$는 $\mathcal{C}(X,Y)$의 기저의 원소이므로 열린집합이다. 따라서 φ는 연속이다.

(ii) 이제 φ가 열린사상임을 보이면 된다: $\mathcal{C}(X,Y)$의 부분기저의 원소 $S(K,U)$에 대해 K가 이산공간 X의 컴팩트집합이므로 K는 유한집합이다. 그리고 $\varphi(S(K,U)) = \Pi_{x\in X} U_x$이다. 단, 여기서 $U_x = \begin{cases} U, & x \in K \\ Y, & x \notin K \end{cases}$이다. 따라서 $\varphi(S(K,U)) = \Pi_{x\in X} U_x$가 곱공간 $\Pi_{x\in X} Y_x$의 기저의 원소이므로 열린집합이다. 그러므로 φ는 열린사상이다.

결국 φ는 위상동형사상이다.

문제 16.3.5. D를 Y의 닫힌집합이라 하자. 이제 $j(D) = \{c_y \mid y \in D\}$가 $\mathcal{C}(X,Y)$의 닫힌집합임을 보이자. 이를 위해 $\mathcal{C}(X,Y) - j(D)$가 $\mathcal{C}(X,Y)$의 열린집합임을 보이면 된다.

임의의 $f \in \mathcal{C}(X,Y) - j(D)$를 고정하자. 먼저 f가 상수사상이면 적당한 $y \in Y - D$에 대해 $f = c_y$이다. 이제 임의의 한 점 $x \in X$를 택하면

$$f \in S(\{x\}, Y - D) \subset \mathcal{C}(X,Y) - j(D)$$

이므로 f는 $\mathcal{C}(X,Y) - j(D)$의 내부점이다. 만약 f가 상수사상이 아니면 $f(x_1) \neq f(x_2)$인 $x_1 \neq x_2 \in X$가 존재한다. 그리고 Y가 Hausdorff이므로

$$f(x_1) \in U_1, \quad f(x_2) \in U_2, \quad U_1 \cap U_2 = \varnothing$$

을 만족하는 Y의 열린집합 U_1, U_2가 존재하여

$$f \in S(\{x_1\}, U_1) \cap S(\{x_2\}, U_2) \subset \mathcal{C}(X,Y) - j(D)$$

이 되므로 f는 $\mathcal{C}(X,Y) - j(D)$의 내부점이다. 따라서 $\mathcal{C}(X,Y) - j(D)$가 $\mathcal{C}(X,Y)$의 열린집합이므로 $j(D)$는 $\mathcal{C}(X,Y)$의 닫힌집합이다.

문제 16.3.7. 편의상 $\mathcal{C}(X,Y) = (\mathcal{C}(X,Y), \mathscr{T}_{co})$이라 하자. 먼저 부치사상

$$e\colon X \times \mathcal{C}'(X,Y) \to Y, \quad e(x,f) = f(x)$$

가 유도하는 사상

$$\hat{e}\colon \mathcal{C}'(X,Y) \to \mathcal{C}(X,Y), \quad [\hat{e}(f)](x) = f(x)$$

을 생각하자. 그러면 모든 $f \in \mathcal{C}(X,Y)$에 대해 $\hat{e}(f) = f$이므로 $\hat{e}$은 항등사상이다. 그리고 e가 연속이므로 정리 16.3.14(1)에 의해 항등사상 $\hat{e}$도 연속이다. 그러므로 임의의 열린집합 $U \in \mathscr{T}_{co}$에 대해 $U = \hat{e}^{-1}(U) \in \mathscr{T}$이다. 따라서 $\mathscr{T}_{co} \subset \mathscr{T}$이다.

16.4 거리공간에서의 C-O 위상

문제 16.4.1. 임의의 $f \in Y^X$에 대해 점 $x \in X$를 임의로 택하면 $S(x,Y) \in \mathcal{S}$이고 $f \in S(x,Y)$이다. 따라서 $\mathcal{S}$는 집합 Y^X상의 부분기저이다.

문제 16.4.3. 먼저 각각의 $x \in (0,\infty)$에 대하여 $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{nx} = 0$이므로 f_n이 수렴한다면 $f\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = 0$으로 수렴해야 한다. 이제 f를 포함하는 임의의 열린집합 $W \in \mathscr{T}_{cc}$에 대하여 $f \in B_K(f,\varepsilon) \subset W$을 만족하는 기저의 원소 $B_K(f,\varepsilon)$가 존재한다. 그러면 K가 $(0,\infty)$의 컴팩트집합이므로 $K \subset [a,b] \subset (0,\infty)$를 만족하는 닫힌구간 $[a,b]$가 존재한다. 그리고 모든 $x \in K$에 대해 $\frac{1}{b} \le \frac{1}{x} \le \frac{1}{a}$이다. 이제 $n_0 > \frac{1}{a\varepsilon}$을 만족하는 자연수 n_0를 택하자. 그러면

$$\begin{aligned} n \ge n_0 \quad &\Rightarrow \quad \forall x \in K,\ |\tfrac{1}{nx} - 0| = \tfrac{1}{nx} \le \tfrac{1}{na} \le \tfrac{1}{n_0 a} < \varepsilon \\ &\Rightarrow \quad f_n \in B_K(f,\varepsilon) \\ &\Rightarrow \quad f_n \in W \end{aligned}$$

이므로 수열 f_n은 컴팩트-수렴 위상에서 f로 수렴한다.

문제 16.4.5. 먼저 $[0,1]$이 컴팩트이고 $\mathbb{R}$이 거리공간이므로 $\mathscr{T}_{pc} \subset \mathscr{T}_{co} = \mathscr{T}_{cc} = \mathscr{T}_{\bar{\rho}}$임을 상기하자(정리 16.4.12, 정리 16.4.13). 그리고 $\lim_{n\to\infty} x^n = \begin{cases} 0, & x \in [0,1) \\ 1, & x = 1 \end{cases}$이므로 각각의 $x \in [0,1]$에 대해서 $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(\lim_{n\to\infty} x^n) = 0$이다. 따라서 정리 16.4.3에 의해 수열 f_n은 점-수렴 위상 $\mathscr{T}_{pc}$에서 상수사상 $g\colon [0,1] \to \mathbb{R}$, $g(x) = 0$으로 수렴한다.

이제 고른 위상 $\mathscr{T}_{\bar{\rho}}$에 대해 알아보자. 앞에서 보았듯이 수열 f_n이 고른위상에서 수렴한다면 상수사상 $g(x) \equiv 0$으로 수렴하여야 한다. 그런데 주어진 f가 상수사상이 아니므로 $f(c) \neq 0$인 $c \in (0,1)$가 존재한다. 이제 $\varepsilon = \frac{|f(c)|}{2}$이라 하자. 그러면 각각의 자연수 n에 대해 $(x_n)^n = c$를 만족하는 $x_n \in [0,1]$이 존재하여

$$|f_n(x_n) - g(x_n)| = |f((x_n)^n) - 0| = |f(c)| > \frac{|f(c)|}{2} = \varepsilon$$

이다. 그러므로 f_n은 g로 고르게 수렴하지 않는다. 그리고 참고 16.1.12에 의해 f_n은 고른위상 $\mathscr{T}_{\bar{\rho}}$에서 g로 수렴하지 않는다. 따라서 f_n은 고른위상 $\mathscr{T}_{\bar{\rho}}$에서 수렴하지 않는다.

16.5 Ascoli 정리

문제 16.5.1. X를 컴팩트공간, $(\mathbb{R}^n, d)$를 유클리드공간이라 하자.

먼저 X가 컴팩트이므로 $\mathcal{C}(X, \mathbb{R}^n)$상에서 $\mathscr{T}_{\bar{\rho}} = \mathscr{T}_{\rho} = \mathscr{T}_{cc}$임을 상기하자. 그리고 $\mathscr{F} \subset \mathcal{C}(X, \mathbb{R}^n)$라 하자.

이제 Ascoli 정리(정리 16.5.9)를 사용하여 정리 16.5.6을 보이자.

(b)⇒(c) 먼저 $\overline{\mathscr{F}}$가 $\mathcal{C}(X, \mathbb{R}^n)$의 컴팩트집합이라 하자. 그러면 $\mathscr{F}$가 컴팩트집합 $\overline{\mathscr{F}}$에 포함되므로 정리 16.5.9(2)에 의해 $\mathscr{F}$는 d에 의해 동등연속이고, 모든 점 $x \in X$에 대해 $\mathrm{cl}_{\mathbb{R}^n}(\mathscr{F}_x)$는 $\mathbb{R}^n$의 컴팩트집합이다. 그리고 Heine-Borel 정리에 의해 $\mathrm{cl}_{\mathbb{R}^n}(\mathscr{F}_x)$는 $\mathbb{R}^n$의 유계인 닫힌집합이다. 따라서 $\mathscr{F}_x \subset \mathrm{cl}_{\mathbb{R}^n}(\mathscr{F}_x)$이므로 $\mathscr{F}_x$도 $\mathbb{R}^n$의 유계인 부분집합이다. 따라서 $\mathscr{F}$는 점별유계이다.

(c)⇒(b) $\mathscr{F}$를 보통거리 d에 의해 동등연속이고 점별유계라하자. 그러면 모든 점 $x \in X$에 대해 $\mathscr{F}_x$가 유계이므로 $\mathscr{F}_x \subset B(\mathbf{0}, r_x) \subset \mathbb{R}^n$을 만족하는 열린구 $B(\mathbf{0}, r_x)$가 존재한다. 그러면 $\mathrm{cl}_{\mathbb{R}^n}(\mathscr{F}_x) \subset B(\mathbf{0}, r_x + 1) \subset \mathbb{R}^n$이므로 $\mathrm{cl}_{\mathbb{R}^n}(\mathscr{F}_x)$는 $\mathbb{R}^n$의 유계인 닫힌집합이다. Heine-Borel 정리에 의해 $\mathrm{cl}_{\mathbb{R}^n}(\mathscr{F}_x)$는 $\mathbb{R}^n$의 컴팩트집합이다. 따라서 정리 16.5.9(1)에 의해 $\mathscr{F}$는 $\mathcal{C}(X, \mathbb{R}^n)$의 적당한 컴팩트집합 $\mathscr{H}$에 포함된다. 그리고 $\mathcal{C}(X, \mathbb{R}^n)$이 하우스도르프이므로 $\mathscr{H}$는 $\mathcal{C}(X, \mathbb{R}^n)$의 닫힌집합이 되어 $\overline{\mathscr{F}} \subset \mathscr{H}$이다. 그런데 $\mathscr{H}$가 컴팩트이므로 이의 닫힌집합 $\overline{\mathscr{F}}$도 컴팩트이다.

문제 16.5.3. $\mathscr{F} = \{f_n \mid n \in \mathbb{N}\}$이 점별유계이고 동등연속이므로 정리 16.5.6(Ascoli 정리,고전판)에 의해 $\overline{\mathscr{F}}$는 $(\mathcal{C}(X, \mathbb{R}^k), \rho)$의 컴팩트집합이다. 그리고 정리 11.1.18에 의해 $\overline{\mathscr{F}}$는 수열컴팩트이다. 따라서 $\overline{\mathscr{F}}$상의 수열 $\{f_n\}$은 (고르게) 수렴하는 부분수열을 갖는다. (거리가 ρ임을 주의하자.)

16.6 Stone-Weierstrass 정리 †

문제 16.6.1. 먼저

$$\mathscr{P} = \{p \mid p \colon I = [0,1] \to \mathbb{R}\text{는 다항함수}\}$$

이라 하자. 그러면 따름정리 16.6.5에 의해 $\overline{\mathscr{P}} = \mathcal{C}(I, \mathbb{R})$이다. 이제 $Q_0 = \mathbb{Q}$이라 하고, 각각의 자연수 $n \in \mathbb{N}$에 대하여

$$Q_n = \{q_0 + q_1 x + \cdots + q_n x^n \mid q_i \in \mathbb{Q}\}$$

이라 하자. 그러면

$$Q = \cup_{n=0}^{\infty} Q_n = \{q \mid q\colon I \to \mathbb{R}\text{는 계수가 유리수인 다항함수}\}$$

는 가산집합이다.

(1) 우리는 $\overline{Q} = \mathcal{C}(I,\mathbb{R})$임을 보이면 된다. 임의로 주어진 $f \in \mathcal{C}(I,\mathbb{R})$와 양의 실수 $\varepsilon > 0$에 대해 $\rho(p,f) < \frac{\varepsilon}{2}$를 만족하는 다항함수 $p(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n \in \mathscr{P}$가 존재한다. 그리고 각각의 a_i에 대해 $|a_i - q_i| < \frac{\varepsilon}{2(n+1)}$을 만족하는 유리수 $q_i \in \mathbb{Q}$를 택하자. 그러면 $q(x) = q_0 + q_1x + \cdots + q_nx^n \in Q$이다. 그리고 모든 $x \in I$에 대해

$$|p(x) - q(x)| \le \sum_{i=0}^{n} |a_i - q_i| x^i \le \sum_{i=0}^{n} |a_i - q_i| < \frac{\varepsilon}{2}$$

이므로 $\rho(p,q) \le \frac{\varepsilon}{2}$이다. 그러면

$$\rho(f,q) \le \rho(f,p) + \rho(p,q) < \varepsilon$$

이므로 $f \in \overline{Q}$이다. 따라서 $\overline{Q} = \mathcal{C}(I,\mathbb{R})$이므로 $(\mathcal{C}(I,\mathbb{R}),\rho)$는 가분이다.

(2) 모든 거리공간은 제1가산이므로 $(\mathcal{C}(I,\mathbb{R}),\rho)$는 제1가산이다. 구체적으로 주어진 $f \in (\mathcal{C}(I,\mathbb{R})$에 대해

$$\mathscr{B}_f = \{B_\rho(f, \frac{1}{n}) \mid n \in \mathbb{N}\}$$

이 점 f에서의 가산국소기저이다.

(3) (1)에 의해 $(\mathcal{C}(I,\mathbb{R}),\rho)$이 가분인 거리공간이므로 제2가산이다(정리 10.2.27). 보다 구체적으로

$$\mathscr{B} = \{B_\rho(q, \frac{1}{n}) \mid q \in Q,\ n \in \mathbb{N}\}$$

이 $(\mathcal{C}(I,\mathbb{R}),\rho)$의 가산기저이다.

제 17 장

기본군과 덮개공간

17.1 변이(homotopy)

문제 17.1.1. 성질 17.1.7과 따름정리 17.1.12에 의해 성립한다.

문제 17.1.3. (1) 가정에 의해 모든 $\mathbf{x} \in S^n$에 대해 $f(\mathbf{x}) \neq -\mathbf{x} = -\mathrm{id}_{S^n}(\mathbf{x})$이므로 보기 17.1.2(4)에 의해 $f \simeq \mathrm{id}_{S^n}$이다.

(2) f가 전사가 아니므로 점 $\mathbf{p} \in S^n - f(X)$가 존재한다. 그리고 상수사상 $c\colon X \to S^n$, $c(x) = -\mathbf{p}$를 생각하자. 그러면 모든 $x \in X$에 대해

$$f(x) \neq \mathbf{p} = -(-\mathbf{p}) = -c(x)$$

이므로 보기 17.1.2(4)에 의해 $f \simeq c$이다. 따라서 f는 퇴화변이적이다.

(3) $k\colon S^n \to S^n$, $k(\mathbf{x}) = \frac{h(\mathbf{x})}{\|h(\mathbf{x})\|}$은 연속이고 모든 점 $\mathbf{x} \in S^n$에 대해 내적 $\mathbf{x} \cdot k(\mathbf{x}) = 0$이다. 그리고 주어진 연속사상 $f\colon X \to S^n$에 대하여 $f(x) \cdot k(f(x)) = 0$이므로 $(-f(x)) \cdot k(f(x)) = 0$이다. 따라서 벡터 $k(f(x))$는 두 벡터 $f(x)$, $-f(x)$ 모두와 수직이므로

$$k(f(x)) \neq f(x) = -(-f(x)),\ k(f(x)) \neq -f(x)\ \forall x \in X$$

이다. 따라서 보기 17.1.2(4)에 의해 $k \circ f \simeq -f$, $k \circ f \simeq f$이므로 $f \simeq -f$이다.

문제 17.1.5. X가 축약가능이므로 항등사상 id_X는 상수사상 $c\colon X \to X$와 변이적이다. 그러면 $r = r \circ \mathrm{id}_X \simeq r \circ c\colon X \to A$이다. 그리고 문제 17.1.4에 의해 $r|_A \simeq (r \circ c)|_A\colon A \to A$이고 가정에 의해 $r|_A \simeq \mathrm{id}_A$이므로 id_A는 상수사상 $(r \circ c)|_A$와 변이적이다. 따라서 A도 축약가능이다.

문제 17.1.7. a)⇒(b) 먼저 $f \simeq g$라 하자. 그러면 임의의 $\alpha \in \Lambda$에 대해 $\pi_\alpha \circ f \simeq \pi_\alpha \circ g$이다(성질 17.1.4).

(b)⇒(a) 각각의 $\alpha \in \Lambda$대해 $\pi_\alpha \circ f \simeq \pi_\alpha \circ g \colon X \to Y_\alpha$이므로 변이

$$F_\alpha \colon X \times I \to Y_\alpha \text{ s.t. } F_\alpha(x,0) = \pi_\alpha \circ f(x),\ F_\alpha(x,1) = \pi_\alpha \circ g(x)$$

가 존재한다. 그러면 변이

$$F \colon X \times I \to \Pi_{\alpha\in\Lambda} Y_\alpha, \quad F(x,t) = (F_\alpha(x,t))_{\alpha\in\Lambda}$$

는 $F(x,0) = f(x)$, $F(x,1) = g(x)$이다. 따라서 $f \simeq g$이다.

문제 17.1.9. $\mathbb{R}$이 축약가능이므로 $\mathbb{R} \simeq \{0\}$이다. 따라서 문제 17.1.8에 의해

$$\mathbb{R}^\omega = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \cdots \simeq \{0\} \times \{0\} \times \cdots = \{0\}^\omega = \{\mathbf{0}\}$$

이므로 $\mathbb{R}^\omega$는 축약가능이다.

문제 17.1.11. 위상공간 Y가 축약가능이므로 id_Y는 상수사상 $c \colon Y \to Y$와 변이적이다. 우리는 $c(y) = p$라 하자. 그리고 상수사상 $c_p \colon X \to Y$, $c_p(x) = p$를 생각하자.

(1) 주어진 두 연속사상 $f, g \colon X \to Y$에 대해

$$f = \mathrm{id}_Y \circ f \simeq c \circ f = c_p = c \circ g \simeq \mathrm{id}_Y \circ g = g$$

이다. 따라서 f와 g는 변이적이다.

(2) 주어진 연속사상 $f \colon X \to Y$에 대해 $f = \mathrm{id}_Y \circ f \simeq c \circ f = c_p$이므로 f는 퇴화변이적이다.

문제 17.1.13. (1) 먼저 한 점 $q \in Y$를 고정하자. 그리고 두 상수사상 $c \colon X \to Y$, $c(x) = q$와 $d \colon Y \to Y$, $d(y) = q$를 생각하자. Y가 축약가능이므로 $\mathrm{id}_Y \simeq d$이다. 한편 임의의 $[f] \in [X,Y]$에 대해 $f \colon X \to Y$는 연속사상이고 $f = \mathrm{id}_Y \circ f \simeq d \circ f = c$이므로 $[f] = [c]$이다. 따라서 $[X,Y] = \{[c]\}$이다.

(2) 먼저 두 점 $p \in X$, $q \in Y$를 고정하자. 그리고 다음과 같이 정의된 상수사상

$$d \colon X \to X,\ d(x) = p,$$
$$c_y \colon X \to Y,\ c_y(x) = y$$

를 생각하자. 먼저 X가 축약가능이므로 $\mathrm{id}_X \simeq d$이다. 한편 임의의 $[f] \in [X,Y]$에 대해 $f \colon X \to Y$는 연속사상이고 $f = f \circ \mathrm{id}_X \simeq f \circ d = c_{f(p)}$이다. 이제 $c_{f(p)} \simeq c_q$임을 보이자.

Y가 길연결이므로 길(path)

$$\alpha\colon I \to Y \ \text{s.t.}\ \alpha(0) = f(p),\ \alpha(1) = q$$

가 존재한다. 그러면 변이

$$F\colon X \times I \to Y,\ F(x,t) = \alpha(t)$$

에 대해 $F(x,0) = \alpha(0) = f(p)$, $F(x,1) = \alpha(1) = q$이므로 $c_{f(p)} \simeq c_q$이다. 그러므로 $f \simeq c_q$이고 $[f] = [c_q]$이다. 따라서 $[X,Y] = \{[c_q]\}$이다.

문제 17.1.15. (1) $\varphi \circ k \simeq \mathrm{id}_Y$를 만족하는 연속사상 $k\colon Y \to X$가 존재한다 하자. 그러면 임의의 $[g] \in [Z,Y]$에 대해 $g\colon Z \to Y$는 연속사상이므로 $k \circ g\colon Z \to X$도 연속이다. 그리고 $\varphi \circ k \circ g \simeq \mathrm{id}_Y \circ g = g$이므로 $\varphi_\sharp([k \circ g]) = [\varphi \circ k \circ g] = [g]$인 $[k \circ g] \in [Z,X]$가 존재한다. 따라서 $\varphi_\sharp$은 전사이다.

(2) $k \circ \varphi \simeq \mathrm{id}_X$를 만족하는 연속사상 $k\colon Y \to X$가 존재한다 하자. 이제 $[f], [g] \in [Z,X]$에 대해 $\varphi_\sharp([f]) = \varphi_\sharp([g])$이면 $[\varphi \circ f] = \varphi_\sharp([f]) = \varphi_\sharp([g]) = [\varphi \circ g]$이므로 $\varphi \circ f \simeq \varphi \circ g$이다. 그러므로

$$f = \mathrm{id}_X \circ f \simeq k \circ \varphi \circ f \simeq k \circ \varphi \circ g \simeq \mathrm{id}_X \circ g = g$$

이 되어 $[f] = [g]$이다. 따라서 $\varphi_\sharp$은 단사이다.

(3) φ가 변이동치이므로 변이역 $k\colon Y \to X$가 존재하여 $\varphi \circ k \simeq \mathrm{id}_Y$, $k \circ \varphi \simeq \mathrm{id}_X$를 만족한다. 따라서 (1), (2)에 의해 $\varphi_\sharp$은 전단사이다.

문제 17.1.17. $X \simeq Y$이므로 연속사상 $f\colon X \to Y$, $g\colon Y \to X$와 변이

$$F\colon X \times I \to X \ \text{s.t.}\ F_0 = g \circ f,\ F_1 = \mathrm{id}_X$$
$$H\colon Y \times I \to Y \ \text{s.t.}\ H_0 = f \circ g,\ H_1 = \mathrm{id}_Y$$

가 존재한다.

(1) 기초정리 16.3.9에 의해 두 사상

$$g^\sharp\colon \mathcal{C}(X,Z) \to \mathcal{C}(Y,Z),\ g^\sharp(k) = k \circ g$$
$$f^\sharp\colon \mathcal{C}(Y,Z) \to \mathcal{C}(X,Z),\ f^\sharp(k) = k \circ f$$

은 연속이다. 이제 변이

$$\Phi\colon \mathcal{C}(X,Z) \times I \to \mathcal{C}(X,Z),\ \Phi(k,t) = k \circ F(\cdot,t)$$

를 생각하자. 즉, 모든 $x \in X$에 대해 $[\Phi(k,t)](x) = k \circ F(x,t)$이다. 그러면 $\Phi_0 = f^\sharp \circ g^\sharp$, $\Phi_1 = \mathrm{id}_{\mathcal{C}(X,Z)}$이므로 $f^\sharp \circ g^\sharp \simeq \mathrm{id}_{\mathcal{C}(X,Z)}$이다.

우리는 여기서 Φ가 연속임을 보이자. 먼저

$$\Phi\colon \mathcal{C}(X,Z)\times I \overset{\mathrm{id}\times\hat{F}}{\to} \mathcal{C}(X,Z)\times\mathcal{C}(X,X) \overset{\beta}{\to} \mathcal{C}(X,X)\times\mathcal{C}(X,Z) \overset{T}{\to} \mathcal{C}(X,Z)$$

이다. 기초정리 16.3.14(1)에 의해 $\hat{F}\colon I\to\mathcal{C}(X,X)$, $\hat{F}(t)=F_t=F(\cdot,t)$이 연속이므로

$$\mathrm{id}\times\hat{F}\colon \mathcal{C}(X,Z)\times I\to\mathcal{C}(X,Z)\times\mathcal{C}(X,X),\ \mathrm{id}\times\hat{F}(k,t)=(k,\hat{F}(t))=(k,F_t)$$

도 연속이 다. 그리고

$$\beta\colon \mathcal{C}(X,Z)\times\mathcal{C}(X,X)\to\mathcal{C}(X,X)\times\mathcal{C}(X,Z),\ \beta(h,k)=(k,h)$$

는 연속이다. 한편 X가 국소컴팩트 하우스도르프이므로 정리 16.3.10에 의해 $T(h,k)=k\circ h$도 연속이다. 따라서 합성사상 Φ도 연속이다.

우리는 같은 방법으로 (Y가 국소컴팩트 하우스도르프라는 가정을 사용하여) $g^\sharp\circ f^\sharp\simeq \mathrm{id}_{\mathcal{C}(Y,Z)}$임을 보일 수 있다.

(2) 기초정리 16.3.9에 의해 두 사상

$$\begin{aligned} f_\sharp\colon \mathcal{C}(Z,X)\to\mathcal{C}(Z,Y),\ f_\sharp(k)=f\circ k\\ g_\sharp\colon \mathcal{C}(Z,Y)\to\mathcal{C}(Z,X),\ g_\sharp(k)=g\circ k\end{aligned}$$

은 연속이다. 이제 변이

$$\Psi\colon \mathcal{C}(Z,X)\times I\to\mathcal{C}(Z,X),\ \Psi(k,t)(z)=F(k(z),t)$$

를 생각하자. 그러면 $\Psi_0=g_\sharp\circ f_\sharp$, $\Psi_1=\mathrm{id}_{\mathcal{C}(Z,X)}$이므로 $g_\sharp\circ f_\sharp\simeq\mathrm{id}_{\mathcal{C}(Z,X)}$이다.

여기서 Ψ가 연속임을 보이자. 먼저 Z가 국소컴팩트 하우스도르프이므로 정리 16.3.12에 의해 $e\colon Z\times\mathcal{C}(Z,X)\to X$, $e(z,k)=k(z)$는 연속이므로

$$e\times\mathrm{id}\colon Z\times\mathcal{C}(Z,X)\times I\to X\times I,\ (e\times\mathrm{id})(z,k,t)=(k(z),t)$$

도 연속이다. 그래서

$$\alpha=F\circ(e\times\mathrm{id})\colon Z\times\mathcal{C}(Z,X)\times I\to X\times I\to X$$

는 연속이다. 한편 Z가 국소컴팩트 하우스도르프이므로, 정리 16.3.14(2)에 의해, $\hat{\alpha}\colon \mathcal{C}(Z,X)\times I\to\mathcal{C}(Z,X)$는 연속이다. 그리고 $\Psi=\hat{\alpha}$이므로 Ψ는 연속이다.

우리는 같은 방법으로 $f_\sharp\circ g_\sharp\simeq\mathrm{id}_{\mathcal{C}(Z,Y)}$임을 보일 수 있다.

17.2 기본군(fundamental group)

문제 17.2.1. $*$의 정의에 의해 자명하다.

문제 17.2.3. 임의의 $[\sigma] \in \pi_1(X, x_0)$에 대해

$$\begin{aligned}\hat{\gamma}([\sigma]) &= [\bar{\gamma}] * [\sigma] * [\gamma] = [\overline{\alpha * \beta}] * [\sigma] * [\alpha * \beta] \\ &= [\bar{\beta} * \bar{\alpha}] * [\sigma] * [\alpha * \beta] = [\bar{\beta}] * [\bar{\alpha}] * [\sigma] * [\alpha] * [\beta] \\ &= [\bar{\beta}] * \hat{\alpha}([\sigma]) * [\beta] = \hat{\beta}(\hat{\alpha}([\sigma])) \\ &= (\hat{\beta} \circ \hat{\alpha})([\sigma])\end{aligned}$$

이므로 $\hat{\gamma} = \hat{\beta} \circ \hat{\alpha}$이다.

문제 17.2.5. (1) $A \subset \mathbb{R}^n$를 볼록집합이라 하자. 그리고 임의의 한 점 $a_0 \in A$를 택하자. 그러면 A가 볼록집합이므로 모든 점 $a \in A$에 대해 $\overline{a_0 a} \subset A$이다. 따라서 A는 별 볼록이다.

(2) $\mathbb{R}^2$의 부분집합 $X = I^2 \cup (\mathbb{R} \times \{0\})$은 원점 $(0,0)$에 대하여 별 볼록이지만, 볼록집합은 아니다.

(3) A가 점 $a_0 \in A$에 대하여 별 볼록이라 하자. 그러면 모든 $x \in A$에 대하여 $\overline{a_0 x} = \{(1-t)x + ta_0 \mid t \in I\} \subset A$이다. 그래서 변이

$$H\colon A \times I \to A,\ H(x,t) = (1-t)x + ta_0$$

에 의해 A는 축약가능(contractible)이다. 따라서 따름정리 17.1.13과 17.2.18에 의해 A는 단순연결이다.

문제 17.2.7. 임의의 $[\sigma] \in \pi_1(X, x_0)$에 대해 $(h_1)_\sharp \circ \hat{\alpha}([\sigma]) = \hat{\beta} \circ (h_0)_\sharp([\sigma])$를 보이면 된다. 주어진 $[\sigma] \in \pi_1(X, x_0)$에 대해

$$\begin{aligned}(h_1)_\sharp \circ \hat{\alpha}([\sigma]) &= (h_1)_\sharp([\bar{\alpha}] * [\sigma] * [\alpha]) = (h_1)_\sharp([\bar{\alpha} * \sigma * \alpha]) \\ &= [h \circ (\bar{\alpha} * \sigma * \alpha)] = [h \circ \bar{\alpha} * h \circ \sigma * h \circ \alpha] \\ &= [h \circ \bar{\alpha}] * [h \circ \sigma] * [h \circ \alpha]\end{aligned}$$

이다. 한편

$$\hat{\beta} \circ (h_0)_\sharp([\sigma]) = \hat{\beta}([h \circ \sigma]) = [\overline{h \circ \alpha}] * [h \circ \sigma] * [h \circ \alpha]$$

이므로 우리는 $[\overline{h \circ \alpha}] = [h \circ \bar{\alpha}]$만 보이면 된다. 그런데

$$\overline{h \circ \alpha}(t) = (h \circ \alpha)(1-t) = h(\alpha(1-t)) = h(\bar{\alpha}(t)) = h \circ \bar{\alpha}(t)$$

이므로 $\overline{h \circ \alpha} = h \circ \bar{\alpha}$이 되어 $[\overline{h \circ \alpha}] = [h \circ \bar{\alpha}]$이다.

문제 17.2.9. 문제 17.1.12(1)에 의해 CX는 축약가능이다. 따라서 따름정리 17.1.13과 17.2.18에 의해 CX는 단순연결이다.

17.3 수축과 변형수축

문제 17.3.1. (1) S^1 (2) ∞ (3) S^1 (4) ∞ (5) ∞ (6) S^1 (7) S^1 (8) $\{p\}$ (9) S^1 (10) $\{p\}$

문제 17.3.3. (1) A가 B의 수축이고 B가 X의 수축이므로 수축사상

$$r\colon X \to B, \quad s\colon B \to A$$

가 존재하여 합성사상 $s \circ r\colon X \to A$이 수축사상이다. 따라서 A는 X의 수축이다.

(2) 먼저 A가 B의 변형수축이므로 수축사상 $r\colon X \to B$과 변이

$$F\colon X \times I \to X \quad \text{s.t.} \quad \begin{array}{ll} F(x,0) = x & \forall x \in X, \\ F(x,1) = r(x) & \forall x \in X, \\ F(b,1) = b & \forall b \in B \end{array}$$

가 존재한다. 그리고 B가 X의 변형수축이므로 수축사상 $s\colon B \to A$와 변이

$$G\colon B \times I \to B \quad \text{s.t.} \quad \begin{array}{ll} G(x,0) = x & \forall x \in B, \\ G(x,1) = s(x) & \forall x \in B, \\ G(a,1) = a & \forall a \in A \end{array}$$

가 존재한다. 따라서 $s \circ r\colon X \to A$는 수축사상이고 변이

$$H\colon X \times I \to X, \quad H(x,t) = \begin{cases} F(x,2t), & 0 \le t \le \frac{1}{2} \\ G(r(x),2t-1), & \frac{1}{2} \le t \le 1 \end{cases}$$

는 $F(x,1) = r(x) = G(r(x),0)$이므로 붙임보조정리(pasting lemma)에 의해 연속이다. 그리고

$$\begin{array}{ll} H(x,0) = x & \forall x \in X, \\ H(x,1) = s(r(x)) & \forall x \in X, \\ H(a,1) = s(r(a)) = a & \forall a \in A \end{array}$$

이므로 변이 H에 의해 A는 X의 변형수축이다.

문제 17.3.5. (귀류법) 만약 $\{0,1\}$이 $I = [0,1]$의 수축이라 가정하면 수축사상 $r\colon I \to \{0,1\}$이 존재한다. 그리고 r이 전사인 연속사상이고 I가 연결이므로 $r(I) = \{0,1\}$도 연결

이어야 한다. 이는 $\{0,1\}$이 비연결이라는 사실에 모순이다. 따라서 $\{0,1\}$은 I의 수축이 아니다.

문제 17.3.7. (1) f가 수축이면 정의에 의해 A는 X의 변형수축이다. 따라서 정리 17.3.3(2)에 의해 $i_\sharp$은 군 동형사상이다.

(2) 먼저 한 점 $x_0 \in X$를 택하고 $a_0 = f(x_0)$이라 하자. 그리고 변이 H에 의해 $i \circ f \simeq \mathrm{id}_X$이므로 기초정리 17.2.14에 의해

$$\hat{\omega} \circ (i_\sharp \circ f_\sharp) = (\mathrm{id}_X)_\sharp = \mathrm{id}_{\pi_1(X,x_0)}$$

을 만족하는 a_0에서 x_0까지의 길 $\omega\colon I \to X$가 존재한다. 그리고 $\hat{\omega}$가 군 동형사상이므로 $i_\sharp \circ f_\sharp = (\hat{\omega})^{-1} \circ \mathrm{id}_{\pi_1(X,x_0)}$이다. 따라서 $i_\sharp \circ f_\sharp$이 군 동형사상이므로 $i_\sharp \circ f_\sharp$는 전사이다. 따라서 $i_\sharp$도 전사가 되어야 한다.

한편 변이 $K = H|_{A\times I}\colon A \times I \to A$, $K(a,t) = H(a,t)$에 의해 $f \circ i \simeq \mathrm{id}_A$이므로 위와 같은 방법으로 $f_\sharp \circ i_\sharp$이 군 동형사상임을 알 수있다. 따라서 $i_\sharp$은 단사이다.

그러므로 $i_\sharp$은 군 동형사상이다.

(3) 유클리드공간 $\mathbb{R}^2$와 점 $x_0 = (1,0) \in \mathbb{R}^2$를 생각하자. 이제 포함사상 $i\colon \mathbb{R}^2 - \{\mathbf{0}\} \hookrightarrow \mathbb{R}^2$이 유도하는 군 준동형사상 $i_\sharp\colon \pi_1(\mathbb{R}^2 - \{\mathbf{0}\}, x_0) \to \pi_1(\mathbb{R}^2, x_0)$를 생각하자. 그러면 $\pi_1(\mathbb{R}^2 - \{\mathbf{0}\}, x_0) \neq 0$이고 $\pi_1(\mathbb{R}^2, x_0) = 0$이므로 $i_\sharp$은 전사가 될 수 없다. 따라서 $i_\sharp$은 군 동형사상이 아니다.

문제 17.3.9. 먼저 $CX = X \times I / X \times \{1\}$임을 상기하자. 그리고 고유사상(상사상) $\pi\colon X \times I \to CX$, $\pi(x,s) = [x,s]$에 대해 $p = \pi(X \times \{1\}) = [x,1]$이라 하자.

이제 CX가 $\{p\}$로 변형수축됨을 보이자. 이를 위해 상수사상

$$r\colon CX \to \{p\}, \quad r([x,s]) = p$$

과 포함사상 $i\colon \{p\} \hookrightarrow CX$를 생각하자. 먼저 자명하게 $r \circ i = \mathrm{id}_{\{p\}}$이다.

한편 연속사상 $F\colon (X \times I) \times I \to X \times I$, $F((x,s),t) = (x,(1-t)s+t)$는 연속사상 $H\colon CX \times I \to CX$, $H([x,s],t) = [x,(1-t)s+t]$를 유도한다.

$$\begin{tikzcd}
(X \times I) \times I \arrow[r, "F"] \arrow[d, "\pi \times \mathrm{id}_I"'] & X \times I \arrow[d, "\pi"] \\
CX \times I \arrow[r, "H"'] & CX
\end{tikzcd}$$

그리고

$$\begin{aligned}
&H([x,s],0) = [x,s], \\
&H([x,s],1) = [x,1] = p, \\
&H(p,1) = H([x,1],1) = [x,1] = p
\end{aligned}$$

이므로 H는 변형수축사상이고 $\mathrm{id}_{CX} \simeq_H i \circ r$이다. 따라서 CX는 $\{p\}$로 변형수축된다.

문제 17.3.11. (1) 먼저 $C = (I \times \{0\}) \cup (\{0\} \times I) \cup (\cup_{n=1}^{\infty} \{\frac{1}{n}\} \times I) \subset \mathbb{R}^2$ 임을 상기하자. 그리고 $B = I \times \{0\} \subset C$이라 하자. 그러면 C는 B로 강변형수축 되고, B는 $\{(0,0)\}$으로 강변형수축되므로 C는 $\{(0,0)\}$로 강변형수축된다. 구체적으로 변이

$$F\colon C \times I \to C, \quad F((x,y),t) = \begin{cases} (x,(1-2t)y), & 0 \le t \le \frac{1}{2} \\ ((2-2t)x, 0), & \frac{1}{2} \le t \le 1 \end{cases}$$

가 존재한다.

(참고) 사영사상 $p\colon C \to C$, $p(x,y) = (x,0)$를 생각하면 $\frac{1}{2} \le t \le 1$에 대해 $F((x,y),t) = (2-2t)p(x,y)$임을 유의하자.

(2) (i) 상수사상 $c\colon C \to C$, $c(x,y) = (0,1)$를 생각하자. 그런데 빗공간 C가 축약가능(contractible)이므로 $\mathrm{id}_C \simeq c$이다. 따라서 변이

$$\begin{aligned} F\colon C \times I \to C \quad \text{s.t.} \quad & F((x,y),0) = (x,y) \quad \forall (x,y) \in C, \\ & F((x,y),1) = (0,1) \quad \forall (x,y) \in C \end{aligned}$$

가 존재한다. 그리고 변이 F에 의해 C는 $\{(0,1)\}$로 변형수축된다.

(ii) 그러나

$$\begin{aligned} & H((x,y),0) = (x,y) \quad \forall (x,y) \in C, \\ & H((x,y),1) = (0,1) \quad \forall (x,y) \in C, \\ & H((0,1),t) = (0,1) \quad \forall t \in I \end{aligned}$$

를 만족하는 변이 $H\colon C \times I \to C$가 존재하지 않으므로 C는 $\{(0,1)\}$로 강변형수축은 되지 않는다.

17.4 덮개공간(covering space)

문제 17.4.1. 먼저 p가 전사이고 연속임은 자명하다.

이제 임의의 점 $x \in X$를 고정하고, x의 임의의 열린근방 U를 택하자. (특별히 U를 X로 택하여도 된다.) 이제 U가 p에 의해 고르게 덮임을 보이자. Y가 이산공간이므로 $\{y\}$는 Y의 열린집합이다. 그러므로 $U \times \{y\}$도 곱공간 $X \times Y$의 열린집합이다. 그리고 $\{U \times \{y\} \mid y \in Y\}$는 $X \times Y$의 서로소인 열린집합들의 모임이고 $p^{-1}(U) = \cup_{y \in Y} U \times \{y\}$이 된다. 그리고 각각의 $y \in Y$에 대하여 축소사상 $p|\colon U \times \{y\} \to U$는 위상동형사상이다. 따라서 p는 덮개사상이다.

문제 17.4.3. 먼저 기준점이 없으므로 주어진 길들의 올림이 여러 개 존재할 수 있음을 주의하자.

모든 $(m,n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$에 대하여 $\tilde{\alpha}_{m,n}(t) = (m+t, \frac{n}{2}+2t)$가 $\alpha(t)$의 올림이다.

문제 17.4.5. 먼저 p가 전사이고 연속인것은 자명하다. 그리고 p는 점 $z = e^{i\theta}$를 점 $z^n = e^{in\theta}$으로 보낸다. 이제 주어진 점 $b \in S^1$의 열린근방 U를 다음과 같이 택하자.

(i) $b = 1$인 경우: $U = S^1 - \{-1\}$로 택하자. 그리고 $k = 1, \ldots, n$에 대해

$$V_k = \{e^{i\theta} \mid \frac{2(k-1)\pi}{n} - \frac{\pi}{n} < \theta < \frac{2(k-1)\pi}{n} + \frac{\pi}{n}\}$$

이라 하자.

(ii) $b \neq 1$인 경우: $U = S^1 - \{1\}$로 택하자. 그리고 $k = 1, \ldots, n$에 대해

$$V_k = \{e^{i\theta} \mid \frac{2(k-1)\pi}{n} < \theta < \frac{2k\pi}{n}\}$$

이라 하자.

그러면 어느 경우든 $V_i \cap V_j = \varnothing (i \neq j)$, $p^{-1}(U) = V_1 \cup \cdots \cup V_n$이고 $p|: V_i \to U$는 위상동형사상이다. 따라서 b의 열린근방 U는 p에 의해 고르게 덮인다. 그러므로 p는 덮개사상이다.

문제 17.4.7. (1) B를 Hausdorff라 하자. 주어진 서로 다른 두점 $e_1, e_2 \in E$에 대하여 $b_1 = p(e_1)$와 $b_2 = p(e_2)$라 하자.

(i) 먼저 $b_1 \neq b_2$인 경우, B가 Hausdorff이므로

$$b_1 \in U_1,\ b_2 \in U_2,\ U_1 \cap U_2 = \varnothing$$

인 B의 열린집합 U_1, U_2가 존재한다. 그러면 $V_1 = p^{-1}(U_1)$과 $V_2 = p^{-1}(U_2)$이 우리가 원하는 e_1과 e_2를 분리하는 서로소인 열린집합들이다.

(ii) $b_1 = b_2$인 경우, p에 의해 고르게 덮이는 b_1의 열린근방 $U \subset B$를 택하자. 그러면 $p^{-1}(U) = \cup_{\alpha\in\Lambda} V_\alpha$를 만족하는 서로소인 열린집합 V_α들이 존재한다. 그리고 $e_1, e_2 \in p^{-1}(b_1)$이므로 각각의 $i = 1, 2$에 대해 $e_i \in V_{\alpha_i}$인 유일한 $\alpha_i \in \Lambda$가 존재한다. 그런데 $e_1 \neq e_2$이므로 $V_{\alpha_1} \cap V_{\alpha_2} = \varnothing$이다.

따라서 (i), (ii)에 의해 E는 Hausdorff이다.

(2) 이제 B를 정칙이라 하자.

먼저 E가 T_1임을 보이자. 주어진 한 점 $e \in E$에 대해 $b = p(e) \in B$이라 하자. 그러면 B가 T_1이므로 한 점 집합 $\{b\}$는 B의 닫힌집합이다. 그리고 부분공간 $p^{-1}(b)$는 이산공간이고 $e \in p^{-1}(b)$이므로 한 점 집합 $\{e\}$는 $p^{-1}(b)$의 닫힌집합이다. 그리고 p가 연속이므로 $p^{-1}(b)$는 E의 닫힌집합이다. 따라서 $\{e\}$는 E의 닫힌집합이다. 그러므로 E는 T_1이다.

이제 E가 조건 (R)을 만족함을 보이자. 이를 위해 점 $e \in E$와 e의 열린근방 W가 주어졌다고 하자. 우리는 $e \in O \subset \overline{O} \subset W$인 E의 열린집합 O가 존재함을 보이면 충분하다. $b = p(e)$이라 하자. 그리고 U를 p에 의해 고르게 덮이는 b의 열린근방이라 하자. 그러면 $p^{-1}(U) = \cup_{\alpha\in\Lambda} V_\alpha$를 만족하는 서로소인 열린집합 V_α들이 존재하고, $p|_{V_\alpha} : V_\alpha \to U$는 위상동형사상이다. 또한 $e \in V_{\alpha_0}$인 $\alpha_0 \in \Lambda$가 유일하게 존재한다. 그러면 $V = V_{\alpha_0} \cap W$은 e의 열린근방이다. 한편 p가 열린사상이므로 $p(V)$는 b의 열린근방이고 $p|_V : V \to p(V)$는 위상동형사상이다. 가정에 의해 B가 조건 (R)을 만족하므로 $b \in G \subset \overline{G} \subset p(V)$를 만족하는 b의 열린근방 G가 존재한다. 이제 $O = p^{-1}(G) \cap V = (p|_V)^{-1}(G)$이라 하면 $p|_V$가 위상동형사상이므로 $e \in O \subset \overline{O} \subset V \subset W$를 만족한다.

따라서 E는 정칙이다.

(3) B를 국소컴팩트 Hausdorff라 하자. 그러면 (1)에 의해 E는 Hausdorff이다. 따라서 우리는 E가 국소컴팩임을 보이면 된다. 그리고 E가 Hausdorff이므로 임의로 주어진 점 $e \in E$에 대하여 폐포 $\overline{O}$가 컴팩트인 e의 열린근방 O가 존재함을 보이면 된다(기초정리 9.4.3). 이를 위해 점 $e \in E$가 주어졌다고 하자. 그리고 $b = p(e)$이라 하고 U를 p에 의해 고르게 덮이는 b의 열린근방이라 하자. 그러면 $p^{-1}(U) = \cup_{\alpha\in\Lambda} V_\alpha$를 만족하는 서로소인 열린집합 V_α들이 존재한다. 그리고 $e \in V_{\alpha_0}$인 $\alpha_0 \in \Lambda$가 유일하게 존재한다. 또한 $p|_{V_{\alpha_0}} : V_{\alpha_0} \to U$는 위상동형사상이다. 한편 B가 국소컴팩트 Hausdorff이므로 $b \in G \subset \overline{G} \subset U$이고 폐포 $\overline{G}$가 컴팩트인 b의 열린근방 G가 존재한다(기초정리 9.4.22). 그러면 $p|_{V_{\alpha_0}}$가 위상동형사상이므로 $O = (p|_{V_{\alpha_0}})^{-1}(G) = p^{-1}(G) \cap V_{\alpha_0}$가 우리가 원하는 e의 열린근방이다.

문제 17.4.9. (1) W를 E의 열린집합이라 하자. 그리고 $U = \pi(W)$이라 하자. 이제 임의의 점 $[(a,b)] \in U$를 고정하자. 우리는 $(a,b) \in W$이라 할수 있다. W가 E의 열린집합이므로

$$(a,b) \in V = (a-r, a+r) \times (b-s, b+s) \subset W$$

을 만족하는 충분히 작은 양의 실수 $r, s > 0$가 존재한다. 단, 여기서 $(0,0) \notin V$이다. 그리고 $O = \pi(V)$라 하자. 그러면 $[(a,b)] \in O \subset U$이다. 이제 각각의 정수 $n \in \mathbb{Z}$에 대해 E의 열린집합

$$V_n = (\frac{1}{2^n}(a-r), \frac{1}{2^n}(a+r)) \times (2^n(b-s), 2^n(b+s))$$

을 생각하자. 그러면 $\pi^{-1}(O) = \cup_{n\in\mathbb{Z}} V_n$이 E의 열린집합이므로 상위상의 정의에 의해 O는 B의 열린집합이다. 그러므로 $[(a,b)]$는 U의 내부점이다. 따라서 $U = \pi(W)$는 B의 열린집합이다. 그러므로 π는 열린사상이다.

(2) 자명하게 π가 상사상이므로 전사이고 연속이다.

임의의 점 $[(a,b)] \in B$을 고정하자.

(i) $a > 0$인 경우: 먼저 E의 열린부분집합

$$V_0 = (\frac{3}{4}a, \frac{5}{4}a) \times \mathbb{R} = \{(x,y) \mid \frac{3}{4}a < x < \frac{5}{4}a,\ y \in \mathbb{R}\}$$

을 택하자. 그리고 각각의 정수 $n \in \mathbb{Z}$에 대해 $V_n = (\frac{1}{2^n}\frac{3}{4}a, \frac{1}{2^n}\frac{5}{4}a) \times \mathbb{R}$이라 하면 V_n은 E의 열린집합이다. 더구나 $n \neq m$이면 $V_n \cap V_m = \varnothing$이다. 이제 $U = \pi(V_0)$이라 하면 $[(a,b)] \in U$이다. 그리고 $\pi^{-1}(U) = \cup_{n\in\mathbb{N}} V_n$이 열린집합이므로 U는 B의 열린집합이다.

이제 각각의 정수 $n \in \mathbb{Z}$에 대해 축소사상 $\pi|_{V_n} : V_n \to U$이 위상동형사상임을 보이자. 편의상 $\pi_n = \pi|_{V_n}$이라 하자. 주어진 정수 n에 대하여 $f_n\colon V_0 \to V_n$, $f_n(x,y) = (\frac{1}{2^n}x, 2^n y)$은 위상동형사상이다. 구체적으로 $f_n^{-1}(x,y) = (2^n x, \frac{1}{2^n}y)$이다. 그리고 $\pi_n \circ f_n = \pi_0$이므로 우리는 $\pi_0\colon V_0 \to U$이 위상동형사상임을 보이면 충분하다. 왜냐하면 π_0이 위상동형사상이면 f_n^{-1}도 위상동형사상이므로 $\pi_n = \pi_0 \circ f_n^{-1}$도 위상동형사상이 된다. 이제 π_0이 위상동형사상임을 보이자. 먼저 $\pi_0(V_0) = U$이므로 π_0은 전사이다. 또한 V_0의 어떠한 서로 다른 두 점도 동치관계가 아니므로 π_0은 단사이다. 그리고 (1)에 의해 π가 열린사상이고 V_0가 E의 열린집합이므로 축소사상 π_0도 열린사상이다. 그래서 π_0은 전단사이고 연속인 열린사상이므로 위상동형사상이다(성질 5.2.12).

따라서 U가 우리가 원하는 p에 의해 고르게 덮이는 $[(a,b)]$의 열린근방이다.

(ii) $a < 0$인 경우: $V_0 = (\frac{5}{4}a, \frac{3}{4}a) \times \mathbb{R}$, $U = \pi(V_0)$, $V_n = (\frac{1}{2^n}\frac{5}{4}a, \frac{1}{2^n}\frac{3}{4}a) \times \mathbb{R}$ $(n \in \mathbb{Z})$로 택하면 (i)과 같은 방법으로 U가 p에 의해 고르게 덮이는 $[(a,b)]$의 열린근방임을 보일 수 있다.

(iii) $b > 0$인 경우: $V_0 = \mathbb{R} \times (\frac{3}{4}b, \frac{5}{4}b)$, $U = \pi(V_0)$, $V_n = \mathbb{R} \times (2^n\frac{3}{4}b, 2^n\frac{5}{4}b)$ $(n \in \mathbb{Z})$로 택하면 된다.

(iv) $b < 0$인 경우: $V_0 = \mathbb{R} \times (\frac{5}{4}b, \frac{3}{4}b)$, $U = \pi(V_0)$, $V_n = \mathbb{R} \times (2^n\frac{5}{4}b, 2^n\frac{3}{4}b)$ $(n \in \mathbb{Z})$로 택하면 된다.

(3) B상의 두 점 $[(1,0)]$, $[(1,0)]$을 분리하는 서로소인 열린집합이 존재하지 않는다. 보다 구체적으로 U와 V를 각각 $[(1,0)]$와 $[(1,0)]$의 열린근방이라 하자. 그러면 $\pi^{-1}(U)$와 $\pi^{-1}(V)$는 각각 $(1,0)$과 $(0,1)$의 열린근방이다. 그러므로 $(1,0) \in (a_1,a_2)\times(b_1,b_2) \subset \pi^{-1}(U)$, $(0,1) \in (c_1,c_2) \times (d_1,d_2) \subset \pi^{-1}(V)$를 만족하는 실수 $0 < a_1 < 1 < a_2$, $b_1 < 0 < b_2$, $c_1 < 0 < c_2$, $0 < d_1 < 1 < d_2$가 존재한다. 이제

$$\frac{1}{2^n}a_1 < c_2, \quad 2^n b_2 > d_1$$

을 만족하는 충분히 큰 자연수 n을 택하자. 그리고 $W = (\frac{1}{2^n}a_1, \frac{1}{2^n}a_2) \times (2^n b_1, 2^n b_2)$이라 하자. 그러면 $W \cap [(c_1,c_2) \times (d_1,d_2)] \neq \varnothing$이므로 $W \cap \pi^{-1}(V) \neq \varnothing$이다. 그래서 점 $(p,q) \in W \cap \pi^{-1}(V)$가 존재한다. 그리고 $(p,q) \sim (2^n p, \frac{1}{2^n}q)$이고 $(2^n p, \frac{1}{2^n}q) \in \pi^{-1}(U)$이다. 따라서 $\pi((p,q)) = [(p,q)] \in U \cap V$이므로 $U \cap V \neq \varnothing$이다. 그러므로 B는 하우스도르프가 아니다.

문제 17.4.11. Z를 가부번개의 S^1들의 곱공간이라 하자. 즉, $Z = S^1 \times S^1 \times S^1 \times \cdots$이다. 먼저 곱공간 $Y = Z \times \mathbb{N}$을 생각하자. 단, 여기서 $\mathbb{N}$은 이산공간이다. 그러면 $r\colon Y = Z \times \mathbb{N} \to Z$, $r(z,n) = z$는 덮개사상이다(보기 17.4.3, 문제 17.4.1).

이제 각각의 자연수 $n \in \mathbb{N}$에 대하여 곱공간

$$\begin{aligned} X_n &= \mathbb{R}^n \times S^1 \times S^1 \times S^1 \times \cdots \\ &= \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R} \times S^1 \times \ S^1 \times S^1 \times \cdots \end{aligned}$$

을 생각하자. 그러면 덮개사상

$$q_n \colon X_n \to Z, \ \ q_n(t_1, \ldots, t_n, x_1, x_2, x_3, \ldots) = (e^{i2\pi t_1}, \ldots, e^{i2\pi t_n}, x_1, x_2, x_3, \ldots)$$

이 존재한다. 그리고 X_n들의 떨어진 합집합 $\amalg_{n\in\mathbb{N}} X_n = \cup_{n\in N} X_n \times \{n\}$을 생각하자. 그러면 $q = \amalg q_n \colon \ \amalg_{n\in\mathbb{N}} X_n \to Y$, $q(x,n) = (q_n(x), n)$은 덮개사상이다. 그러나 합성함수 $r \circ q \colon \ \amalg_{n\in\mathbb{N}} X_n \to Z$는 덮개사상이 아니다.

문제 17.4.13. 먼저 $b_0 \in B$을 f에 의한 고정점이라 하자. 그러면 $f \colon (B, b_0) \to (B, b_0)$이다. 그리고 임의의 한 점 $e_0 \in p^{-1}(b_0)$를 택하자. 이제 우리는 연속사상

$$f \circ p \colon \ (E, e_0) \to (B, b_0) \to (B, b_0)$$

을 생각하자. 가정에 의해 E가 단순연결이고 국소길연결이므로 따름정리 17.4.27에 의해 $f \circ p$의 유일한 올림 $\tilde{f} \colon (E, e_0) \to (E, e_0)$이 존재하여 $p \circ \tilde{f} = f \circ p$을 만족한다. 특별히 e_0은 $\tilde{f}$의 고정점이다.

17.5 S^1의 기본군 계산과 그 응용

문제 17.5.1. 연속사상 $f \colon A \to A$가 주어졌다고 하자. A가 D^2의 수축이므로 $A \subset D^2$이고 수축사상 $r \colon D^2 \to A$이 존재하여 $r \circ i = \mathrm{id}_A$를 만족한다. 단, 여기서 $i \colon A \hookrightarrow D^2$는 포함사상이다. 그리고 합성사상

$$i \circ f \circ r \colon D^2 \to A \to A \hookrightarrow D^2$$

이 연속이므로 Brouwer 고정점 정리(따름정리 17.5.5)에 의해 $i \circ f \circ r(p) = p$인 고정점 $p \in D^2$가 존재한다. 그런데 $i \circ f \circ r(p) \in A$이므로 $p \in A$이고 $i \circ f \circ r(p) = i(f(r(p))) = i(f(p)) = f(p)$이다. 따라서 $f(p) = p$이다. 그러므로 f는 고정점 p를 갖는다.

문제 17.5.3. (1) (귀류법) 모든 점 $x \in S^n$에 대해 $g(-x) = -g(x)$를 만족하는 연속사상 $g \colon S^n \to S^1$가 존재한다고 가정하자. 우리는 넣기사상

$$i \colon S^2 \to S^n, \ \ i(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2, x_3, 0, 0, \ldots, 0)$$

를 생각하자. 그러면 합성사상 $h = g \circ i \colon S^2 \to S^1$은 연속이고, 모든 $y \in S^2$에 대해 $h(-y) = -h(y)$를 만족한다. 이는 정리 17.5.10에 모순이다.

(2) (귀류법) 모든 점 $x \in D^n$에 대해 $g(-x) = -g(x)$를 만족하는 연속사상 $g\colon D^n \to S^1$가 존재한다고 가정하자. 우리는 넣기사상

$$i\colon D^2 \to D^n, \quad i(x_1, x_2) = (x_1, x_2, 0, 0, \dots, 0)$$

를 생각하자. 그러면 합성사상 $h = g \circ i\colon D^2 \to S^1$은 연속이고, 모든 $y \in D^2$에 대해 $h(-y) = -h(y)$를 만족한다. 이는 정리 17.5.10에 모순이다.

문제 17.5.5. 우리는 $b_0 = 1 \in S^1$이라 하자. 먼저 덮개사상 $p\colon \mathbb{R} \to S^1$, $p(t) = e^{i2\pi t}$에 대해 $p^{-1}(b_0) = \mathbb{Z}$임을 상기하자. 그리고

$$\phi\colon \pi_1(S^1, b_0) \to (\mathbb{Z}, +), \quad \phi([\alpha]) = \tilde{\alpha}(1)$$

이 군 동형사사상임을 상기하자. 단, 여기서 $\tilde{\alpha}$는 시점이 0인 α의 유일한 올림임을 상기하자. 또한 $\alpha_1(s) = e^{i2\pi s}$이라하면 $\tilde{\alpha}_1(s) = s$이므로 $\phi([\alpha_1]) = \tilde{\alpha}_1(1) = 1$이다. 따라서 $\pi_1(S^1, b_0) =< [\alpha_1] >$(즉, $[\alpha_1]$은 군 $\pi_1(S^1, b_0)$의 생성자)이고, 모든 정수 n에 대해 $\phi([\alpha_1]^n) = n$이다.

(i) 주어진 연속사상 $g\colon S^1 \to S^1$, $g(z) = z^n$에 대해 $g(b_0) = b_0$이다. 그리고

$$g_\sharp\colon \pi_1(S^1, b_0) \to (S^1, b_0), \quad g_\sharp([\alpha]) = [g \circ \alpha]$$

이다. 우리는 $\pi_1(S^1, b_0)$의 생성자 $[\alpha_1]$에 대한 상 $g_\sharp([\alpha_1])$만 알면된다. 그런데 $g \circ \alpha_1(s) = e^{i2\pi ns}$이므로 이의 시점이 0인 유일한 올림은 $\widetilde{g \circ \alpha_1}(s) = ns$이다. 그리고 $\widetilde{g \circ \alpha_1}(1) = n$이므로 $g_\sharp([\alpha_1]) = \phi^{-1}(n) = [\alpha_1]^n$이다. 따라서 $g_\sharp\colon (\mathbb{Z}, +) \to (\mathbb{Z}, +)$로 보면 $g_\sharp(k) = nk$이다.

(ii) 주어진 연속사상 $h\colon S^1 \to S^1$, $h(z) = 1/z^n$에 대해 $h(b_0) = b_0$이다. 여기서 우리는 $h(z) = 1/z^n = z^{-n}$임을 유의하자. 이제 $\pi_1(S^1, b_0)$의 생성자 $[\alpha_1]$에 대한 상 $h_\sharp([\alpha_1])$을 알아 보자. 그런데 $h \circ \alpha_1(s) = e^{i2\pi(-n)s}$이므로 이의 시점이 0인 유일한 올림은 $\widetilde{h \circ \alpha_1}(s) = (-n)s$이다. 그리고 $\widetilde{h \circ \alpha_1}(1) = -n$이므로 $h_\sharp([\alpha_1]) = \phi^{-1}(-n) = [\alpha_1]^{-n}$이다. 따라서 $h_\sharp\colon (\mathbb{Z}, +) \to (\mathbb{Z}, +)$로 보면 $h_\sharp(k) = (-n)k$이다.

문제 17.5.7. (1) f가 퇴화변이적이므로 f의 확장 $g\colon D^2 \to S^1$가 존재한다(정리 17.1.15). 그러면 포함사상 $i\colon S^1 \hookrightarrow D^2$에 대하여 합성사상 $i \circ g\colon D^2 \to D^2$는 연속이므로 Brouwer 고정점 정리(따름정리 17.5.5)에 의해 $i \circ g(p) = p$인 고정점 $p \in D^2$가 존재한다. 그런데 $i \circ g(p) = g(p)$이고 $g(p) \in S^1$이므로 $p = g(p) \in S^1$이다. 그리고 $p \in S^1$이고 g가 f의 확장이므로 $g(p) = f(p)$이다. 따라서 $f(p) = p$가 되어 f는 고정점 p를 갖는다.

(2) 연속사상 $h\colon S^1 \to S^1$, $h(x) = -x$를 생각하자. 그러면 f가 퇴화변이적이므로 합성사상 $h \circ f\colon S^1 \to S^1$도 퇴화변이적이다. 따라서 (1)에 의해 $h \circ f(q) = q$인 고정점 $q \in S^1$이 존재한다. 그리고

$$q = h \circ f(q) = h(f(q)) = -f(q)$$

이므로 $f(q) = -q$이다.

문제 17.5.9. 만약 U_1과 U_2 중 하나라도 공집합인 경우는 주어진 문제가 더욱 쉬어지므로 우리는 U_1과 U_2가 모두 공집합이 아닌 경우만 보이자.

임의의 점 $\mathbf{x} \in S^1$에 대하여 원점 $\mathbf{0}$와 $\mathbf{x}$를 지나는 평면 $\mathbb{R}^2$상의 직선을 $L_{\mathbf{x}}$라 하자. 즉, $L_{\mathbf{x}} = \overleftrightarrow{\mathbf{0x}} = \{t\mathbf{x} \mid t \in \mathbb{R}\}$이다.

먼저 (하나의) U_i를 고정하자. 그리고 각각의 실수 t에 대해 점 $t\mathbf{x}$에서 직선 $L_{\mathbf{x}}$와 수직인 직선을 $L_{\mathbf{x}}^{\perp}(t)$라 하자. 즉,

$$L_{\mathbf{x}}^{\perp}(t) = \{\mathbf{z} \in \mathbb{R}^2 \mid (\mathbf{z} - t\mathbf{x}) \cdot \mathbf{x} = 0\} = \{\mathbf{z} \in \mathbb{R}^2 \mid \mathbf{z} \cdot \mathbf{x} = t\}$$

이다. 한편 U_i가 유계인 열린집합이므로 U_i의 넓이는 실수로 잘 정의된다.[1] 우리는 U_i의 넓이를 $u_i \in \mathbb{R}$라 하자. 그러면 U_i가 공집합이 아닌 열린집합이므로 $u_i > 0$이다. 그리고 U_i가 유계이므로 $U_i \subset B(\mathbf{0}, r_i)$을 만족하는 양의 실수 r_i가 존재한다. 또한 각각의 직선 $L_{\mathbf{x}}^{\perp}(t)$는 평면 $\mathbb{R}^2$를 두 부분으로 나눈다. 우리는 이 두 부분 중 $\mathbf{x}$를 포함하는 부분(반평면)을 $H_{\mathbf{x}}(t)$라 하자. 그리고 $h(t)$를 $U_i \cap H_{\mathbf{x}}(t)$의 넓이라 하자. 특별히 $L_{\mathbf{x}}$가 원점 $\mathbf{0}$을 지나는 직선이므로 모든 $t \geq r_i$에 대해 $h(t) = 0$이고, 모든 $t \leq -r_i$에 대해 $h(t) = u_i$이다. 더구나 $h\colon [-r_i, r_i] \to \mathbb{R}$이 연속이고 $h(r_i) = 0 < \frac{1}{2}u_i < u_i = h(-r_i)$이므로 중간값 정리에 의해 $h(t_{\mathbf{x}}) = \frac{1}{2}u_i$를 만족하는 실수 $t_{\mathbf{x}} \in [-r_i, r_i]$가 존재한다. 그리고 U_i가 공집합이 아닌 연결집합이므로 이러한 $t_{\mathbf{x}}$는 유일하다. 따라서 직선 $L_{\mathbf{x}}^{\perp}(t_{\mathbf{x}})$는 집합 U_i의 넓이를 2등분한다. 이제 우리는 각각의 점 $\mathbf{x} \in S^1$를 실수 $t_{\mathbf{x}}$로 보내는 함수 $f_i(\mathbf{x})$를 생각하자. 즉,

$$f_i \colon S^1 \to \mathbb{R}, \quad f_i(\mathbf{x}) = t_{\mathbf{x}}$$

이다. 그러면 f_i는 연속이다. 그리고 모든 $\mathbf{x} \in S^1$에 대해 $f_i(-\mathbf{x}) = -f_i(\mathbf{x})$이다. 우리는 모든 $\mathbf{x} \in S^1$에 대해 직선 $L_{\mathbf{x}}^{\perp}(f_i(\mathbf{x}))$이 U_i를 2등분함을 유의하자.

이제 함수 $h\colon S^1 \to \mathbb{R}$, $h(\mathbf{x}) = f_1(\mathbf{x}) - f_2(\mathbf{x})$를 생각하자. 그러면 h는 연속이다. 더구나 모든 $\mathbf{x} \in S^1$에 대해 $h(-\mathbf{x}) = -h(\mathbf{x})$이다. 그리고 문제 8.3.4에 의해 $h(\mathbf{p}) = h(-\mathbf{p})$를 만족하는 점 $\mathbf{p} \in S^1$가 존재한다. 이러한 점 $\mathbf{p}$에 대해 $h(\mathbf{p}) = h(-\mathbf{p}) = -h(\mathbf{p})$이므로 $h(\mathbf{p}) = 0$이 된다. 따라서 $f_1(\mathbf{p}) = f_2(\mathbf{p})$이므로 $L_{\mathbf{p}}^{\perp}(f_1(\mathbf{p})) = L_{\mathbf{p}}^{\perp}(f_2(\mathbf{p}))$이다. 결국 $L_{\mathbf{p}}^{\perp}(f_1(\mathbf{p}))$이 우리가 원하는 직선이다.

문제 17.5.11. 우리는 T를 행렬 A에 대한 선형변환(linear transformation)이라 하자.즉,

$$T \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$$

이다. 그리고

$$E = \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0\}$$

[1]Barra, G. de: Measure Theory and Integration, Ellis Horwood Limited, 1981 참조.

이라 하자. 이제 B를 구면 S^2와 E의 교집합이라 하자. 즉, $B = S^2 \cap E$이다. 그러면 B는 단위 원판 D^2와 위상동형이다.

(1) 만약 $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) \in B$이면 $x_i \geq 0(\forall i = 1, 2, 3)$이고 x_i 중 적어도 하나는 양수이다. 그리고 A의 모든 성분 a_{ij}가 양수이므로 $T(\mathbf{x})$의 모든 성분은 양수이다. 그래서 $\|T(\mathbf{x})\| > 0$이고 $T(\mathbf{x}) \in E$이므로 $T(\mathbf{x})/\|T(\mathbf{x})\| \in B$이다. 그러므로

$$f \colon B \to B, \quad f(\mathbf{x}) = T(\mathbf{x})/\|T(\mathbf{x})\|$$

는 잘 정의된 연속사상이다. 그리고 $B \cong D^2$이므로 Brouwer 고정점 정리(따름정리 17.5.5)에 의해 $f(\mathbf{v}) = \mathbf{v}$인 고정점 $\mathbf{v} \in B$가 존재한다(문제 17.5.2 참조). 이러한 고정점 $\mathbf{v}$에 대해 $T(\mathbf{v})/\|T(\mathbf{v})\| = \mathbf{v}$이므로

$$A\mathbf{v} = T(\mathbf{v}) = \|T(\mathbf{v})\|\mathbf{v}$$

가 성립한다. 따라서 행렬 A는 양의 고유값 $\|T(\mathbf{v})\|$을 갖는다.

(2) 만약 $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) \in B$이면 $x_i \geq 0(\forall i = 1, 2, 3)$이고 x_i 중 적어도 하나는 양수이므로 $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$이다. 그리고 A가 정칙행렬이므로 $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$이 되어 $\|T(\mathbf{x})\| > 0$이다. 또한 모든 i, j에 대해 $a_{ij} \geq 0$이므로 $T(\mathbf{x}) \in E$이다. 그래서 $T(\mathbf{x})/\|T(\mathbf{x})\| \in B$이다. 그러므로

$$f \colon B \to B, \quad f(\mathbf{x}) = T(\mathbf{x})/\|T(\mathbf{x})\|$$

는 잘 정의된 연속사상이다. 그리고 $B \cong D^2$이므로 Brouwer 고정점 정리(따름정리 17.5.5)에 의해 $f(\mathbf{v}) = \mathbf{v}$인 고정점 $\mathbf{v} \in B$가 존재한다(문제 17.5.2 참조). 이러한 고정점 $\mathbf{v}$에 대해 $T(\mathbf{v})/\|T(\mathbf{v})\| = \mathbf{v}$이므로

$$A\mathbf{v} = T(\mathbf{v}) = \|T(\mathbf{v})\|\mathbf{v}$$

가 성립한다. 따라서 행렬 A는 양의 고유값 $\|T(\mathbf{v})\|$을 갖는다.

문제 17.5.13. 우리는 대우법을 사용하여 다음이 서로 동치임을 보이면 된다.

(a′) S^n은 축약가능이다.

(b′) S^n은 D^{n+1}의 수축이다.

(c′) 고정점을 갖지 않는 연속사상 $f \colon D^{n+1} \to D^{n+1}$가 존재한다.

(a′)⇔(b′) 정리 17.1.15에 항등함수 $\mathrm{id}_{S^n} : S^n \to S^n$을 적용하면 된다. 구체적으로 다음과 같이 보일 수 있다. 만약 S^n이 축약가능이면 id_{S^n}이 퇴화변이적이므로 정리 17.1.15에 의해 id_{S^n}의 확장 $r \colon D^{n+1} \to S^n$이 존재한다. 그리고 이러한 r이 수축사상이므로 S^n은 D^{n+1}의 수축이다. 역으로 S^n이 D^{n+1}의 수축이면 수축사상 $r \colon D^{n+1} \to S^n$이 존재하여 id_{S^n}의 확장이므로 정리 17.1.15에 의해 id_{S^n}은 퇴화변이적이다. 따라서 S^n은 축약가능이다.

(b′)⇒(c′) S^n이 D^{n+1}의 수축이므로 수축사상 $r \colon D^{n+1} \to S^n$이 존재한다. 이제 연속사상 $k \colon S^n \to S^n$, $k(\mathbf{x}) = -\mathbf{x}$와 포함사상 $i \colon S^n \hookrightarrow D^{n+1}$, $i(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$를 생각하자. 그러면 합성

사상

$$f = i \circ k \circ r\colon D^{n+1} \to S^n \to S^n \hookrightarrow D^{n+1}, \quad f(\mathbf{y}) = -r(\mathbf{y})$$

는 연속이지만 고정점을 갖지 않는다.

(c′)⇒(b′) 고정점을 갖지 않는 연속사상 $f\colon D^{n+1} \to D^{n+1}$가 존재한다고 하자. 그러면 모든 점 $\mathbf{x} \in D^{n+1}$에 대하여 $f(\mathbf{x}) \neq \mathbf{x}$이다. 이제 각각의 점 $\mathbf{x} \in D^{n+1}$에 대해 $f(\mathbf{x})$를 시점으로 하고 $\mathbf{x}$를 지나는 반직선 $\overrightarrow{f(\mathbf{x})\mathbf{x}}$이 S^n과 만나는 점을 $r(\mathbf{x})$로 정의하면 $r\colon D^{n+1} \to S^n$은 연속이다. 특별히 모든 $\mathbf{x} \in S^n$에 대하여 $r(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$이므로 r는 수축사상이다. 따라서 S^n은 D^{n+1}의 수축이다.

문제 17.5.15. (a)⇒(b) 연속사상 $f\colon S^n \to \mathbb{R}^n$가 모든 점 $x \in S^n$에 대해 $f(-\mathbf{x}) = -f(\mathbf{x})$를 만족한다고 하자. 먼저 f가 연속이므로 (a)에 의해 $f(\mathbf{p}) = f(-\mathbf{p})$를 만족하는 점 $\mathbf{p} \in S^n$가 존재한다. 따라서 $f(\mathbf{p}) = f(-\mathbf{p}) = -f(\mathbf{p})$이므로 $2f(\mathbf{p}) = \mathbf{0}$이 되어 $f(\mathbf{p}) = \mathbf{0}$이다.

(b)⇒(c) (귀류법) 모든 점 $\mathbf{x} \in S^n$에 대해 $f(-\mathbf{x}) = -f(\mathbf{x})$를 만족하는 연속사상 $f\colon S^n \to S^{n-1}$가 존재한다고 가정하자. 그러면 포함사상 $i\colon S^{n-1} \hookrightarrow \mathbb{R}^n$, $i(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$에 대해 $i \circ f\colon S^n \to \mathbb{R}^n$은 연속이다. 그리고 모든 $\mathbf{x} \in S^n$에 대해 $i \circ f(-\mathbf{x}) = f(-\mathbf{x}) = -f(\mathbf{x}) = -i \circ f(\mathbf{x})$이다. 따라서 (b)에 의해 $i \circ f(\mathbf{p}) = \mathbf{0}$을 만족하는 점 $\mathbf{p} \in S^n$가 존재한다. 그래서 $f(\mathbf{p}) = i \circ f(\mathbf{p}) = \mathbf{0}$이다. 이는 $f(\mathbf{p}) \in S^{n-1}$에 모순이다.

(c)⇒(d) (귀류법) 모든 점 $\mathbf{x} \in S^{n-1} = \partial D^n$에 대해 $f(-\mathbf{x}) = -f(\mathbf{x})$를 만족하는 연속사상 $f\colon D^n \to S^{n-1}$가 존재한다고 가정하자. 우리는 연속사상

$$\pi\colon S^n \to D^n,\ \pi(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}) = (x_1, \ldots, x_n)$$

를 생각하자. 그리고 S^n의 두 반구면

$$\begin{aligned} S^n_+ &= \{(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}) \in S^n \mid x_{n+1} \geq 0\}, \\ S^n_- &= \{(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}) \in S^n \mid x_{n+1} \leq 0\} \end{aligned}$$

을 생각하자. 그러면 두 축소사상 $\pi|_{S^n_+}\colon S^n_+ \to D^n$와 $\pi|_{S^n_-}\colon S^n_- \to D^n$은 모두 위상동형사상이다. 이제 사상

$$g\colon S^n \to S^{n-1}, \quad g(\mathbf{x}) = \begin{cases} f(\pi(\mathbf{x})), & \mathbf{x} \in S^n_+ \\ -f(\pi(\mathbf{x})), & \mathbf{x} \in S^n_- \end{cases}$$

를 생각하자. 붙임보조정리에 의해 g는 연속이다. 그리고 모든 점 $\mathbf{x} \in S^n$에 대해 $g(-\mathbf{x}) = -g(\mathbf{x})$이다. 이는 (c)에 모순이다.

(d)⇒(a) (귀류법) $f(\mathbf{p}) = f(-\mathbf{p})$를 만족하는 점 $\mathbf{p} \in S^n$가 존재하지 않는 연속사상 $f\colon S^n \to \mathbb{R}^n$가 존재한다고 가정하자. 그러면 모든 점 $\mathbf{x} \in S^n$에 대해 $f(\mathbf{x}) \neq f(-\mathbf{x})$이다. 따라서

$$g\colon S^n \to S^{n-1}, \quad g(\mathbf{x}) = \frac{f(\mathbf{x}) - f(-\mathbf{x})}{\|f(\mathbf{x}) - f(-\mathbf{x})\|}$$

는 잘 정의된 연속사상이고 모든 점 $\mathbf{x} \in S^n$에 대해 $g(-\mathbf{x}) = -g(\mathbf{x})$이다. 이제 넣기사상

$$j\colon D^n \to S^n, \quad j(\mathbf{y}) = (\mathbf{y}, \sqrt{1 - \|\mathbf{y}\|})$$

를 생각하자. 그러면 모든 $\mathbf{y} \in S^{n-1} = \partial D^n$에 대해 $\|\mathbf{y}\| = \|-\mathbf{y}\| = 1$이므로 $j(-\mathbf{y}) = (-\mathbf{y}, 0) = -(\mathbf{y}, 0) = -j(\mathbf{y})$이 된다. 따라서 합성사상

$$h = g \circ j\colon D^n \to S^{n-1}$$

는 연속이고 모든 점 $\mathbf{y} \in S^{n-1} = \partial D^n$에 대해

$$h(-\mathbf{y}) = g(j(-\mathbf{y})) = g(-j(\mathbf{y})) = -g(j(\mathbf{y})) = -h(\mathbf{y})$$

를 만족한다. 이는 (d)에 모순이다.

지금까지 우리는 (a)⇔(b)⇔(c)⇔(d)임을 보였다.

(a)⇒(e) (귀류법) 모든 $\mathbf{x} \in S^n$에 대해 $f(\mathbf{x}) \neq f(-\mathbf{x})$를 만족하는 전사가 아닌 연속사상 $f\colon S^n \to S^n$가 존재한다고 가정하자. 먼저 한 점 $\mathbf{p} \in S^n - f(S^n)$를 택하자. 그러면 위상동형사상 $h\colon S^n - \{\mathbf{p}\} \to \mathbb{R}^n$가 존재한다. 이제 합성사상 $h \circ f\colon S^n \to S^n - \{\mathbf{p}\} \to \mathbb{R}^n$을 생각하자. 자명하게 $h \circ f$는 연속이다. 그리고 모든 $\mathbf{x} \in S^n$에 대해 $f(\mathbf{x}) \neq f(-\mathbf{x})$이고 h가 단사이므로 $h(f(\mathbf{x})) \neq h(f(-\mathbf{x})))$이다. 이는 (a)에 모순이다.

(e)⇒(c) (귀류법) 모든 점 $\mathbf{x} \in S^n$에 대해 $f(-\mathbf{x}) = -f(\mathbf{x})$를 만족하는 연속사상 $f\colon S^n \to S^{n-1}$가 존재한다고 가정하자. 먼저 넣기사상 $i\colon S^{n-1} \hookrightarrow S^n$, $i(\mathbf{y}) = (\mathbf{y}, 0)$을 생각하자. 그러면 모든 $\mathbf{y} \in S^{n-1}$에 대해 $i(-\mathbf{y}) = -i(\mathbf{y})$이다. 따라서 합성사상 $g = i \circ f\colon S^n \to S^n$은 연속이고 모든 점 $\mathbf{x} \in S^n$에 대해 $g(-\mathbf{x}) = -g(\mathbf{x})$이 된다. 따라서 모든 점 $\mathbf{x} \in S^n$에 대해 $g(\mathbf{x}) \neq g(-\mathbf{x})$이다. (왜냐하면 만약 $g(\mathbf{p}) = g(-\mathbf{p})$인 점 $\mathbf{p} \in S^n$가 존재하면 $g(\mathbf{p}) = g(-\mathbf{p}) = -g(\mathbf{p})$이므로 $2g(\mathbf{p}) = \mathbf{0}$이 되어 $g(\mathbf{p}) = \mathbf{0}$이다. 그런데 $g(\mathbf{p}) \in S^n$이므로 모순이다.) 그리고 $g(S^n) = f(S^n) \subset S^{n-1}$이므로 g는 전사가 아니다. 이는 (e)에 모순이다.

17.6 Seifert-van Kampen 정리

문제 17.6.1. $a_1 a_2 \cdots a_n \in G_1 * G_2$이 주어졌다고 하자.

먼저 (E1) 작업에 의해 동치낱말이 되는 경우를 살펴보자. 우리는 $a_i, a_{i+1} \in G_j$ $(j = 1, 2)$이고 $b_i = a_i a_{i+1} \in G_j$이라 하자. 그러면

$$a_1 \cdots a_{i-1} a_i a_{i+1} a_{i+2} \cdots a_n, \quad a_1 \cdots a_{i-1} b_i a_{i+2} \cdots a_n$$

는 서로 동치낱말이다. 그리고 $a_k a_k^{-1} = 1$이고 $a_i a_{i+1} b^{-1} = 1$이므로

$$\begin{aligned}&(a_1 \cdots a_{i-1} a_i a_{i+1} a_{i+2} \cdots a_n)(a_1 \cdots a_{i-1} b_i a_{i+2} \cdots a_n)^{-1} \\ &= a_1 \cdots a_{i-1} a_i a_{i+1} a_{i+2} \cdots a_n a_n^{-1} \cdots a_{i+2}^{-1} b_i^{-1} a_{i-1}^{-1} \cdots a_1^{-1} \\ &= 1 \in N\end{aligned}$$

이므로 $a_1 \cdots a_{i-1} a_i a_{i+1} a_{i+2} \cdots a_n N = a_1 \cdots a_{i-1} b_i a_{i+2} \cdots a_n N$이 성립한다.

이제 (E2) 작업에 의해 동치낱말이 되는 경우를 살펴보자. 우리는 $a_i = \phi_1(h) \in G_1$인 $h \in H$가 존재하고 $b_i = \phi_2(h) \in G_2$이라 하자. 그러면

$$a_1 \cdots a_{i-1} a_i a_{i+1} \cdots a_n, \quad a_1 \cdots a_{i-1} b_i a_{i+1} \cdots a_n$$

는 서로 동치낱말이다. 그리고 N의 정의에 의해 $a_i b_i^{-1} = \phi_1(h)\phi_2(h)^{-1} \in N$이다. 더구나 N이 $G_1 * G_2$의 정규부분군이므로 모든 $c \in G_1 * G_2$에 대해 $cNc^{-1} = N$임을 상기하자. 따라서

$$\begin{aligned}&(a_1 \cdots a_{i-1} a_i a_{i+1} \cdots a_n)(a_1 \cdots a_{i-1} b_i a_{i+1} \cdots a_n)^{-1} \\ &= a_1 \cdots a_{i-1} a_i a_{i+1} \cdots a_n a_n^{-1} \cdots a_{i+1}^{-1} b_i^{-1} a_{i-1}^{-1} \cdots a_1^{-1} \\ &= a_1 \cdots a_{i-1} a_i b_i^{-1} a_{i-1}^{-1} \cdots a_1^{-1} \in a_1 \cdots a_{i-1} N a_{i-1}^{-1} \cdots a_1^{-1} = N\end{aligned}$$

이므로 $a_1 \cdots a_{i-1} a_i a_{i+1} \cdots a_n N = a_1 \cdots a_{i-1} b_i a_{i+1} \cdots a_n N$이 성립한다.

17.7 기본군의 계산

문제 17.7.1. (귀류법) $\mathbb{R}^2$와 $\mathbb{R}^n$이 위상동형이라고 가정하자. 그리고 $h\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^n$를 위상동형사상이라 하자. 그러면 축소사상

$$h'\colon \mathbb{R}^2 - \{\mathbf{0}\} \to \mathbb{R}^n - \{h(\mathbf{0})\}, \quad h'(\mathbf{x}) = h(\mathbf{x})$$

도 위상동형사상이므로 $\mathbb{R}^2 - \{\mathbf{0}\} \cong \mathbb{R}^n - \{h(\mathbf{0})\}$이다. 따라서 $\pi_1(\mathbb{R}^2 - \{\mathbf{0}\}) \cong \pi_1(\mathbb{R}^n - \{h(\mathbf{0})\})$이다.

한편 따름정리 17.3.4에 의해 각각의 자연수 $m \geq 2$에 대하여 $\pi_1(S^{m-1}) \cong \pi_1(\mathbb{R}^m - \{\mathbf{0}\})$이다. 그리고 임의의 점 $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^m$에 대하여

$$f\colon \mathbb{R}^m - \{\mathbf{0}\} \to \mathbb{R}^m - \{\mathbf{p}\}, \quad h(\mathbf{x}) = \mathbf{x} + \mathbf{p}$$

가 위상동형사상이므로 $\mathbb{R}^m - \{\mathbf{0}\} \cong \mathbb{R}^m - \{\mathbf{p}\}$이다. 따라서 $\pi_1(\mathbb{R}^m - \{\mathbf{0}\}) \cong \pi_1(\mathbb{R}^m - \{\mathbf{p}\})$이다. 그리고 $\pi_1(S^1) \cong (\mathbb{Z}, +)$이고 $\pi_1(S^m) = 0 (m \geq 2)$이다. 특별히 $n \geq 3$이므로 $\pi_1(S^{n-1}) =$

0이다. 그러므로

$$(\mathbb{Z},+)\cong\pi_1(S^1)\cong\pi_1(\mathbb{R}^2-\{\mathbf{0}\})\cong\pi_1(\mathbb{R}^n-\{h(\mathbf{0})\})\cong\pi_1(\mathbb{R}^n-\{\mathbf{0}\})\cong\pi_1(S^{n-1})=0$$

이 된다. 이는 모순이다.

문제 17.7.3. 먼저 X가 길연결임은 자명하다. 그리고 보기 17.7.3, 17.7.4, 17.7.5와 같은 방법으로 $\pi_1(X)=<a \mid aaa^{-1}=1>$이 된다. 그런데 $1=aaa^{-1}=a$이므로 $\pi_1(X)=<1>=0$이므로 X는 단순연결이다.

문제 17.7.5. $\pi_1(T\sharp\mathbb{R}P^2)=<a,b,c \mid aba^{-1}b^{-1}c^2=1>$.

문제 17.7.7. (1) 연속사상 $f\colon X\to S^1$에 의해 유도되는 준동형사상 $f_\sharp\pi_1(X)\to\pi_1(S^1)$을 생각하자. 가정에 의해 $\pi_1(X)$가 유한군이고 $\pi_1(S^1)=\mathbb{Z}$이므로 $f_\sharp(\pi_1(X))=\{0\}$이 되어야 한다. 그리고 (보기 17.4.4에서와 같은) 우리가 잘 알고있는 덮개사상 $p\colon\mathbb{R}\to S^1$을 생각하자. $\pi_1(\mathbb{R})=0$이므로 $p_\sharp(\pi_1(\mathbb{R}))=\{0\}$이므로 $f_\sharp(\pi_1(X))=p_\sharp(\pi_1(\mathbb{R}))$이다. 그러므로 성질 17.4.26에 의해 f의 올림 $\tilde{f}\colon X\to\mathbb{R}$이 존재하여 $f=p\circ\tilde{f}$를 만족한다. 한편 $\mathbb{R}$이 축약가능이므로 $\tilde{f}$는 상수사상 $c\colon X\to\mathbb{R}$와 변이적이다. 우리는 $\tilde{f}$에서 c까지의 변이를 $H\colon X\times I\to\mathbb{R}$이라 하자. 그러면 변이 $p\circ H\colon X\times I\to S^1$에 의해 $f=p\circ\tilde{f}$는 상수사상 $p\circ c$와 변이적이다. 따라서 f는 퇴화변이적이다.

(2) 사영사상 $f\colon T=S^1\times S^1\to S^1$, $f(\mathbf{x},\mathbf{y})=\mathbf{x}$는 연속이다. 그리고 $f_\sharp\colon\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}=\pi_1(S^1\times S^1)\to\pi_1(S^1)=\mathbb{Z}$, $f_\sharp(m,n)=m$이므로 $f_\sharp$는 전사이다. 특별히 $f_\sharp$이 자명하지 않으므로 f는 퇴화변이적이 아니다(따름정리 17.2.17).

문제 17.7.9. X가 길연결임은 자명하므로 우리는 $\pi_1(X)=0$임을 보이면 된다. 이를 위해 $X=S^2\vee S^2$의 두 구면을 각각 S_1^2, S_2^2라 하자. 그리고 $S_1^2\cap S_2^2=\{x_0\}$이라 하자. 이제 임의의 점 $x_1\in S_1^2-\{x_0\}$와 $x_2\in S_2^2-\{x_0\}$을 택하자. 그리고 $U=X-\{x_2\}$, $V=X-\{x_1\}$이라 하자. 그러면 U와 V는 X의 열린집합들이다. 그러데 $U\simeq S_2^2=S^2$, $V\simeq S_1^2=S^2$이므로 $\pi_1(U,x_0)=0$, $\pi_1(V,x_0)=0$이다. 따라서 Seifert-van Kampen 정리에 의해 $\pi_1(X,x_0)=0$이다(따름정리 17.6.9).

문제 17.7.11. 자연수 $n\geq 3$에 대해 n-각형의 각변을 문자열 $\underbrace{aaa\cdots aa}_{n\text{개}}$로 붙여서 만든 상공간을 ***n*-겹 광대고깔**(dunce hat)이라 하고 D_n으로 나타내자(보기 17.1.14(4), 문제 17.7.4 참조). 그러면 보기 17.7.3, 17.7.4, 17.7.5와 같은 방법으로 $\pi_1(D_n)=<a \mid a^n=1>\cong\mathbb{Z}_n$이 된다. 특별히 D_1을 한 점 집합, $D_2=\mathbb{R}P^2$이라 하면 $\pi_1(D_1)=\{0\}=\mathbb{Z}_1$이고 $\pi_1(D_2)=\pi_1(\mathbb{R}P^2)\cong\mathbb{Z}_2$이다.

(1) 따라서 $\pi_1(D_m\times D_n)\cong\pi_1(D_m)\times\pi_1(D_n)\cong\mathbb{Z}_m\times\mathbb{Z}_n$이다.

(2) 또한 $\pi_1(D_m\vee D_n)\cong\pi_1(D_m)*\pi_1(D_n)\cong\mathbb{Z}_m*\mathbb{Z}_n$이다.

문제 17.7.13. (1) 편의상 S^1을 복소평면 $\mathbb{C}$상의 단위원, $b_0 = 1$, $\mathbf{x}_0 = (b_0, b_0) = (1,1) \in T$이라 하자. 그리고 덮개사상 $p\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to S^1 \times S^1$, $p(u,v) = (e^{i2\pi u}, e^{i2\pi v})$를 생각하자. 그러면 $p(\mathbf{0}) = \mathbf{x}_0$이다. 그리고 두 길

$$\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}\colon I \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \quad \tilde{\alpha}(s) = (s, 0),\ \tilde{\beta}(0, s)$$

을 생각하자. 그러면 $\pi_1(T, x_0)$는 두 닫힌길 $\alpha = p \circ \tilde{\alpha}$와 $\beta = p \circ \tilde{\beta}$가 생성하는 가환인 자유군이다. 즉,

$$\pi_1(T, \mathbf{x}_0) =< [\alpha], [\beta] \mid [\alpha][\beta] = [\beta][\alpha] >= \{[\alpha]^m [\beta]^n \mid m, n \in \mathbb{Z}\}$$

이다. 그러므로 군 동형사상

$$\varphi\colon \pi_1(T, \mathbf{x}_0) \to \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} = (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, +),\ \varphi([\alpha]^m [\beta]^n) = (m, n)$$

이 존재한다. 그리고 φ^{-1}에 의해 $(m,n) \in \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$은 T상의 닫힌길 $[p \circ \tilde{\gamma}]$에 대응된다. 단, 여기서 $\tilde{\gamma}$는 $(0,0)$에서 (m,n)까지의 $\mathbb{R}^2$상의 임의의 길이다. 침고로 $[p \circ \tilde{\gamma}] = [\alpha]^m [\beta]^n$이다. 특별히 $\mathbf{e}_1 = (1,0)$, $\mathbf{e}_2 = (0,1)$이라 하면 $\mathbf{e}_1$과 $\mathbf{e}_2$는 $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$의 생성자이다. 그리고 $\varphi([\alpha]) = \mathbf{e}_1$, $\varphi([\beta]) = \mathbf{e}_2$, $\varphi([\alpha]^m [\beta]^n) = m\mathbf{e}_1 + n\mathbf{e}_2$이다. 따라서 군 동형사상 $h\colon \pi_1(T, x_0) \to \pi_1(T, x_0)$은 정수로 이루어진 2×2 정칙행렬

$$A\colon \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$$

에 대응된다.

$$\begin{tikzcd}
\pi_1(T, \mathbf{x}_0) \arrow[r, "h"] \arrow[d, "\varphi"'] & \pi_1(T, \mathbf{x}_0) \arrow[d, "\varphi"] \\
\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \arrow[r, dashed, "A"'] & \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}
\end{tikzcd}$$

구체적으로

$$h([\alpha]) = [\alpha]^a [\beta]^b, \quad h([\beta]) = [\alpha]^c [\beta]^d$$

이라 하면

$$A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$$

이다. 단, 여기서 a, b, c, d는 모두 정수이다. 그리고 A의 역행렬 B도 정수로 이루어진 행렬이다. 그리고

$$\tilde{f}_A,\ \tilde{f}_B\colon (\mathbb{R}^2, \mathbf{0}) \to (\mathbb{R}^2, \mathbf{0}), \quad \tilde{f}_A(\mathbf{v}) = A\mathbf{v},\ \tilde{f}_B(\mathbf{v}) = B\mathbf{v}$$

이라 하자. 그러면 각각의 점 $\mathbf{x} \in T$에 대해 두 연속사상

$$p \circ \tilde{f}_A,\ p \circ \tilde{f}_B \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \to T$$

은 $p^{-1}(\mathbf{x})$에서 상수사상이다. 보다 구체적으로, 만약 $\mathbf{y} \in p^{-1}(\mathbf{x})$이면 $\mathbf{y} = \mathbf{x} + \mathbf{z}$인 $\mathbf{z} \in \mathbb{Z}^2$이 존재한다. 그리고 $A\mathbf{z} \in \mathbb{Z}^2$이므로

$$p \circ \tilde{f}_A(\mathbf{y}) = p(A\mathbf{x} + A\mathbf{z}) = p(A\mathbf{x}) = p \circ \tilde{f}_A(\mathbf{x})$$

이다. 따라서 $\tilde{f}_A$와 $\tilde{f}_B$는 다음 두 연속사상

$$f_A,\ f_B \colon T \to T \quad \text{s.t.} \quad p \circ \tilde{f}_A = f_A \circ p,\ p \circ \tilde{f}_B = f_B \circ p$$

을 유도한다.

$$\begin{tikzcd}
(\mathbb{R}^2, \mathbf{0}) \arrow[r, "\tilde{f}_A"] \arrow[d, "p"] & (\mathbb{R}^2, \mathbf{0}) \arrow[d, "p"] \\
(T, \mathbf{x}_0) \arrow[r, dashed, "f_A"'] & (T, \mathbf{x}_0)
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
(\mathbb{R}^2, \mathbf{0}) \arrow[r, "\tilde{f}_B"] \arrow[d, "p"] & (\mathbb{R}^2, \mathbf{0}) \arrow[d, "p"] \\
(T, \mathbf{x}_0) \arrow[r, dashed, "f_B"'] & (T, \mathbf{x}_0)
\end{tikzcd}$$

그리고 $AB = E$, $BA = E$이므로 $\tilde{f}_A \circ \tilde{f}_B = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}$, $\tilde{f}_B \circ \tilde{f}_A = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}$이 되어 $f_A \circ f_B = \mathrm{id}_T$, $f_B \circ f_A = \mathrm{id}_T$이다. 특별히 $f_A \colon (T, \mathbf{x}_0) \to (T, \mathbf{x}_0)$는 위상동형사상이다. 그리고

$$\tilde{f}_A(\mathbf{0}) = \mathbf{0},\quad p \circ \tilde{f}_A \circ \tilde{\alpha} = f_A \circ p \circ \tilde{\alpha},\quad p \circ \tilde{f}_A \circ \tilde{\beta} = f_A \circ p \circ \tilde{\beta},$$
$$\tilde{f}_A \circ \tilde{\alpha}(1) = A\tilde{\alpha}(1) = A\mathbf{e}_1 = (a, b),\quad \tilde{f}_A \circ \tilde{\beta}(1) = A\tilde{\beta}(1) = A\mathbf{e}_2 = (c, d)$$

이다. 그래서 $\tilde{f}_A \circ \tilde{\alpha}$는 $(0,0)$에서 (a,b)까지의 $\mathbb{R}^2$상의 길이므로

$$[p \circ \tilde{f}_A \circ \tilde{\alpha}] = [\alpha]^a [\beta]^b = h([\alpha])$$

이다. 같은 방법으로 $[p \circ \tilde{f}_A \circ \tilde{\beta}] = h([\beta])$이다. 따라서

$$(f_A)_\sharp([\alpha]) = [f_A \circ \alpha] = [f_A \circ p \circ \tilde{\alpha}] = [p \circ \tilde{f}_A \circ \tilde{\alpha}] = h([\alpha])$$
$$(f_A)_\sharp([\beta]) = [f_A \circ \beta] = [f_A \circ p \circ \tilde{\beta}] = [p \circ \tilde{f}_A \circ \tilde{\beta}] = h([\beta])$$

이다. 그리고 $[\alpha]$, $[\beta]$가 $\pi_1(T, \mathbf{x}_0)$의 생성자이므로 $(\tilde{f}_A)_\sharp = h$이다.

(2) 우리는 편의상 S^1을 복소평면 $\mathbb{C}$상의 단위 원으로 보자. 그리고 $b_0 = 1$, $\mathbf{x}_0 = (b_0, b_0) = (1, 1) \in T$이라 하자. 그리고 두 닫힌길

$$\alpha,\ \beta \colon I \to S^1 \times S^1,\quad \alpha(s) = (e^{i2\pi s}, 1),\ \beta(s) = (1, e^{i2\pi s})$$

을 생각하자. 그러면 $\pi_1(T, x_0)$는 $[\alpha]$와 $[\beta]$가 생성하는 가환인 자유군이므로 $\pi_1(T, \mathbf{x}_0) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$이다. 먼저 $\pi_1(T, \mathbf{x}_0)$이 가환이므로 T의 두 덮개공간이 동치일 필요충분조건은 각각에 해당하는 두 부분군이 같은 것이다.

한편 군 $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$의 부분군은 다음 중 하나이다;

(i) 자명한 부분군 $G_{0,0} = \{(0,0)\}$,

(ii) 각각의 자연수 m에 대해 $G_{m,0} = m\mathbb{Z} \oplus 0 = \{(mk, 0) \mid k \in \mathbb{Z}\}$,

(iii) 각각의 자연수 n에 대해 $G_{0,n} = 0 \oplus n\mathbb{Z} = \{(0, nk) \mid k \in \mathbb{Z}\}$,

(iv) 두 자연수 m, n에 대하여 $G_{m,n} = m\mathbb{Z} \oplus n\mathbb{Z} = \{(mk, nl) \mid k, l \in \mathbb{Z}\}$.

특별히 $G_{1,1} = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$이다.

(i′) 덮개사상 $p_{0,0} \colon \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to S^1 \times S^1$, $p_{0,0}(u, v) = (e^{i2\pi u}, e^{i2\pi v})$에 대해 $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$이 단순연결이므로

$$(p_{0,0})_\sharp(\pi_1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}, \mathbf{0})) = \{(0,0)\} = G_{0,0}$$

이다.

(ii′) 자연수 m에 대하여 덮개사상 $p_{m,0} \colon S^1 \times \mathbb{R} \to S^1 \times S^1$, $p(z, v) = (z^m, e^{i2\pi v})$을 생각하자. $(p_{m,0})_\sharp$은

$$\pi_1(S^1 \times \mathbb{R}, (b_0, 0)) \cong \pi_1(S^1, b_0) \times \pi_1(\mathbb{R}, , 0) = \pi_1(S^1, b_0) \times \{0\}$$

의 생성자 $([\alpha], 0)$을 $([\alpha]^m, 0)$으로 보내므로

$$(p_{m,0})_\sharp(\pi_1(S^1 \times \mathbb{R}, (b_0, 0))) \cong m\mathbb{Z} \times \{0\} = G_{m,0}$$

이다.

(iii′) 자연수 n에 대하여 덮개사상 $p_{0,n} \colon \mathbb{R} \times S^1 \to S^1 \times S^1$, $p(u, z) = (e^{i2\pi u}, z^n)$을 생각하자. $(p_{0,n})_\sharp$은

$$\pi_1(\mathbb{R} \times S^1, (0, b_0)) \cong \pi_1(\mathbb{R}, , 0) \times \pi_1(S^1, b_0) = \{0\} \times \pi_1(S^1, b_0)$$

의 생성자 $(0, [\beta])$을 $(0, [\beta]^n)$으로 보내므로

$$(p_{0,n})_\sharp(\pi_1(\pi_1(\mathbb{R} \times S^1, (0, b_0))) \cong \{0\} \times n\mathbb{Z} = G_{0,n}$$

이다.

(iv′) 두 자연수 m, n에 대하여 덮개사상 $p_{m,n} \colon S^1 \times S^1 \to S^1 \times S^1$, $p(z, w) = (z^m, w^n)$을 생각하자. $(p_{m,n})_\sharp$은

$$\pi_1(S^1 \times S^1, (b_0, b_0)) \cong \pi_1(S^1, b_0) \times \pi_1(S^1, b_0)$$

의 두 생성자 $([\alpha], 0)$와 $(0, [\beta])$를 각각 $([\alpha]^m, 0)$와 $(0, [\beta]^n)$으로 보내므로

$$(p_{m,n})_\sharp(\pi_1(S^1 \times S^1, (b_0, b_0)) \cong m\mathbb{Z} \times n\mathbb{Z} = G_{m,n}$$

이다.

따라서 정리 17.7.13에 의해 덮개사상 $p\colon E \to S^1$은 $p_{k,l}$ $(k, l \in \{0\} \cup \mathbb{N})$ 중 하나와 동치이다. 그리고 S^1의 (길연결인) 덮개공간은 $\mathbb{R}^2$, $S^1 \times \mathbb{R}(\cong \mathbb{R} \times S^1)$, T 중 하나와 위상동형이다.

문제 17.7.15. 점 $x_0 \in B$에서 $p|$에 의해 고르게 덮이는 열린근방이 존재하지 않는다.

17.8 평면의 분리

문제 17.8.1. 먼저 상사상 $\pi\colon Y \to E$가 열린사상임을 보이자. Y가 서로소인 열린집합 $U\times\{2n\}, V\times\{2n+1\}$ $(n \in \mathbb{Z})$들의 합집합이므로 우리는 축소사상 $\pi|_{U\times\{2n\}}$과 $\pi|_{V\times\{2n+1\}}$이 열린사상임을 보이면 된다. O를 $U \times \{2n\}$의 임의의 열린집합이라 하자. 그러면 $O = W \times \{2n\}$을 만족하는 U의 열린집합 W가 존재한다. 그리고

$$\pi^{-1}(\pi(W \times \{2n\})) = W \times \{2n\} \bigcup (W \cap B) \times \{2n+1\} \bigcup (W \cap A) \times \{2n-1\}$$

이다. $\pi^{-1}(\pi(W \times \{2n\}))$이 Y의 세 열린집합들의 합집합이므로 이는 Y의 열린집합이다. 그리고 상공간의 정의에 의해 $\pi(O) = \pi(W \times \{2n\})$는 E의 열린집합이다. 따라서 $\pi|_{U\times\{2n\}}$은 열린사상이다. 같은 방법으로 $\pi|_{V\times\{2n+1\}}$도 열린사상임을 보일 수 있다.

이제 $p\colon E \to X$, $p([x, n]) = x$가 덮개사상임을 보이자. 우리는 U와 V가 p에 의해 고르게 덮힘을 보이면 된다. 예를 들어 U를 살펴보면 $p^{-1}(U)$는 서로소인 열린집합 $\pi(U\times\{2n\})$ $(n \in \mathbb{N})$들의 합집합이다. 그리고 π가 열린사상이므로 $\pi(U \times \{2n\})(n \in \mathbb{N})$는 E의 열린집합이다. 그리고 축소사상 $\pi_{2n} = \pi|\colon U \times \{2n\} \to \pi(U \times \{2n\})$은 전단사이고 연속인 열린사상이므로 위상동형사상이다. 그러면

$$p| = \rho \circ \pi_{2n}^{-1} : \pi(U \times \{2n\}) \to U \times \{2n\} \to U$$

이고 π_{2n}^{-1}과 $\rho|$가 모두 위상동형사상이므로 $p|$도 위상동형사상이다. 따라서 U는 p에 의해 고르게 덮히는 열린집합이다. 같은 방법으로 V도 p에 의해 고르게 덮히는 열린집합임을 보일 수 있다.

문제 17.8.3. 유클리드공간 $\mathbb{R}^2$의 컴팩트 부분공간 $K = [0,1] \times [0,1]$를 생각하자. 그리고 $\mathbf{a} = (0,0,1)$, $\mathbf{b} = (0,0,-1) \in S^2$이라 하자. 이제 두 연속사상

$$g\colon K \to \mathbb{R}^3,\ g(s,t) = (\cos 2\pi s, \sin 2\pi s, t)$$
$$r\colon \mathbb{R}^3 - \{\mathbf{0}\} \to S^2,\ r(\mathbf{x}) = \tfrac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|}$$

을 생각하자. 그러면 $f = r \circ g\colon K \to S^2 - \{\mathbf{a}, \mathbf{b}\}$는 연속사상이다. 그러나 $\mathbf{a}$와 $\mathbf{b}$는 $S^2 - f(K)$의 다른 연결성분에 포함된다.

문제 17.8.5. 우리는 다음이 동치임을 보이면 충분하다.

(a) p는 $\mathbb{R}^2 - C$의 유계가 아닌 연결성분에 포함된다.

(b) $i_\sharp$은 자명한 준동형사상이다.

먼저 $h\colon \mathbb{R}^2 \to S^2 - \{b\}$를 위상동형사상이라 하자. 단, 여기서 $b \in S^2$이다. 그리고 $a = h(p)$, $D = h(C)$라 하자. 그리면 $D \subset S^2 - \{a,b\}$이다. 그리고 $j\colon D \hookrightarrow S^2 - \{a,b\}$를 포함사상이라 하자.

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, hook, "i"] \arrow[d, "h"'] & \mathbb{R}^2 - \{p\} \arrow[d, "h"] \\ D \arrow[r, hook, "j"'] & S^2 - \{a,b\} \end{tikzcd}$$

(a)⇒(b) 만약 p가 $\mathbb{R}^2 - C$의 유계가 아닌 연결성분에 포함되면 a와 b는 $S^2 - D = S^2 - j(D)$의 같은 연결성분에 포함된다. 그리고 기초정리 17.8.4에 의해 j는 퇴화변이적이다. 그러므로 i도 퇴화변이적이다. (구체적으로 j가 퇴화변이적이므로 상수사상 $c\colon D \to S^2 - \{a,b\}$와 변이적이다. 그러면 $i = h^{-1} \circ j \circ h|_C \simeq h^{-1} \circ c \circ h|_C$이고 $h^{-1} \circ c \circ h|_C$이 상수사상이므로 i는 퇴화변이적이다.) 따라서 따름정리 17.2.17에 의해 $i_\sharp$은 자명하다.

(b)⇒(a) 이제 $i_\sharp\colon \pi_1(C, x_0) \to \pi_1(\mathbb{R}^2 - \{p\}, x_0)$이 자명하다고 가정하자. 단, 여기서 $x_0 \in C$이다. 그런데 C는 S^1과 위상동형이므로 정리 17.5.6에 의해 포함사상 $i\colon C \hookrightarrow \mathbb{R}^2 - \{p\}$는 퇴화변이적이다. 따라서 기초정리 17.8.9에 의해 p는 $\mathbb{R}^2 - i(C) = \mathbb{R}^2 - C$의 유계가 아닌 연결성분에 포함된다.

문제 17.8.7. Jordan 곡선정리(정리 17.8.15)에 의해 $S^2 - C_1$은 정확히 두 개의 연결성분 V_1과 W_1을 가지며

$$V_1 \cup W_1 = S^2 - C_1,\quad V_1 \cap W_1 = \varnothing,\quad \partial V_1 = \partial W_1 = C_1$$

을 만족한다. 그리고 C_2가 $S^2 - C_1$의 연결된 부분집합이므로 C_2는 V_1과 W_1 중 하나에 포함된다. 우리는 $C_2 \subset V_1$이라 하자. 그러면 $C_2 \cap W_1 = \varnothing$이다. 같은 방법으로 $S^2 - C_2$도 정

확히 두 개의 연결성분 V_2와 W_2을 가지며

$$V_2 \cup W_2 = S^2 - C_2, \quad V_2 \cap W_2 = \varnothing, \quad \partial V_2 = \partial W_2 = C_2$$

을 만족한다. 그리고 C_1이 $S^2 - C_2$의 연결된 부분집합이므로 C_1는 V_2와 W_2 중 하나에 포함된다. 우리는 $C_1 \subset V_2$이라 하자. 그러면 $C_1 \cap W_2 = \varnothing$이다. 특별히 각각의 $i = 1, 2$에 대해 S^2가 국소길연결이므로 두 연결성분 V_i와 W_i는 길연결성분이다. 따라서 V_i와 W_i는 S^2의 길연결된 열린집합들이다. 또한

$$\begin{aligned} C_i &= \partial V_i = \overline{V}_i - V_i, \quad \overline{V}_i = V_i \cup C_i \\ C_i &= \partial W_i = \overline{W}_i - W_i, \quad \overline{W}_i = W_i \cup C_i \end{aligned}$$

이다.

(1) 이제 $W_3 = S^2 - (\overline{W}_1 \cup \overline{W}_2)$이 연결된 집합임을 보이자.

(i) $V_1 \cap W_2 \neq \varnothing$이다: 만약 $V_1 \cap W_2 = \varnothing$이라 가정하면 $W_2 \subset S^2 - V_1 = W_1 \cup C_1$이다. 그런데 $C_1 \cap W_2 = \varnothing$이므로 $W_2 \subset W_1$이다. 그러면 $C_2 \subset \overline{W}_2 \subset \overline{W}_1 = W_1 \cap C_1$이 된다. 그리고 $C_2 \cap W_1 = \varnothing$이므로 $C_2 \subset C_1$이 되어야 한다. 이는 C_1과 C_2가 서로소라는 가정에 모순이다.

(ii) $W_1 \cap W_2 = \varnothing$이다: 만약 $W_1 \cap W_2 \neq \varnothing$이라고 가정하자. 그러면 W_1과 W_2가 길연결이므로 정리 8.4.5에 의해 $W_1 \cup W_2$는 길연결되어 있다. 두 점 $a \in W_1$과 $b \in V_1 \cap W_2$를 택하자. 이러한 점 b는 (i)에 의해 존재한다. 그러면 $W_1 \cup W_2$이 길연결이므로 길

$$\alpha \colon I \to W_1 \cup W_2, \quad \text{s.t.} \quad \alpha(0) = a, \ \alpha(1) = b$$

이 존재한다. 그리고 $W_1 \cup W_2 \subset S^2 - C_1$이므로 $\alpha(I)$는 $S^2 - C_1$의 (길)연결된 부분집합이다. 그런데 $\{\alpha(I) \cap W_1, \alpha(I) \cap V_1\}$이 $\alpha(I)$의 열린분리가 되어 모순이다.

(iii) 참고로 $C_1 \cap W_2 = \varnothing$이고 $W_1 \cap W_2 = \varnothing$이므로 $W_2 \subset V_1$이다. 같은 방법으로 $W_1 \subset V_2$이다.

(iv) $\overline{W}_1 \cap \overline{W}_2 = \varnothing$이다:

$$\begin{aligned} \overline{W}_1 \cap \overline{W}_2 &= (W_1 \cup C_1) \cap (W_2 \cup C_2) \\ &= (W_1 \cap W_2) \cup (W_1 \cap C_2) \cup (C_1 \cap W_2) \cup (C_1 \cap C_2) \\ &= \varnothing \cap \varnothing \cap \varnothing \cap \varnothing = \varnothing. \end{aligned}$$

(iv) 이제 정리 17.8.14를 사용하여 $\overline{W}_1 \cup \overline{W}_2$이 S^2를 분리하지 못함을 보이자: 각각의 $i = 1, 2$에 대하여 $S^2 - \overline{W}_i = V_i$이 (길)연결된 집합이므로 $\overline{W}_i$는 S^2를 분리하지 못한다. 그리고 (iii)에 의해 $S^2 - \overline{W}_1 \cap \overline{W}_2 = S^2$이므로 $S^2 - \overline{W}_1 \cap \overline{W}_2$는 단순연결이다. 따라서 정리 17.8.14에 의해 $\overline{W}_1 \cup \overline{W}_2$이 S^2를 분리하지 못한다. 즉, $S^2 - \overline{W}_1 \cup \overline{W}_2$는 연결된 집합이다.

(v) 우리는 $W_3 = S^2 - \overline{W}_1 \cup \overline{W}_2$이라 하자. 그러면 $W_3 \neq \varnothing$이다: 만약 $W_3 = \varnothing$이라 가정하면 $S^2 = \overline{W}_1 \cup \overline{W}_2$이고 $\overline{W}_1 \cap \overline{W}_2 = \varnothing$이므로 $\{\overline{W}_1, \overline{W}_2\}$은 S^2의 닫힌분리가 된다. 이는 S^2가 연결공간이라는 사실에 모순이다.

(vi) W_1, W_2, W_3은 쌍마다 서로소인 $S^2 - C_1 \cup C_2$의 연결된 열린집합이고

$$W_1 \cup W_2 \cup W_3 = S^2 - C_1 \cup C_2$$

이므로 $S^2 - C_1 \cup C_2$은 정확히 3개의 연결성분 W_1, W_2, W_3을 갖는다.

(2) $\partial W_1 = C_1$이고 $\partial W_2 = C_2$이므로 우리는 $\partial W_3 = C_1 \cup C_2$임을 보이면 된다.

먼저 $x \in C_1$이라 하자. 그리고 U를 x의 임의의 열린근방이라 하자. 그러면 $C_1 \subset V_2$이므로 $U \cap V_2$도 x의 열린근방이다. 그리고 $x \in \partial V_1$이므로 $(U \cap V_2) \cap V_1 \neq \varnothing$이다. 그러므로 점 $y \in U \cap V_2 \cap V_1$가 존재한다. 그리고 $V_1 \cap \overline{W}_1 = \varnothing$이고 $V_2 \cap \overline{W}_2 = \varnothing$이므로 $y \notin \overline{W}_1$이고 $y \notin \overline{W}_2$이다. 따라서 $y \in W_3$이므로 $y \in U \cap W_3$이 되어 $U \cap W_3 \neq \varnothing$이다. 그러므로 $x \in \overline{W}_3$이다. 따라서 $C_1 \subset \overline{W}_3$이다. 같은 방법으로 $C_2 \subset \overline{W}_3$임을 보일 수 있으므로 $C_1 \cup C_2 \subset \overline{W}_3$이다.

한편 $x \notin W_3 \cup C_1 \cup C_2$이면 $x \in W_1 \cup W_2$이므로 $W_1 \cup W_2$는 x의 열린근방이다. 그런데 $(W_1 \cup W_2) \cap W_3 = \varnothing$이므로 $x \notin \overline{W}_3$이다. 따라서 $\overline{W}_3 = W_3 \cup C_1 \cup C_2$이다.

또한 W_3이 $C_1 \cup C_2$와 서로소인 열린집합이므로

$$\partial W_3 = \overline{W}_3 - W_3^\circ = W_3 \cup C_1 \cup C_2 - W_3 = C_1 \cup C_2$$

이다.

문제 17.8.9. (1) 기초정리 17.8.9의 증명과 같은 방법으로 보일 수 있다.

(2) 기초정리 17.8.10의 증명과 같은 방법으로 보일 수 있다.

(3) 정리 17.8.11의 증명과 같은 방법으로 보일 수 있다.

(4) 기초정리 17.8.12의 증명과 같은 방법으로 보일 수 있다.