제 4 장

연습문제 해답

연습문제 1.1

1. 행렬 A의 크기는 2×3, 행렬 D의 크기는 3×2.

2. -5

3. 0

4. $\begin{bmatrix} -10 & 7 \\ 12 & -2 \\ -4 & -2 \end{bmatrix}$

5. $\begin{bmatrix} 8 \\ 0 \\ -0 \end{bmatrix}$

6. 4차원, 성분의 개수는 120개.

7. 주어진 텐서 $T = [a_{lkij}]_{3\times2\times4\times5}$의 성분은 $a_{1111} = 1+1+1+1 = 4, \quad a_{1112} = 1+1+1+2 = 5$ $, \ \cdots, \quad a_{3245} = 3+2+4+5 = 14$ 이다. 이러한 성분 a_{lkij}를 모두 더한 값 s를 구하고자 할 때, 먼저 $l = 1$ 은 뒤의 첨자 k, i, j의 모든 값마다 더해지므로 $1 \times (2 \times 4 \times 5)$ 을 합에 포함시켜야 한다. $l = 2$, $l = 3$ 에 대해서도 마찬가지로 계산한다. 나머지 첨자의 값에 대해서도 이렇게 생각하여 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} s &= (1+2+3)\times(2\times4\times5) \\ &\quad +(1+2)\times(3\times4\times5) \\ &\quad +(1+2+3+4)\times(3\times2\times5) \\ &\quad +(1+2+3+4+5)\times(3\times2\times4) \\ &= 1080 \end{aligned}$$

연습문제 1.2

2. $\frac{1}{13}[3, -4, 12]$

3. $\|\mathbf{v}\| = \sqrt{6}$ 이므로, $2 = \sqrt{6}\cos\alpha$, $1 = \sqrt{6}\cos\beta$, $-1 = \sqrt{6}\cos\gamma$ 이다. 따라서 $\cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{6}}$, $\cos\beta = \frac{1}{\sqrt{6}}$, $\cos\gamma = \frac{-1}{\sqrt{6}}$ 이고, 이때 $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = \frac{4}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = 1$ 이 성립한다.

4. $\frac{\sqrt{10}}{5}$

5. $\|v\|\cos\theta = \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{10}}{5} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$

6. $[\frac{4}{5}, 0, \frac{2}{5}]$

7. $[\frac{1}{5}, -1, -\frac{2}{5}]$

8. 일차종속

연습문제 1.3

1. (1) 정의되지 않음 (7) $[-7]$

2. $\begin{bmatrix} 24 & -6 \\ -95 & 107 \end{bmatrix}$

4. $\begin{bmatrix} -16 & -6 \\ 168 & -170 \end{bmatrix}$

5. (1) $[\ 0 \quad \frac{1}{3} \quad \frac{1}{3} \quad \frac{1}{3}\ ]^T$ (2) $[\ \frac{2}{9} \quad \frac{2}{9} \quad \frac{2}{9} \quad \frac{1}{3}\ ]^T$

8. $x = 28$, $y = 25$, $z = 20$

9. (1) $\det A = 0$ (2) $x = \frac{1}{4}z + \frac{7}{12}$, $y = -\frac{5}{4}z + \frac{1}{12}$

연습문제 1.4

1. $f(\mathbf{b}_1) = f([1, 0, -1]) = [2, 0] = [1, 1] + [1, -1] = a_{11}\mathbf{c}_1 + a_{21}\mathbf{c}_2$, $f(\mathbf{b}_2) = f([1, 1, 0]) = [0, 2] = [1, 1] - [1, -1] = a_{12}\mathbf{c}_1 + a_{22}\mathbf{c}_2$, $f(\mathbf{b}_3) = f([1, 0, 1]) = [3, 1] = 2\,[1, 1] + [1, -1] = a_{13}\mathbf{c}_1 + a_{23}\mathbf{c}_2$ 로부터 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ 이다.

2. $f(\mathbf{b}_1) = f([1, 0]) = [1, 1] = 2\,[0, 1] + [1, -1] = a_{11}\mathbf{c}_1 + a_{21}\mathbf{c}_2$, $f(\mathbf{b}_2) = f([1, 1]) = [2, 0] = 2\,[0, 1] + 2\,[1, -1] = a_{12}\mathbf{c}_1 + a_{22}\mathbf{c}_2$ 로부터 $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ 이다.

3. 임의의 실수 $a, b \in \mathbb{R}$과 벡터 $[x_1, y_1], [x_2, y_2]$에 대하여

$$\begin{aligned} f(a[x_1, y_1] + b[x_2, y_2]) &= f([ax_1 + bx_2, ay_1 + by_2]) \\ &= [(ax_1 + bx_2) + (ay_1 + by_2), 2(ax_1 + bx_2) + 3(ay_1 + by_2)] \\ &= a[x_1 + y_1, 2x_1 + 3y_1] + b[x_2 + y_2, 2x_2 + 3y_2] \\ &= af([x_1, y_1]) + bf([x_2, y_2]) \end{aligned}$$

이므로 f는 선형사상이다. 이 선형사상의 행렬표현은

$$\begin{bmatrix} f([1,0])^T & f([0,1])^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

이다.

4. $f([0,0]+[0,0]) = f([0,0])+f([0,0])$으로부터 $f([0,0]) = 0$이다. 원점을 지나는 직선 $\ell : ax+by = 0$의 그래프는 $\{t\,[b,-a] \mid t \in \mathbb{R}\}$로 생각할 수 있고, 이 그래프의 선형사상 f에 의한 상 $\{f(t[b,-a]) \mid t \in \mathbb{R}\} = \{t\,f([b,-a]) \mid t \in \mathbb{R}\}$는 하나의 위치벡터 $f([b,-a])$에 임의의 실수 t를 곱하여 만든 벡터들의 집합이므로, 원점을 지나는 직선을 이룬다. 따라서 선형사상은 원점을 지나는 직선을 또 다른 원점을 지나는 직선으로 보낸다.

5. $f([x,y]) = [ax+by, cx+dy]$

6. $$\begin{aligned} R_{\theta_2} \circ R_{\theta_1} &= \begin{bmatrix} \cos\theta_2 & -\sin\theta_2 \\ \sin\theta_2 & \cos\theta_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta_1 & -\sin\theta_1 \\ \sin\theta_1 & \cos\theta_1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos\theta_2\cos\theta_1 - \sin\theta_2\sin\theta_1 & -\cos\theta_2\sin\theta_1 - \sin\theta_2\cos\theta_1 \\ \sin\theta_2\cos\theta_1 + \cos\theta_2\sin\theta_1 & -\sin\theta_2\sin\theta_1 + \cos\theta_2\cos\theta_1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos(\theta_1+\theta_2) & -\sin(\theta_1+\theta_2) \\ \sin(\theta_1+\theta_2) & \cos(\theta_1+\theta_2) \end{bmatrix} = R_{\theta_1+\theta_2} \end{aligned}$$

7. $$\begin{aligned} T_y \circ T_x &= \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = R_\pi \end{aligned}$$

8. $(A\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix})^T(A\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} a & b \end{bmatrix} A^T A \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$

9. $$\begin{aligned} f_{A_2,\mathbf{v}_2} \circ f_{A_1,\mathbf{v}_1}(\mathbf{x}) &= f_{A_2,\mathbf{v}_2}(A_1\mathbf{x}+\mathbf{v}_1) \\ &= A_2(A_1\mathbf{x}+\mathbf{v}_1)+\mathbf{v}_2 \\ &= A_2A_1\mathbf{x}+A_2\mathbf{v}_1+\mathbf{v}_2 \\ &= f_{A_2A_1,A_2\mathbf{v}_1+\mathbf{v}_2}(\mathbf{x}) \end{aligned}$$

10. $R_{[1,1,1],\pi/3} = \begin{bmatrix} \frac{4}{6} & \frac{(1-\sqrt{3})}{6} & \frac{4}{6} \\ \frac{4}{6} & \frac{4}{6} & \frac{-2}{6} \\ \frac{-2}{6} & \frac{4}{6} & \frac{4}{6} \end{bmatrix}$ 이므로 $[1,0,0]$의 상은 $[\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{-1}{3}]$이다.

11. $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

12. $\mathrm{Im}(f) = \{x[2,1]+y[3,2] : x,y \in \mathbb{R}\} = \mathrm{Span}\{[2,1],[3,2]\} = \mathbb{R}^2$

    $\mathrm{Ker}(f) = \{[x,y] : [2x+3y, x+2y] = [0,0]\} = \{[0,0]\}$

13. $\mathrm{null}(A) = \{[0, 0]\}$

$\mathrm{col}(A) = \mathrm{Span}\left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} \right\} = \mathbb{R}^2$

$\mathrm{row}(A) = \mathrm{Span}\{[2, 3], [1, 2]\} = \mathbb{R}^2$

14. $\mathrm{row}(A) = \mathrm{Span}\{[1, 2]\}$이고 $\mathrm{null}(A) = \mathrm{Span}\{\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}\}$이므로 $[a, 2a] \begin{bmatrix} -2b \\ b \end{bmatrix} = [0]$ 이다.

15. 열변환과 행변환을 이용하여 직접 계산하여 얻은 답과 다음과 같이 파이썬으로 구한 답을 비교하여 실질적으로 같음을 확인하도록 한다.

```
from sympy import *
# init_printing(use_unicode=True)
m=Matrix([[1,-1,3],[5,-4,-4],[7,-6,2]])
print("행공간:", m.rowspace() , '\n')
print("열공간:", m.columnspace(), '\n')
```

행공간: [Matrix([[1, -1, 3]]), Matrix([[0, 1, -19]])]

열공간: [Matrix([[1], [5], [7]]), Matrix([[-1], [-4], [-6]])]

연습문제 1.5

1. 직접 계산하여 답을 구한 후, 다음과 같이 파이썬으로 답을 확인할 수 있다.

```
from sympy import *
A = Matrix([[1,3],[4,2]])
t=symbols('t')
print("특성방정식:", A.charpoly(t).as_expr(), '\n')
print("고유값:", A.eigenvals(), '\n')
print("고유벡터:", A.eigenvects(), '\n')
```

특성방정식: t**2 - 3*t - 10

고유값: 5: 1, -2: 1

고유벡터: [(-2, 1, [Matrix([[-1], [1]])]), (5, 1, [Matrix([[3/4], [1]])])]

2. 직접 계산하여 답을 구한 후, 다음과 같이 파이썬으로 답을 확인할 수 있다.

```
from sympy import *
A = Matrix([[0, -1, 0],[0,0,1], [-4, -17,8]])
t=symbols('t')
print("특성방정식:", A.charpoly(t).as_expr(), '\n')
print("고유값:", A.eigenvals(), '\n')
print("고유벡터:", A.eigenvects(), '\n')
```

특성방정식: t**3 - 8*t**2 + 17*t - 4

고유값: 4: 1, 2 - sqrt(3): 1, sqrt(3) + 2: 1

고유벡터: [(4, 1, [Matrix([[-1/16], [1/4], [1]])]), (2 - sqrt(3), 1, [Matrix([[-1/(-2 + sqrt(3))**2], [-1/(-2 + sqrt(3))], [1]])]), (sqrt(3) + 2, 1, [Matrix([[-1/(-2 - sqrt(3))**2], [-1/(-2 - sqrt(3))], [1]])])]

3. 특성방정식은

$$p_A(t) = t^2 - (a+d)t + (ad - bc)$$

이고 이 이차방적식의 판별식은

$$D = (a+d)^2 - 4(ad - bc) = (\mathrm{tr}(A)^2 - 4\det(A)$$

이므로 $(\mathrm{tr}(A)^2 - 4\det(A) > 0$이면 이 행렬은 서로 다른 두 고유값을 갖는다. 따라서 대각화가능하다.

4. $D = (\mathrm{tr}(A)^2 - 4\det(A) = (a+c)^2 - 4(ac - b^2) = (a-c)^2 + 4b^2 \geq 0$이고, 만일 $a \neq c$이거나 $b \neq 0$이면 $D > 0$이므로 위의 연습문제 3으로 부터 대각화 가능하다. 만일 $a = c$이고 $b = 0$이면 주어진 행렬의 특성방정식은 $p_A(t) = (t-a)^2$이고 $\lambda = a$에 대응하는 고유공간은 R^2이므로 서로 일차독립인 2개의 고유벡터를 잡을 수 있다. 따라서 대각화가능하다.

5. 직접 계산하여 답을 구한 후, 다음과 같이 파이썬으로 답을 확인할 수 있다.

```
from sympy import *
A = Matrix([[1,6],[0,5]])
t=symbols('t')
print("특성방정식:", A.charpoly(t).as_expr(), '\n')
print("고유값:", A.eigenvals(), '\n')
print("고유벡터:", A.eigenvects(), '\n')
```

특성방정식: t**2 - 6*t + 5

고유값: 1: 1, 5: 1

고유벡터: [(1, 1, [Matrix([[1], [0]])]), (5, 1, [Matrix([[3/2], [1]])])]

6. $p_A(t) = (t-1)(t-b) - 6a = (t-4)(t+3)$으로부터 $b+1 = 1$, $b - 6a = -12$이다. 그러므로 $a = 2$, $b = 0$이다.

7. $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

8. 직접 계산하여 답을 구한 후, 다음과 같이 파이썬으로 답을 확인할 수 있다.

```
from sympy import *
init_printing(use_unicode=True)
A = Matrix([[-1, -2, -2],[1, 2, 1], [-1, -1, 0]])
t=symbols('t')
print("특성방정식", A.charpoly(t).as_expr(), '\n')
```

```
print("고유벡터", A.eigenvects(), '\n')
P, D = A.diagonalize()
print("P=", P, "D=", D, '\n')
```

특성방정식 t**3 - t**2 - t + 1

고유벡터 [(-1, 1, [Matrix([[2], [-1], [1]])]), (1, 2, [Matrix([[-1], [1], [0]]), Matrix([[-1], [0], [1]])])]

P= Matrix([[2, -1, -1], [-1, 1, 0], [1, 0, 1]]) D= Matrix([[-1, 0, 0], [0, 1, 0], [0, 0, 1]])

$D = P^{-1}AP$로 부터

$$\begin{aligned} A^{25} = PD^{25}P^{-1} &= \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \\ &= PDP^{-1} = A \end{aligned}$$

9. 직접 계산하여 답을 구한 후, 다음과 같이 파이썬으로 답을 확인할 수 있다.

```
from sympy import *
init_printing(use_unicode=True)
A = Matrix([[1,2],[2,4]])
t=symbols('t')
print("특성방정식", A.charpoly(t).as_expr(), '\n')
print("고유벡터", A.eigenvects(), '\n')
P, D = A.diagonalize()
print("P=", P, "D=", D, '\n')
```

특성방정식 t**2 - 5*t

고유벡터 [(0, 1, [Matrix([[-2], [1]])]), (5, 1, [Matrix([[1/2], [1]])])]

P= Matrix([[-2, 1], [1, 2]]) D= Matrix([[0, 0], [0, 5]])

10. $f_{P^{-1}AP}(t) = \det(tI - P^{-1}AP) = \det(P^{-1}(tI - A)P) = \det(tI - A) = f_A(t)$

11.

```
import numpy as np
def power_iteration(A, x, num_simulations: int):
    # A는 주어진 정사각행렬, x는 초기벡터, num_simulations는 반복실행할 횟수입니다.
    x_k = x
    for _ in range(num_simulations):
        # Ax를 계산합니다
        x_k1 = np.dot(A, x_k)
        # Ax의 크기를 계산합니다
        x_k1_norm = np.linalg.norm(x_k1)
        # x_{k+1}을 구합니다.
```

```python
        x_k = x_k1 / x_k1_norm
    return x_k
def power_iteration_ev(A,x, num_simulations: int):
    x_k=x
    for _ in range(num_simulations):
        x_k1 = np.dot(A, x_k)
        x_k1_norm = np.linalg.norm(x_k1)
        x_k = x_k1 / x_k1_norm
    return np.dot(np.transpose(x_k), np.dot(A, x_k))
print("우세한 고유벡터:",  power_iteration(np.array([[1, 2], [2, 1]]),
np.array([[1],[0]]), 100), '\n')
print("우세한 고유값:", power_iteration_ev(np.array([[1, 2], [2, 1]]),
np.array([[1],[0]]), 100), '\n')
```

우세한 고유벡터: [[0.70710678] [0.70710678]]

우세한 고유값: [[3.]]

12. 인접행렬은

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

이고 페이지랭크 알고리즘을 1000번 반복하여 이용하여 얻은 검색사이트의 권위 점수 순서는 다음과 같다.

```python
import numpy as np
def PageRank(A, num_simulations: int):
    # A^T A를 계산
    B = np.dot(np.transpose(A), A)
    # 행렬 A의 열을 더하여 권한벡터를 구한다.
    a_k=np.sum(A, axis=0)
    # PageRank algorithm을 적용
    for _ in range(num_simulations):
        a_k1 = np.dot(B, a_k)
        a_k1_norm = np.linalg.norm(a_k1)
        a_k = a_k1 / a_k1_norm
        # k번째 a_k를 인쇄
    return a_k
print("검색사이트의 권한:",
PageRank(np.array([[0,1, 0, 1, 0], [1,0,0,1,1], [0,1,0,0,1],
[0,0,1,0,1], [0,0,1,0,0]]), 1000))
```

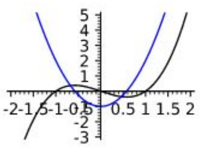
검색사이트의 권한: [0.29284432 0.39120217 0.2350792 0.46483044 0.69990964]
따라서 검색사이트의 순위는 사이트 5, 사이트 4, 사이트 2, 사이트 1, 사이트 3 순이다.

연습문제 2.1

1. (3) $x \neq 0$, $x \neq 2$
2. (5) $4\pi + \frac{\pi}{2}$
3. (4) $450°$
4. $l = \frac{\pi}{2}$, $S = \frac{3\pi}{2}$
5. (5) $\sqrt{2}$ (6) -1
6. e^2
7. (1) $0 \leq x \leq 9$ (2) $x \neq -2$, $x \neq -4$
9. $f^{-1}(x) = \sqrt{x^3 - 1}$, 또는 $f^{-1}(x) = -\sqrt{x^3 - 1}$. 정의역은 $x \geq 1$.
10. (3) $x = \ln\left(2 \pm \sqrt{3}\right)$
11. (5) $\cos^{-1}(\cos(\frac{5\pi}{2})) = \cos^{-1} 0 = \frac{\pi}{2}$ (6) $-\frac{1}{2}$

연습문제 2.2

1. (1) $y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$ (2) $y = \frac{1}{4}x + 1$
2. $y = 4x - 3$
3. $f'(x) = 3x^2 - 1$



4. $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, $x = 9$에서의 접선: $y = \frac{1}{6}x + \frac{3}{2}$. $\lim_{x\to 0^+} f'(x) = \infty$, $\lim_{x\to\infty} f'(x) = 0$.
5. (1) $f'(t) = \frac{1}{2t}(3t+1)\sqrt{t}$ (2) $f'(x) = \frac{2x^3+17x^2+20x+1}{(x+5)^2}$
6. $\left.\frac{ds}{d\theta}\right|_{\theta=45°} = -100$.
7. $\cos x$
8. $\sec^2 y$
9. (2) $\frac{8(x^5 \csc^2 x - 5x^4 \cot x)}{(1+x^5 \cot x)^9}$
10. $y' = \frac{2x}{y}$, $y'' = \frac{2}{y} - \frac{4x^2}{y^3}$
11. $\frac{dy}{dx} = \frac{y-x^2}{y^2-x}$, $(3/2, 3/2)$에서의 접선: $y = -x + 3$, $\frac{dy}{dx} = 0$ at $(\sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{4})$

12. $\frac{dy}{dx} = y\left(\frac{2}{x} - \frac{1}{3(2-x)} - \frac{8x}{1+x^2}\right)$, $(1, \frac{1}{16})$에서의 접선: $y = -\frac{7}{48}(x-1) + \frac{1}{16} = -\frac{7}{48}x + \frac{5}{24}$.

13. $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x \ln x}$

14. $\frac{dy}{dx} = -\frac{2}{\ln 2} \tan x$

15. e^{-2}

16. $\frac{1}{6}$

17. (3) $\frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}(\csc^{-1} x)^2}$

18. (3) $x^x \left((\ln x)^2 + \ln x + \frac{1}{x}\right) x^{x^x}$

연습문제 2.3

1. $-\frac{60}{\sqrt{85}}$ ft/sec

2. $\frac{132}{125}$ rad/sec

3. (1) $\frac{dh}{dt} = \frac{32}{\pi h^2}$ (2) $\frac{1}{2\pi}$

4. $\frac{\pi}{90}$

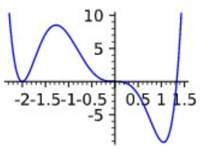
5. 18π cm^3

6. $(-\infty, -2)$: 감소, $(-2, 0)$: 증가, $(0, 1)$: 감소, $(1, \infty)$: 증가

7. (3) 변곡점 $t = \frac{1}{K} \ln A$, 위로 오목 $t < \frac{1}{K} \ln A$, 아래로 오목 $t > \frac{1}{K} \ln A$,

8. 극댓값 $f(-1) = 2$, 극솟값 $f(1) = -2$

9.



10. 최댓값 $f(\frac{3}{2}) = \frac{27}{8e^3}$, 최솟값 $f(4) = \frac{64}{e^8}$

11. 20,000 단위

12. (1) $f(0) = 125000$ (2) $t = 40$

연습문제 2.4

3. (1) 6 (2) $\frac{15}{2}$ (3) 0

4. (1) $-\pi$ (2) $1 - \frac{\pi}{2}$

5. (1) $-\frac{1}{\sin x} + C$ (3) $x - \tan^{-1} x + C$

7. (3) $x \tan^{-1} x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C$

8. (2) -1 (3) 0

9. (2) $\frac{16}{3} - \frac{4\sqrt{2}}{3}$

연습문제 2.5

1. $\frac{125}{6}$

2. $\frac{9}{2}$

3. $\frac{2}{3}$

4. $V = \displaystyle\int_0^8 A(y)\,dy = \int_0^8 \pi x^2\,dy = \int_0^8 \pi y^{\frac{2}{3}}\,dy = \frac{96\pi}{5}.$

5. $L = \displaystyle\int_1^e \sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx = \int_1^e \sqrt{1+\left(2x-\frac{1}{8x}\right)^2}\,dx = \int_1^2 \sqrt{\left(2x+\frac{1}{8x}\right)^2}\,dx$
$= \displaystyle\int_1^2 \left(2x+\frac{1}{8x}\right)\,dx = \left[x^2+\frac{1}{8}\,\ln x\right]_1^e = e^2 - \frac{7}{8}$

6. $L = \displaystyle\int_0^1 \sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}\,dt = \int_0^1 \sqrt{36t^2+36t^4}\,dt = \int_0^1 6t\,\sqrt{1+t^2}\,dt$
$= 3\displaystyle\int_1^2 \sqrt{u}\,du = 2(2\sqrt{2}-1)$

9. (2) 변수분리법을 이용하여 $(4y - \cos y)\,dy = 3x^2\,dx$ 로 두고 양변에 적분을 취하면 일반해 $2y^2 - \sin y = x^3 + C$ 를 얻는다. 여기에 주어진 초기값을 대입하면 $c = 0$ 이다. 따라서 초기값 문제의 해는 $2y^2 - \sin y = x^3$ 이다.
(3) 변수분리법을 이용하여 $\dfrac{1}{y^2}\,dy = -4x\,dx$ 로 두고 양변에 적분을 취하면 일반해 $-\dfrac{1}{y} = -2x^2 + C$ 를 얻는다. 여기에 주어진 초기값을 대입하면 $C = -1$ 이다. 따라서 초기값 문제의 해는 $y = \dfrac{1}{2x^2+1}$ 이다.

10. 주어진 미분방정식을 다음과 같이 양변에 변수를 분리하여 나타낸다.

$$\frac{3y^3+2}{y}\,dy = e^x\,dx, \qquad \text{즉,} \quad \left(3y^2+\frac{2}{y}\right)\,dy = e^x\,dx.$$

이제 양변에 적분을 취하여 계산하면

$$y^3 + 2\ln|y| = e^x + C$$

로 일반해를 얻는다.

(1) 일반해에 주어진 초기조건을 대입하면 $1 + 0 = 1 + C$ 으로부터 $C = 0$ 이므로, 특수해는 $y^3 + 2\ln|y| = e^x$ 이다.

(2) 일반해에 주어진 초기조건을 대입하면 $-1 + 0 = 1 + C$ 으로부터 $C = 2$ 이므로, 특수해는 $y^3 + 2\ln|y| = e^x + 2$ 이다.

연습문제 3.1

1. (1) $\frac{1}{2}\|\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR}\| = \frac{1}{2}\|(-1,0,1) \times (0,-1,1)\| = \frac{\sqrt{3}}{2}$

   (2) $\frac{1}{6}|\overrightarrow{OP} \cdot (\overrightarrow{OQ} \times \overrightarrow{OR}| = \frac{1}{3}$

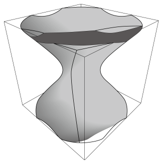
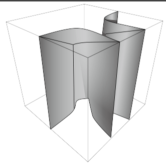
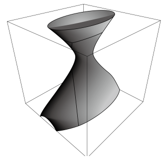
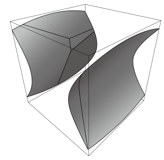
   (3) $\ell(t) = Q + t(R-Q) = (0,1,1) + t(1,-1,0) = (t, 1-t, 1),\ t \in \mathbb{R}$

   (4) $\left|\mathrm{Proj}_{\overrightarrow{OP}\times\overrightarrow{QR}}(\overrightarrow{OQ})\right| = \left|\mathrm{Proj}_{(0,0,-2)}(0,1,1)\right| = \left|\frac{(0,0,-2)\cdot(0,1,1)}{\sqrt{(0,0,-2)\cdot(0,0,-2)}}\right| = 1$

   (5) 법벡터 $N = \overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR} = (1,1,1)$이고 $P(1,1,0)$을 지나는 평면이므로 $(1,1,1)\cdot(x-1, y-1, z) = 0$으로부터 $x+y+z=2$이다.

   (6) $\left|\mathrm{Proj}_{\overrightarrow{PQ}\times\overrightarrow{PR}}(\overrightarrow{OP})\right| = \left|\frac{(1,1,1)\cdot(1,1,0)}{\sqrt{(1,1,1)\cdot(1,1,1)}}\right| = \frac{2}{\sqrt{3}}$

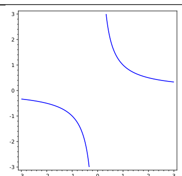
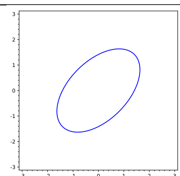
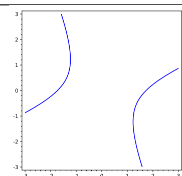
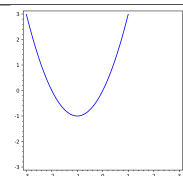
2.

(1)	(2)	(3)	(4)
			

3. 원기둥 $x^2 + y^2 = 1$을 매개화하면 $(\cos\theta, \sin\theta, z)$이 되고 이 점들이 $z = x^2 - y^2$을 만족해야 하므로 $z = \cos^2\theta - \sin^2\theta = \cos 2\theta$이다. 따라서 이 곡선의 매개화는

$$\ell(\theta) = (\cos\theta, \sin\theta, \cos 2\theta), \quad 0 \le \theta < 2\pi$$

4.

(1)	(2)	(3)	(4)
			

5. 직접 계산하면 됨

6. 평면위의 원 $x^2+y^2 = r^2$ 위의 점 $(x(t), y(t))$를 생각하면 $(x(t), y(t))\cdot(x(t), y(t)) = r^2$을 만족한다. 주어진 매개화가 t에 대해 미분가능하다고 하고 이를 미분하면 $(x'(t), y'(t))\cdot(x(t), y(t)) = 0$이다. 즉 원 위의 한 점에서의 접선과 위치벡터는 항상 서로 수직하다.

7. $\mathrm{r}'(t) = e^t(\cos t, \sin t) + e^t(-\sin t, \cos t)$이므로 $\|\mathrm{r}'(t)\| = \sqrt{e^{2t} + e^{2t}} = \sqrt{2}e^t$이다. 따라서 호의 길이는

$$\int_0^{\pi/2} \sqrt{2}e^t dt = \sqrt{2}(e^{\pi/2} - 1)$$

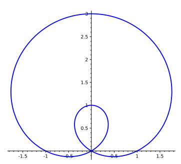
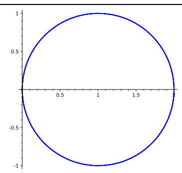
이다. 호의 길이 함수 $s(t) = \int_0^t \|\mathrm{r}'(t)\|\, dt = \sqrt{2}(e^t - 1)$의 역함수는 $t(s) = \ln\left(1 + s/\sqrt{2}\right)$이므로 호장재매개곡선은

$$\mathbf{r}(s) := \mathbf{r}\left(\ln(1 + s/\sqrt{2})\right) = \left(1 + s/\sqrt{2}\right)\left(\cos\left(\ln(1 + s/\sqrt{2})\right), \sin\left(\ln(1 + s/\sqrt{2})\right)\right)$$

이다.

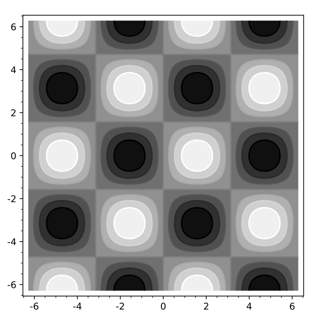
8. $T(t) = (-\frac{4}{5}\sin t, -\cos t, \frac{3}{5}\sin t)$
$\mathbf{r}''(t) = (-\frac{4}{5}\cos t, \sin t, \frac{3}{5}\cos t), \quad \kappa = \|\mathbf{r}''(t)\| = 1, \quad N(t) = \mathbf{r}''(t)$
$B(t) = T(t) \times N(t) = (-\frac{3}{5}, 0, \frac{4}{5})$
접촉원의 반지름은 1이고, 중심은 $\mathbf{r}(\pi/2) + \frac{1}{\kappa}N(\pi/2) = (0,0,0) + (0,1,0) = (0,1,0)$이다.

9.

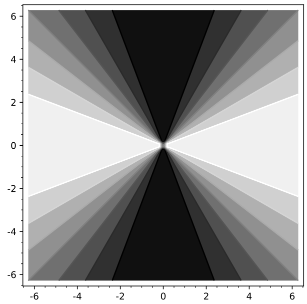
(1)	(2)
	

10. $P(1,1,1)$을 원기둥좌표로 나타내면 $(r,\theta,z) = (\sqrt{2}, \frac{\pi}{4}, 1)$이고, $Q(1,-1,\sqrt{2})$를 구면좌표계로 나타내면 $(\rho,\theta,\phi) = (2, \frac{7\pi}{4}, \frac{\pi}{4})$이다.

연습문제 3.2

1. 

2. $\lim_{(x,0)\to(0,0)} f(x,0) = 1, \quad \lim_{(0,y)\to(0,0)} f(0,y) = -1$이므로 연속이지 않음



3. $f_x(0,0)=0,\ f_y(0,0)=1,\ f_{xx}(0,0)=0,\ f_{xy}(0,0)=1,\ f_{yy}(0,0)=0$

4. $\nabla f(x,y)=(e^{-y},-xe^{-y}+5)$이므로

$$D_{\mathrm{v}}f(0,0)=\nabla f(0,0)\cdot \mathrm{v}=(1,5)\cdot(1,1)=6$$

5. $(0,0)$에서 기울기벡터는 (0, 0)이고 1차근사식은

$$(x,y)\ \mapsto 0$$

2차근사식은

$$(x,y)\ \mapsto xy$$

이다.

6.
```
var('x y t')
x = function('x')(t)
y = function('y')(t)
x=t^2 + t
y= cos(t)
f(u,v) = u^2 + v^3
```
연쇄법칙을 사용해 미분하면

$$4\,t^3-3\,\cos{(t)}^2\sin{(t)}+6\,t^2+2\,t$$

이고 $t=0$을 대입하면 0이다.

7. 주어진 곡면의 그래프는 $f(x,y,z)=xy-z=0$으로 주어지는 0-등위면이므로 이 곡면의 주어진 점 $(0,0,0)$에서의 법벡터는 $\nabla f(0,0,0)=(0,0,-1)$이고 $(0,0,0)$을 지나는 평면이므로 접평면의 방정식은 $z=0$이다.

8. $\nabla f(x,y) = (y+2, 2y+x+3) = (0,0)$으로부터 $(x,y) = (1,-2)$가 유일한 임계점이다. 이 점에서 헤세행렬을 구하면

$$H_f(1,-2) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

이고 $\det(H_f(1,-2)) = -1 < 0$이므로 주어진 점은 안장점이다.

9. $\nabla f(x,y) = (2x-1, 4y) = (0,0)$으로 부터 주어진 영역에 놓인 임계점은 $(1/2, 0)$뿐이고 이 점에서의 함수값은 $f(1/2,0) = -1/4$이다. 이제 제약조건 $x^2+y^2 = 4$일 때 함수 $f(x,y)$의 최대값과 최소값을 구하자. $\nabla g(x,y) = (2x, 2y) \mathbin{/\!/} \nabla f(x,y)$로 부터 $(2x-1, 4y) = \lambda(2x, 2y)$이고 이를 풀면 $2y(2-\lambda) = 0$으로부터 $y = 0$이든지 $\lambda = 2$이다. $y = 0$이면 제약조건으로부터 $x = \pm 2$가 된다. $\lambda = 2$이면 $x = -\frac{1}{2}$, $y = \pm\frac{\sqrt{15}}{2}$이다. 그러므로 라그랑즈승수법을 만족하는 점은 $(\pm 2, 0)$, $(\frac{1}{2}, \pm\frac{\sqrt{15}}{2})$등 4개이다. $f(2,0) = 2$, $f(-2,0) = 6$, $f(-\frac{1}{2}, \pm\frac{\sqrt{15}}{2}) = 1/4 + 15/2 + 1/2 = 33/4$이므로 최댓값은 $(-\frac{1}{2}, \pm\frac{\sqrt{15}}{2})$에서 $33/4$, 최솟값은 $(1/2, 0)$에서 $-1/4$이다.

10. $P(x_0, 0)$에서 타원 위의 점 (x,y)까지의 거리의 제곱을 $f(x,y)$라 두면 $f(x,y) = (x-x_0)^2 + y^2$이 되고 주어진 문제는 제약조건 $4x^2 + 9y^2 = 36$일 때 함수 $f(x,y)$의 최솟값을 구하는 것이다.

연습문제 3.3

1. $\displaystyle\int_{-2}^{2}\int_{x^2}^{16-x^2} 1 dydx = \frac{160}{3}$

2. $\displaystyle\int_0^{\pi}\int_0^1 \cos xe^y dydx = 0$

3. $\displaystyle\int_0^2\int_0^{y^2} \sin(y^3) dxdy = -\frac{1}{3}\cos(8) + \frac{1}{3}$

4. 반지름이 1인 원반 중 제 1사분면에 놓인 부분이므로 $\int_0^{\pi/2}\int_0^1 r\sqrt{1-r^2}\, drd\theta = \frac{\pi}{6}$

5. $\displaystyle\int_0^{\pi/4}\int_0^2 \frac{r}{1+r^2} drd\theta = \frac{\pi\ln(5)}{8}$

연습문제 3.4

1.
```python
import numpy as np
from sklearn.linear_model import LinearRegression
x = np.array([3, 4, 5, 6, 7, 8]).reshape((-1, 1))
y = np.array([35, 50, 45, 64, 66, 70])
model = LinearRegression().fit(x, y)
print('slope: m=', model.coef_, 'intercept: b=', model.intercept_, '\n')
print("10시간 공부한 경우 성적 예측:", 10* model.coef_ + model.intercept_, '\n')
```

slope: m= [6.91428571] intercept: b= 16.971428571428575

10시간 공부한 경우 성적 예측: [86.11428571]

2.
```
import numpy as np
from sklearn.linear_model import LinearRegression

x = [[2, 1], [3, 1.5], [4, 1], [5, 2], [6, 1], [7,2]]
y = [40, 60, 55, 75, 80,70]
x, y = np.array(x), np.array(y)
model = LinearRegression().fit(x, y)
print('slope: (w1, w2)=', model.coef_, 'intercept: b=', model.intercept_)
```

slope: (w1, w2)= [6.30829016 2.04663212] intercept: b= 32.04663212435231