Chapter 01 행렬(Matrices)

1.1절 선형방정식

1. (a) 방정식이 아니다.
   (b) 방정식이다.
   (c) 방정식이 아니다.
   (d) 방정식이다.
   (e) 방정식이다.
   (f) 방정식이다.
   (g) 방정식이다.
   (h) 방정식이 아니다.

2. (a) 비선형방정식이다.
   (b) 선형방정식이다.
   (c) 선형방정식이다.
   (d) 비선형방정식이다.
   (e) 선형방정식이다.
   (f) 비선형방정식이다.
   (g) 비선형방정식이다.
   (h) 비선형방정식이다.

3. (a) $x = 4,\ y = -1$
   (b) $x = -3,\ y = -2$
   (c) $x = 11,\ y = 6$
   (d) $x = \frac{1}{2},\ y = \frac{1}{3}$
   (e) $x = 5,\ y = 4$
   (f) $x = \frac{1}{2},\ y = \frac{1}{3}$
   (g) $x = \frac{42}{17},\ y = -\frac{12}{17}$
   (h) $x = \frac{42}{17},\ y = \frac{12}{17}$

4. (a) $x = 1,\ y = 2,\ z = 3$
   (b) $x = 1,\ y = 0,\ z = -2$
   (c) $x = -3,\ y = 2,\ z = 0$
   (d) $x = 1,\ y = 1,\ z = -2$
   (e) $x = 4,\ y = \frac{1}{2},\ z = -1$
   (f) $x = \frac{1}{2},\ y = -\frac{1}{3},\ z = 2$
   (g) $x = 0,\ y = 1,\ z = -2$
   (h) $x = \frac{1}{3},\ y = -\frac{1}{3},\ z = \frac{1}{3}$

5. (a) 연립선형방정식은 무수히 많은 해를 갖는다.
   (b) 연립선형방정식은 해를 갖지 않는다.
   (c) 연립선형방정식은 무수히 많은 해를 갖는다.
   (d) 연립선형방정식은 무수히 많은 해를 갖는다.
   (e) 연립선형방정식은 해를 갖지 않는다.
   (f) 연립선형방정식은 해를 갖지 않는다.
   (g) 연립선형방정식은 무수히 많은 해를 갖는다.
   (h) 연립선형방정식은 해를 갖지 않는다.

6. (a) $a = -4$ (b) $a = -9$
   (c) $a = \frac{1}{3}$ (d) $a = -\frac{1}{4}$
   (e) $a = -9$ (f) $a = -\frac{5}{6}$
   (g) $a = -\frac{3}{2}$ (h) $a = 2$

7. (a) $b = -5$ (b) $b = -4$
   (c) $b = -\frac{3}{2}$ (d) $b = 1$
   (e) $b \neq 2$인 모든 실수 (f) $b \neq 0$인 모든 실수
   (g) $b = \frac{1}{2}$ (h) $b = -\frac{1}{3}$

8. (a) 비자명한 해를 갖지 않는다. (b) 비자명한 해를 갖는다.
   (c) 비자명한 해를 갖는다. (d) 비자명한 해를 갖지 않는다.
   (e) 비자명한 해를 갖는다. (f) 비자명한 해를 갖지 않는다.
   (g) 비자명한 해를 갖는다. (h) 비자명한 해를 갖는다.

9. (a) 참 (b) 거짓
   (c) 참 (d) 거짓
   (e) 참 (f) 참
   (g) 참 (h) 거짓

1.2절 행렬의 정의

1. (a) A는 1×2 행렬이므로 $m = 1, n = 2$ 이다.
   (b) B는 1×5 행렬이므로 $m = 1, n = 5$ 이다.
   (c) C는 4×1 행렬이므로 $m = 4, n = 1$ 이다.
   (d) D는 3×1 행렬이므로 $m = 3, n = 1$ 이다.
   (e) E는 3×3 행렬이므로 $m = 3, n = 3$ 이다.
   (f) F는 2×4 행렬이므로 $m = 2, n = 4$ 이다.
   (g) G는 4×3 행렬이므로 $m = 4, n = 3$ 이다.
   (h) H는 3×4 행렬이므로 $m = 3, n = 4$ 이다.

2. (a) $a_{12} = 3$ (b) $a_{21} = 4$
   (c) $a_{22} = 8$ (d) $a_{33} = -7$
   (e) $a_{42} = -9$ (f) $a_{24} = 0$
   (g) $a_{35} = 9$ (h) $a_{45} = 10$

3. (a) A의 주대각 성분은 $-2, 9$이고 $tr(A) = 7$이다.
   (b) B의 주대각 성분은 e, π^3이고 $tr(B) = e + \pi^3$이다.
   (c) C의 주대각 성분은 x^2, w이고 $tr(C) = x^2 + w$이다.
   (d) D의 주대각 성분은 $\sqrt{2}, \frac{1}{5}$이고 $tr(D) = \sqrt{2} + \frac{1}{5}$이다.
   (e) E의 주대각 성분은 $5, -8, 3$이고 $tr(E) = 0$이다.
   (f) F의 주대각 성분은 d, c, k이고 $tr(F) = d + c + k$이다.
   (g) G의 주대각 성분은 $3, \sqrt{5}, 1, 0.5$이고 $tr(G) = 4.5 + \sqrt{5}$이다.
   (h) H의 주대각 성분은 x, z, x^2, z^3이고 $tr(H) = x + z + x^2 + z^3$이다.

4. (a) A는 단위행렬이 아니며 대각행렬도 아니다. 또한 A는 상삼각행렬도 아니고 하삼각행렬도 아니다.
   (b) B는 단위행렬이 아니며 대각행렬도 아니다. 또한 B는 상삼각행렬은 아니지만 하삼각행렬이다.
   (c) C는 단위행렬은 아니지만 대각행렬이다. 또한 C는 상삼각행렬이며 하삼각행렬이다.
   (d) D는 단위행렬은 아니지만 대각행렬이다. 또한 D는 상삼각행렬이며 하삼각행렬이다.
   (e) E는 단위행렬이 아니며 대각행렬도 아니다. 또한 E는 상삼각행렬은 아니지만 하삼각행렬이다.
   (f) F는 단위행렬은 아니지만 대각행렬이다. 또한 F는 상삼각행렬이며 하삼각행렬이다.
   (g) G는 단위행렬이 아니며 대각행렬도 아니다. 또한 G는 상삼각행렬은 아니지만 하삼각행렬이다.
   (h) H는 단위행렬이 아니며 대각행렬도 아니다. 또한 H는 상삼각행렬이지만 하삼각행렬은 아니다.

5. (a) $A^T = \begin{bmatrix} 0 & 5 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$
   (b) $B^T = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$
   (c) $C^T = \begin{bmatrix} 7 & 8 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
   (d) $D^T = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \\ 6 & 5 \\ 8 & 7 \end{bmatrix}$
   (e) $E^T = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
   (f) $F^T = \begin{bmatrix} 1 & 9 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 4 & 7 \end{bmatrix}$
   (g) $G^T = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}$
   (h) $H^T = \begin{bmatrix} 0 & a & 7 \\ 0 & b & 8 \\ 2 & c & 0 \\ 1 & d & 0 \\ 3 & e & 3 \end{bmatrix}$

6. (a) A는 대칭행렬이 아니다.
   (b) B는 대칭행렬이다.
   (c) C는 정사각행렬이 아니므로 대칭행렬이 아니다.
   (d) D는 정사각행렬이 아니므로 대칭행렬이 아니다.

(e) E 는 대칭행렬이다.
(f) F는 대칭행렬이 아니다.
(g) G는 대칭행렬이다.
(h) H는 대칭행렬이다.

7. (a) $a = -3$ (b) $b = -3$
(c) $a = 3, a = -2$ (d) $b = -\frac{1}{2}, b = 1$
(e) $a = 0, b = 2, c = 1$ (f) $a = 2, b = 2, c = 4$
(g) $a = 3, b = -3$ (h) $a = \frac{5}{2}, b = \frac{1}{2}, c = -\frac{9}{2}$

8. (a) $a = 3, b = -2, c = 3$
(b) $a = 3, b = \frac{5}{2}, c = \frac{4}{3}$
(c) $a = 3, b = 1, c = 5$
(d) $a = -1, b = -1, c = 0$
(e) $a = -1,\ b = 1,\ c = 2$
(f) $a = 0,\ b = 0,\ c = -1$
(g) $a = 1, b = -2, c = 3$
(h) $a = 4,\ b = -1,\ c = -2$

9. (a) 참 (b) 거짓
(c) 참 (d) 거짓
(e) 거짓 (f) 참
(g) 참 (h) 참

1.3절 행렬의 기본 연산

1. (a) $A + B = \begin{bmatrix} 6 & 1 \\ -1 & 7 \\ 2 & -6 \end{bmatrix}$ (b) $A - B = \begin{bmatrix} -2 & 5 \\ -1 & 1 \\ 4 & -4 \end{bmatrix}$

(c) $3A = \begin{bmatrix} 6 & 9 \\ -3 & 12 \\ 9 & -15 \end{bmatrix}$ (d) $-4B = \begin{bmatrix} -16 & 8 \\ 0 & -12 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}$

(e) $2A + 3B = \begin{bmatrix} 16 & 0 \\ -2 & 17 \\ 3 & -13 \end{bmatrix}$ (f) $3A - 4B = \begin{bmatrix} -10 & 17 \\ -3 & 0 \\ 13 & -11 \end{bmatrix}$

(g) $-\frac{1}{2}A + \frac{1}{3}B = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{13}{6} \\ \frac{1}{2} & -1 \\ -\frac{11}{6} & \frac{13}{6} \end{bmatrix}$ (h) $-\frac{2}{3}A - \frac{1}{2}B = \begin{bmatrix} -\frac{10}{3} & -1 \\ \frac{2}{3} & -\frac{25}{6} \\ -\frac{3}{2} & \frac{23}{6} \end{bmatrix}$

2. [증명] $A = [a_{ij}]_{m\times n}$, $B = [b_{ij}]_{m\times n}$ 이라 하면 $A - B = [a_{ij} - b_{ij}]_{m\times n}$ 이다. 따라서

$(A-B)^T = [a_{ij} - b_{ij}]^T_{m\times n} = [a_{ji} - b_{ji}]_{n\times m} = [a_{ji}]_{n\times m} - [b_{ji}]_{n\times m} = A^T - B^T$ 이다.

3. (a) $(A+B)^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 9 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$ (b) $(A-B)^T = \begin{bmatrix} 5 & 1 & -1 \\ 1 & -8 & -3 \end{bmatrix}$

(c) $(3A)^T = \begin{bmatrix} 9 & 3 & 12 \\ 12 & 0 & 9 \end{bmatrix}$ (d) $(-4B)^T = \begin{bmatrix} 8 & 0 & -20 \\ -12 & -32 & -24 \end{bmatrix}$

(e) $(0A)^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ (f) $(\frac{1}{2}B)^T = \begin{bmatrix} -1 & 0 & \frac{5}{2} \\ \frac{3}{2} & 4 & 3 \end{bmatrix}$

(g) $(2A+3B)^T = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 23 \\ 17 & 24 & 24 \end{bmatrix}$ (h) $(3A-2B)^T = \begin{bmatrix} 13 & 3 & 2 \\ 6 & -16 & -3 \end{bmatrix}$

4. (a) AB는 정의되지 않는다.
   (b) AB는 정의되고 AB의 크기는 4×4 이다.
   (c) AB는 정의되지 않는다.
   (d) AB는 정의되지 않는다.
   (e) AB는 정의되고 AB의 크기는 6×3이다.
   (f) AB는 정의되지 않는다.
   (g) AB는 정의되고 AB의 크기는 4×2 이다.
   (h) AB는 정의되고 AB의 크기는 5×7 이다.

5. (a) BA 는 정의되지 않는다.
   (b) BA 는 정의되고 BA 의 크기는 2×2 이다.
   (c) BA 는 정의되지 않는다.
   (d) BA 는 정의되지 않는다.
   (e) BA 는 정의되지 않는다.
   (f) BA 는 정의되고 BA 의 크기는 6×3 이다.
   (g) BA 는 정의되지 않는다.
   (h) BA 는 정의되지 않는다.

6. (a) $AB = \begin{bmatrix} -4 \\ 16 \end{bmatrix}$
   (b) B는 2×1 행렬이고 A는 2×2 행렬이므로 BA는 정의되지 않는다.
   (c) B는 2×1 행렬이고 C는 2×4 행렬이므로 BC는 정의되지 않는다.
   (d) C는 2×4 행렬이고 B는 2×1 행렬이므로 CB는 정의되지 않는다.
   (e) C는 2×4 행렬이고 D는 3×2 행렬이므로 CD는 정의되지 않는다.
   (f) $DC = \begin{bmatrix} 20 & 14 & -3 & -22 \\ 12 & 15 & -4 & -11 \\ 0 & 3 & -1 & 1 \end{bmatrix}$
   (g) $EF = [3]$

(h) $FE = \begin{bmatrix} -6 & 18 & -9 \\ -4 & 12 & -6 \\ -2 & 6 & -3 \end{bmatrix}$

7. (a) $AB = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ (b) $A^T B^T = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 6 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

(c) $BA = \begin{bmatrix} 2 & 6 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ (d) $B^T A^T = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

(e) CD^T는 정의되지 않는다. (f) $C^T D$는 정의되지 않는다.

(g) $C^T D^T = [\,-4\,]$ (h) $D^T C^T = \begin{bmatrix} -2 & -6 & -14 \\ -3 & -9 & -21 \\ 1 & 3 & 7 \end{bmatrix}$

8. (a) $A^0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ (b) $A^2 = \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

(c) $A^3 = \begin{bmatrix} 1 & -6 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ (d) $A^4 = \begin{bmatrix} 1 & -8 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

(e) $B^0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ (f) $B^2 = \begin{bmatrix} 10 & 6 \\ 9 & 7 \end{bmatrix}$

(g) $B^3 = \begin{bmatrix} 38 & 26 \\ 39 & 25 \end{bmatrix}$ (h) $B^4 = \begin{bmatrix} 154 & 102 \\ 153 & 103 \end{bmatrix}$

9. $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$이라 하면 $(A+B)^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$이고 $A^2 + 2AB + B^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$이다. 따라서 $(A+B)^2 \neq A^2 + 2AB + B^2$이다.

10.
$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ 이라 하면 $A + B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $A - B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$, $A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $B^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$이다. 따라서 $(A+B)(A-B) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = A^2 - B^2$이다.

11. (a) $(A+B)C = \begin{bmatrix} -4 & -3 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$ (b) $AC + BC = \begin{bmatrix} -4 & -3 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$

(c) $A(B+C) = \begin{bmatrix} -8 & 4 \\ 11 & -25 \end{bmatrix}$ (d) $AB + AC = \begin{bmatrix} -8 & 4 \\ 11 & -25 \end{bmatrix}$

(e) $A(BC) = \begin{bmatrix} -20 & -18 \\ 56 & 54 \end{bmatrix}$ (f) $(AB)C = \begin{bmatrix} -20 & -18 \\ 56 & 54 \end{bmatrix}$

(g) $(3A)B = \begin{bmatrix} -18 & 12 \\ 54 & -48 \end{bmatrix}$ (h) $A(3B) = \begin{bmatrix} -18 & 12 \\ 54 & -48 \end{bmatrix}$

12. (a) $A_1 \bigcirc A_2 = [\,18 \quad -2 \quad -9\,]$ (b) $B_1 \bigcirc B_2 = \begin{bmatrix} 15 \\ 4 \end{bmatrix}$

(c) $C_1 \bigcirc C_2 = \begin{bmatrix} -6 & -35 \\ -12 & 40 \end{bmatrix}$ (d) $D_1 \bigcirc D_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 27 \end{bmatrix}$

(e) $E_1 \bigcirc E_2 = \begin{bmatrix} 28 & 9 & -10 \\ -10 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ (f) $F_1 \bigcirc F_2 = \begin{bmatrix} 12 & 0 \\ 0 & 6 \\ -15 & 0 \end{bmatrix}$

(g) $G_1 \bigcirc G_2 = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 3 \\ 0 & 16 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ (h) $H_1 \bigcirc H_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

13. (a) 거짓 (b) 참
(c) 거짓 (d) 거짓
(e) 참 (f) 거짓
(g) 거짓 (h) 참

Chapter 02 연립선형방정식 (Systems of Linear Equations)

2.1절 가우스 소거법

1. (a) $\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ -3 \end{bmatrix}$, 첨가행렬은 $\begin{bmatrix} 2 & 5 & : & -2 \\ 3 & -4 & : & -3 \end{bmatrix}$

(b) $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \end{bmatrix}$, 첨가행렬은 $\begin{bmatrix} 0 & -1 & : & 5 \\ 2 & 3 & : & 4 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, 첨가행렬은 $\begin{bmatrix} 3 & -1 & : & 0 \\ 2 & 5 & : & 0 \end{bmatrix}$

(d) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}$, 첨가행렬은 $\begin{bmatrix} 1 & 0 & : & 4 \\ 2 & -1 & : & 3 \end{bmatrix}$

(e) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 4 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}$, 첨가행렬은 $\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & : & -1 \\ 4 & -2 & 1 & : & 0 \\ 0 & -2 & 3 & : & 4 \end{bmatrix}$

(f) $\begin{bmatrix} 2 & 0 & -7 \\ 3 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ -3 \\ 9 \end{bmatrix}$, 첨가행렬은 $\begin{bmatrix} 2 & 0 & -7 & : & -2 \\ 3 & 4 & 0 & : & -3 \\ 0 & 2 & 3 & : & 9 \end{bmatrix}$

(g) $\begin{bmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$, 첨가행렬은 $\begin{bmatrix} 2 & 3 & -4 & : & 0 \\ 0 & 2 & 3 & : & 1 \\ 0 & 0 & 4 & : & 3 \end{bmatrix}$

(h) $\begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \\ 4 & -3 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -8 \\ 7 \end{bmatrix}$, 첨가행렬은 $\begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & : & 1 \\ 3 & -1 & 0 & : & -8 \\ 4 & -3 & -1 & : & 7 \end{bmatrix}$

2. (a) 행렬 A의 3행의 선행계수인 3의 위치가 2행의 선행계수인 2의 위치보다 오른쪽에 있지 않으므로 A는 행 사다리꼴이 아니다.
(b) 행렬 B는 행 사다리꼴이다.

(c) 행렬 C는 행 사다리꼴이다.

(d) 행렬 D의 2행의 선행계수인 1의 위치가 1행의 선행계수인 -1의 위치보다 오른쪽에 있지 않으므로 D는 행 사다리꼴이 아니다.

(e) 행렬 E는 행 사다리꼴이다.

(f) 행렬 F의 2행의 선행계수인 1의 위치가 1행의 선행계수인 1의 위치보다 오른쪽에 있지 않으므로 F는 행 사다리꼴이 아니다.

(g) 행렬 G의 성분이 모두 0인 행이 맨 아래인 3행에 위치하지 않았으므로 G는 행 사다리꼴이 아니다.

(h) H는 행 사다리꼴이다.

3. (a) A의 행 사다리꼴은 $\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$이다.

(b) B의 행 사다리꼴은 $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$이다.

(c) C의 행 사다리꼴은 $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$이다.

(d) D의 행 사다리꼴은 $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$이다.

(e) E의 행 사다리꼴은 $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$이다.

(f) F의 행 사다리꼴은 $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$이다.

(g) G의 행 사다리꼴은 $\begin{bmatrix} 0 & 5 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$이다.

(h) H의 행 사다리꼴은 $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$이다.

4. (a) $x_1 = 2,\ x_2 = -3$ (b) $x_1 = -1,\ x_2 = 5$

(c) $x_1 = 4,\ x_2 = 1$ (d) $x_1 = -3,\ x_2 = -3$

(e) $x_1 = 5,\ x_2 = -7,\ x_3 = -4$ (f) $x_1 = 5,\ x_2 = -11,\ x_3 = 5$

(g) $x_1 = -6,\ x_2 = -5,\ x_3 = 3$ (h) $x_1 = -\frac{21}{5},\ x_2 = \frac{28}{5},\ x_3 = \frac{6}{5}$

5. (a) 해가 무수히 많다. (b) 해를 갖지 않는다.

(c) 해가 무수히 많다. (d) 해를 갖지 않는다.

(e) 해가 무수히 많다. (f) 해가 무수히 많다.

(g) 해를 갖지 않는다. (h) 해를 갖지 않는다.

6. (a) 행렬 A의 2행의 선행계수를 제외한 나머지 성분이 1과 0이므로 A는 기약행 사다리꼴이 아니다.

(b) 행렬 B의 2행의 선행계수가 1행의 선행계수의 위치보다 오른쪽에 있지 않으므로 B는 기약행 사다리꼴이 아니다.

(c) 행렬 C는 기약행 사다리꼴이다.

(d) 행렬 D의 2행의 선행계수를 제외한 나머지 성분이 6과 0이므로 D는 기약행 사다리꼴이 아니다.

(e) 행렬 E의 2행의 선행계수가 1이 아니므로 E는 기약행 사다리꼴이 아니다.

(f) 행렬 F는 기약행 사다리꼴이다.

(g) 행렬 G의 1행의 모든 성분이 0인데 맨 아래에 위치하지 않았으므로 G는 기약행 사다리꼴이 아니다.

(h) 행렬 H는 기약행 사다리꼴이다.

7. (a) A의 기약행 사다리꼴은 $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$이다.

(b) B의 기약행 사다리꼴은 $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$이다.

(c) C의 기약행 사다리꼴은 $\begin{bmatrix} 1 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$이다.

(d) D의 기약행 사다리꼴은 $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$이다.

(e) E의 기약행 사다리꼴은 $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$이다.

(f) F의 기약행 사다리꼴은 $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$이다.

(g) G의 기약행 사다리꼴은 $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{5}{3} \\ 0 & 1 & 0 & 2 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -\frac{4}{3} \end{bmatrix}$이다.

(h) H의 기약행 사다리꼴은 $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{7} & -2 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{10}{7} & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{7} & 1 \end{bmatrix}$이다.

8. (a) $x_1 = 2,\ x_2 = -3$ (b) $x_1 = -1,\ x_2 = 5$

(c) $x_1 = 4,\ x_2 = 1$ (d) $x_1 = -3,\ x_2 = -3$

(e) $x_1 = 5,\ x_2 = -7,\ x_3 = -4$ (f) $x_1 = 5,\ x_2 = -11,\ x_3 = 5$

(g) $x_1 = -6,\ x_2 = -5,\ x_3 = 3$ (h) $x_1 = -\frac{21}{5},\ x_2 = \frac{28}{5},\ x_3 = \frac{6}{5}$

9. (a) $\{ (\frac{2}{3}t, t) : t \in \mathbb{R} \}$

(b) $\{ (\frac{1}{2}t + \frac{1}{2}, t) : t \in \mathbb{R} \}$

(c) $\{ (4 - 2s - 3t, s, t) : s, t \in \mathbb{R} \}$

(d) $\{(1-\frac{1}{2}t, s, t) : s, t \in \mathbb{R}\}$
(e) $\{(1+r-s+t, r, s, t) : r, s, t \in \mathbb{R}\}$
(f) $\{(4t, r, s, t) : r, s, t \in \mathbb{R}\}$
(g) $\{(5-r+t, r, s, t) : r, s, t \in \mathbb{R}\}$
(h) $\{(5-s+t, r, s, t) : r, s, t \in \mathbb{R}\}$

10. (a) 연립선형방정식의 해는 $\{(1-4t, 2+2t, t) : t \in \mathbb{R}\}$이다.
(b) 연립선형방정식의 해는 $\{(-t, 3, t) : t \in \mathbb{R}\}$이다.
(c) 연립선형방정식의 해는 $\{(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}-\frac{4}{3}t, t) : t \in \mathbb{R}\}$이다.
(d) 연립선형방정식의 해는 $\{(t, -2t, t) : t \in \mathbb{R}\}$이다.
(e) 연립선형방정식의 해는 $\{(3-2s-t, -\frac{1}{2}+\frac{1}{2}s-\frac{1}{2}t, s, t) : s, t \in \mathbb{R}\}$이다.
(f) 연립선형방정식의 해는 $\{(2-3s-t, s, \frac{1}{2}-\frac{1}{2}t, t) : s, t \in \mathbb{R}\}$이다.
(g) 연립선형방정식의 해는 $\{(t, -1, 1-t, t) : t \in \mathbb{R}\}$이다.
(h) 연립선형방정식의 해는 $\{(3-t, t, -1, -1) : t \in \mathbb{R}\}$이다.

11. (a) 연립선형방정식의 해는 $\{(1-4t, 2+2t, t) : t \in \mathbb{R}\}$이다.
(b) 연립선형방정식의 해는 $\{(-t, 3, t) : t \in \mathbb{R}\}$이다.
(c) 연립선형방정식의 해는 $\{(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}-\frac{4}{3}t, t) : t \in \mathbb{R}\}$이다.
(d) 연립선형방정식의 해는 $\{(t, -2t, t) : t \in \mathbb{R}\}$이다.
(e) 연립선형방정식의 해는 $\{(3-2s-t, -\frac{1}{2}+\frac{1}{2}s-\frac{1}{2}t, s, t) : s, t \in \mathbb{R}\}$이다.
(f) 연립선형방정식의 해는 $\{(2-3s-t, s, \frac{1}{2}-\frac{1}{2}t, t) : s, t \in \mathbb{R}\}$이다.
(g) 연립선형방정식의 해는 $\{(t, -1, 1-t, t) : t \in \mathbb{R}\}$이다.
(h) 연립선형방정식의 해는 $\{(3-t, t, -1, -1) : t \in \mathbb{R}\}$이다.

12. (a) 참
(b) 거짓
(c) 참
(d) 거짓
(e) 거짓
(f) 거짓
(g) 거짓
(h) 참

2.2절 행렬식

1. (a) $\det(A) = -10$
(b) $\det(B) = -27$
(c) $\det(C) = 10$
(d) $\det(D) = 6$
(e) $\det(E) = 0$
(f) $\det(F) = 0$
(g) $\det(G) = 40$
(h) $\det(H) = -2$

2. (a) $\text{Det}(A) = 4$ (b) $\text{Det}(B) = -60$
(c) $\text{Det}(C) = 20$ (d) $\text{Det}(D) = -10$
(e) $\text{Det}(E) = -49$ (f) $\text{Det}(F) = 129$
(g) $\text{Det}(G) = 0$ (h) $\text{Det}(H) = 0$

3. (a) $M_{23} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 6 & 1 \end{vmatrix} = -17$, $M_{13} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 1$, $C_{23} = 17$, $C_{31} = 1$

(b) $M_{23} = \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ -3 & 11 \end{vmatrix} = 21$, $M_{31} = \begin{vmatrix} -4 & 5 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 5$, $C_{23} = -21$, $C_{31} = 5$

(c) $M_{23} = \begin{vmatrix} -2 & -3 \\ 7 & 4 \end{vmatrix} = 13$, $M_{31} = \begin{vmatrix} -3 & -7 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 7$, $C_{23} = -13$, $C_{31} = 7$

(d) $M_{23} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -3 & -4 \end{vmatrix} = 5$, $M_{31} = \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ -4 & 0 \end{vmatrix} = 0$, $C_{23} = -5$, $C_{31} = 0$

(e) $M_{23} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & 0 \\ 6 & 7 & 9 \end{vmatrix} = -90$, $M_{31} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = -42$, $C_{23} = 90$, $C_{31} = -42$

(f) $M_{23} = \begin{vmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} = -20$, $M_{31} = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} = -20$, $C_{23} = 20$, $C_{31} = -20$

(g) $M_{23} = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 5 \end{vmatrix} = 3$, $M_{31} = \begin{vmatrix} -2 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & -2 \\ -2 & 0 & 5 \end{vmatrix} = -2$, $C_{23} = -3$, $C_{31} = -2$

(h) $M_{23} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 9 \end{vmatrix} = 0$, $M_{31} = \begin{vmatrix} 0 & 3 & 0 \\ -3 & 0 & -4 \\ 5 & 0 & 9 \end{vmatrix} = 21$, $C_{23} = 0$, $C_{31} = 21$

4. (a) $\text{Det}(A) = 4$ (b) $\text{Det}(B) = -60$
(c) $\text{Det}(C) = 20$ (d) $\text{Det}(D) = -10$
(e) $\text{Det}(E) = -4$ (f) $\text{Det}(F) = 125$
(g) $\text{Det}(G) = -146$ (h) $\text{Det}(H) = 10$

5. (a) $\text{Det}(A) = -49$ (b) $\text{Det}(B) = 129$
(c) $\text{Det}(C) = 0$ (d) $\text{Det}(D) = 0$
(e) $\text{Det}(E) = -4$ (f) $\text{Det}(F) = 125$
(g) $\text{Det}(G) = -146$ (h) $\text{Det}(H) = 10$

6. (a) $\text{Det}(A) = 30$ (b) $\text{Det}(B) = -25$
(c) $\text{Det}(C) = 60$ (d) $\text{Det}(D) = -18$
(e) $\text{Det}(E) = -32$ (f) $\text{Det}(F) = -105$
(g) $\text{Det}(G) = 40$ (h) $\text{Det}(H) = -18$

7. (a) $\text{Det}(A) = 7$ (b) $\text{Det}(B) = -7$
(c) $\text{Det}(C) = 21$ (d) $\text{Det}(D) = -168$
(e) $\text{Det}(E) = 14$ (f) $\text{Det}(F) = -42$

(g) $\text{Det}(G) = 7$ (h) $\text{Det}(H) = 0$

8. (a) $\text{Det}(A) = 3$ (b) $\text{Det}(B) = 20$
   (c) $\text{Det}(C) = 14$ (d) $\text{Det}(D) = -9$
   (e) $\text{Det}(E) = 0$ (f) $\text{Det}(F) = 0$
   (g) $\text{Det}(G) = 24$ (h) $\text{Det}(H) = -65$

9. (a) $\text{Det}(4A) = -64$ (b) $\text{Det}(-3A^2) = 144$
   (c) $\text{Det}(A^3) = -64$ (d) $\text{Det}(2A^4) = 1024$
   (e) $\text{Det}(3B) = \dfrac{27}{2}$ (f) $\text{Det}(-4B^2) = -16$
   (g) $\text{Det}(B^3) = \dfrac{1}{8}$ (h) $\text{Det}(4B^4) = 4$

10. (a) $\text{Det}(AB) = 12 = \text{Det}(BA)$ (b) $\text{Det}(AB) = -264 = \text{Det}(BA)$
    (c) $\text{Det}(AB) = -36 = \text{Det}(BA)$ (d) $\text{Det}(AB) = 0 = \text{Det}(BA)$
    (e) $\text{Det}(AB) = -104 = \text{Det}(BA)$ (f) $\text{Det}(AB) = 0 = \text{Det}(BA)$
    (g) $\text{Det}(AB) = 7 = \text{Det}(BA)$ (h) $\text{Det}(AB) = 0 = \text{Det}(BA)$

11. (a) 거짓 (b) 참
    (c) 참 (d) 거짓
    (e) 거짓 (f) 참
    (g) 거짓 (h) 참

2.3절 역행렬

1. (a) 역행렬 관계이다. (b) 역행렬 관계가 아니다.
   (c) 역행렬 관계이다. (d) 역행렬 관계이다.
   (e) 역행렬 관계가 아니다. (f) 역행렬 관계이다.
   (g) 역행렬 관계이다. (h) 역행렬 관계가 아니다.

2. (a) 행렬 A가 가역행렬이라면 적당한 2차 정사각행렬 $X = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$가 존재하여

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 12 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

이 성립해야 한다. 행렬의 곱에 의하여

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 12 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+4c & b+4d \\ 3a+12c & 3b+12d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

이고 행렬의 상등에 의하여

$$\begin{cases} a+4c = 1 \\ 3a+12c = 0 \end{cases}$$

이어야 하는데 이 연립선형방정식을 만족하는 실수 a와 c는 존재하지 않는다.

(b)~(h)는 (a)와 같은 방식으로 증명한다.

3. (a) $\mathrm{Det}(A) = -36 \neq 0$ 이므로 A는 가역행렬이다.
   (b) $\mathrm{Det}(B) = 0$ 이므로 B는 비가역행렬이다.
   (c) $\mathrm{Det}(C) = 0$ 이므로 C는 비가역행렬이다.
   (d) $\mathrm{Det}(D) = 18 \neq 0$ 이므로 D는 가역행렬이다.
   (e) $\mathrm{Det}(E) = -6 \neq 0$ 이므로 E는 가역행렬이다.
   (f) $\mathrm{Det}(F) = -4 \neq 0$ 이므로 F는 가역행렬이다.
   (g) $\mathrm{Det}(G) = -2 \neq 0$ 이므로 G는 가역행렬이다.
   (h) $\mathrm{Det}(H) = 0$ 이므로 H는 비가역행렬이다.

4. (a) $A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \end{bmatrix}$ (b) $B^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & \frac{2}{5} \\ -\frac{2}{5} & -\frac{3}{5} \end{bmatrix}$

   (c) $C^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$ (d) $D^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & 0 \end{bmatrix}$

   (e) E의 역행렬은 없다. (f) F의 역행렬은 없다.

   (g) $G^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{6} & -\frac{1}{6} \\ \frac{1}{30} & \frac{1}{30} \end{bmatrix}$ (h) $H^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{8} & \frac{1}{16} \\ \frac{1}{10} & -\frac{1}{20} \end{bmatrix}$

5. (a) A는 기본행렬이다. (b) B는 기본행렬이 아니다.
   (c) C는 기본행렬이 아니다. (d) D는 기본행렬이다.
   (e) E는 기본행렬이다. (f) F는 기본행렬이 아니다.
   (g) G는 기본행렬이 아니다. (h) H는 기본행렬이 아니다.

6. (a) $A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -5 & 7 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ (b) $B^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & -\frac{1}{2} \\ -2 & -\frac{3}{2} \end{bmatrix}$

   (c) $C^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & -3 \\ \frac{3}{2} & \frac{5}{2} \end{bmatrix}$ (d) $D^{-1} = \begin{bmatrix} -5 & -8 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$

   (e) $E^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{2}{9} & -\frac{1}{9} & 1 \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -2 \\ \frac{1}{9} & -\frac{4}{9} & 1 \end{bmatrix}$ (f) $F^{-1} = \frac{1}{29}\begin{bmatrix} -10 & 12 & 5 \\ 11 & -19 & 9 \\ 4 & 1 & -2 \end{bmatrix}$

   (g) $G^{-1} = \frac{1}{30}\begin{bmatrix} 3 & 7 & 5 \\ 0 & -10 & 10 \\ -9 & -11 & 5 \end{bmatrix}$ (h) $H^{-1} = \frac{1}{56}\begin{bmatrix} 32 & 22 & -7 \\ -16 & -4 & 14 \\ -8 & -2 & -7 \end{bmatrix}$

7. (a) 여인수행렬$=\begin{bmatrix} 9 & -2 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}$, $\quad adj(A)=\begin{bmatrix} 9 & -4 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$

(b) 여인수행렬$=\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -7 & -3 \end{bmatrix}$, $\quad adj(B)=\begin{bmatrix} 1 & -7 \\ -3 & -3 \end{bmatrix}$

(c) 여인수행렬$=\begin{bmatrix} 17 & -2 \\ -11 & -1 \end{bmatrix}$, $\quad adj(C)=\begin{bmatrix} 17 & -11 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$

(d) 여인수행렬$=\begin{bmatrix} 9 & 3 \\ 7 & -2 \end{bmatrix}$, $\quad adj(D)=\begin{bmatrix} 9 & 7 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$

(e) 여인수행렬$=\begin{bmatrix} -1 & 4 & -8 \\ 6 & -24 & 11 \\ -15 & 23 & -9 \end{bmatrix}$, $\quad adj(E)=\begin{bmatrix} -1 & 6 & -15 \\ 4 & -24 & 23 \\ -8 & 11 & -9 \end{bmatrix}$

(f) 여인수행렬$=\begin{bmatrix} -14 & 21 & 4 \\ 10 & -15 & -2 \\ 0 & 3 & 0 \end{bmatrix}$, $\quad adj(F)=\begin{bmatrix} -14 & 10 & 0 \\ 21 & -15 & 3 \\ 4 & -2 & 0 \end{bmatrix}$

(g) 여인수행렬$=\begin{bmatrix} -6 & -12 & 10 \\ -12 & 3 & 11 \\ -12 & -24 & 2 \end{bmatrix}$, $\quad adj(G)=\begin{bmatrix} -6 & -12 & -12 \\ -12 & 3 & -24 \\ 10 & 11 & 2 \end{bmatrix}$

(h) 여인수행렬$=\begin{bmatrix} -13 & 12 & 4 \\ 5 & 3 & 1 \\ 19 & -15 & -16 \end{bmatrix}$, $\quad adj(H)=\begin{bmatrix} -13 & 5 & 19 \\ 12 & 3 & -15 \\ 4 & 1 & -16 \end{bmatrix}$

8. (a) $A^{-1}=\begin{bmatrix} 9 & -4 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$ (b) $B^{-1}=-\dfrac{1}{24}\begin{bmatrix} 1 & -7 \\ -3 & -3 \end{bmatrix}$

(c) $C^{-1}=-\dfrac{1}{39}\begin{bmatrix} 17 & -11 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$ (d) $D^{-1}=-\dfrac{1}{39}\begin{bmatrix} 9 & 7 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$

(e) $E^{-1}=-\dfrac{1}{37}\begin{bmatrix} -1 & 6 & -15 \\ 4 & -24 & 23 \\ -8 & 11 & -9 \end{bmatrix}$ (f) $F^{-1}=\dfrac{1}{6}\begin{bmatrix} -14 & 10 & 0 \\ 21 & -15 & 3 \\ 4 & -2 & 0 \end{bmatrix}$

(g) $G^{-1}=-\dfrac{1}{54}\begin{bmatrix} -6 & -12 & -12 \\ -12 & 3 & -24 \\ 10 & 11 & 2 \end{bmatrix}$ (h) $H^{-1}=\dfrac{1}{33}\begin{bmatrix} -13 & 5 & 19 \\ 12 & 3 & -15 \\ 4 & 1 & -16 \end{bmatrix}$

9. (a) $(AB)^{-1}=\begin{bmatrix} 8 & -5 \\ 35 & -22 \end{bmatrix}$ (b) $(BA)^{-1}=\begin{bmatrix} -7 & 10 \\ 5 & -7 \end{bmatrix}$

(c) $A^{-1}B^{-1}=\begin{bmatrix} -7 & 10 \\ 5 & -7 \end{bmatrix}$ (d) $B^{-1}A^{-1}=\begin{bmatrix} 8 & -5 \\ 35 & -22 \end{bmatrix}$

(e) $(5A)^{-1}=\begin{bmatrix} 1 & -\frac{3}{5} \\ -\frac{3}{5} & \frac{2}{5} \end{bmatrix}$ (f) $(-4B)^{-1}=\begin{bmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ -1 & \frac{5}{4} \end{bmatrix}$

(g) $(ABC)^{-1}=\begin{bmatrix} -213 & 134 \\ 62 & -39 \end{bmatrix}$ (h) $(CBA)^{-1}=\begin{bmatrix} -38 & 69 \\ 27 & -49 \end{bmatrix}$

10. (a) $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}^{-1}=\dfrac{1}{7}\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$을 이용하면 $x_1=2$, $x_2=-3$이다.

(b) $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 5 & -2 \end{bmatrix}$를 이용하면 $x_1=-1$, $x_2=5$이다.

(c) $\begin{bmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$를 이용하면 $x_1 = 4,\ x_2 = 1$이다.

(d) $\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$를 이용하면 $x_1 = -3,\ x_2 = -3$이다.

(e) $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{11}\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$를 이용하면 $x_1 = -1,\ x_2 = -2$이다.

(f) $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$을 이용하면 $x_1 = 0,\ x_2 = 0$이다.

(g) $\begin{bmatrix} -1 & 3 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{7}\begin{bmatrix} -1 & -3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$을 이용하면 $x_1 = -\frac{23}{7},\ x_2 = \frac{4}{7}$이다.

(h) $\begin{bmatrix} 7 & -1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{11}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -7 \end{bmatrix}$을 이용하면 $x_1 = -\frac{3}{11},\ x_2 = -\frac{32}{11}$이다.

11. (a) $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 2 & -1 & 4 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -4 \\ -2 & -1 & 4 \\ -1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$을 이용하면 $x_1 = 5,\ x_2 = -7,\ x_3 = -4$이다.

(b) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 5 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -3 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$을 이용하면 $x_1 = 5,\ x_2 = -11,\ x_3 = 5$이다.

(c) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & -1 \\ 2 & -1 & 4 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} -13 & 3 & 4 \\ -10 & 2 & 3 \\ 4 & -1 & -1 \end{bmatrix}$을 이용하면 $x_1 =-6,\ x_2 = -5,\ x_3 = 3$이다.

(d) $\begin{bmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ -3 & 0 & 2 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{25}\begin{bmatrix} 4 & -6 & -3 \\ 3 & 8 & 4 \\ 6 & -9 & 8 \end{bmatrix}$을 이용하면 $x_1 = -\frac{21}{5},\ x_2 = \frac{28}{5},\ x_3 = \frac{6}{5}$이다.

(e) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{8}\begin{bmatrix} -3 & -6 & 5 \\ 5 & 2 & -3 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$을 이용하면 $x_1 = 1,\ x_2 = -1,\ x_3 = 3$이다.

(f) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{8}\begin{bmatrix} 3 & 5 & -6 \\ -1 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & 4 \end{bmatrix}$를 이용하면 $x_1 = 0,\ x_2 = -2,\ x_3 = 4$이다.

(g) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 4 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{13}\begin{bmatrix} 18 & -7 & 11 & -12 \\ -1 & 4 & -10 & 5 \\ -7 & 2 & -5 & 9 \\ 10 & -1 & 9 & -11 \end{bmatrix}$을 이용하면

$x_1 = 1,\ x_2 = 2,\ x_3 = 0,\ x_4 = 1$이다.

(h) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 & -1 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{10}\begin{bmatrix} -5 & 5 & 6 & 2 \\ -5 & 0 & 5 & 5 \\ 5 & 0 & -3 & -1 \\ 5 & -5 & -2 & -4 \end{bmatrix}$를 이용하면

$x_1 = -2,\ x_2 =-1,\ x_3 = 1,\ x_4 = 0$이다.

Chapter 03 벡터(Vectors)

3.1절 $\mathbb{R}^n$ 의 벡터

1. (a) $\overrightarrow{AB}=\begin{bmatrix}3\\-3\end{bmatrix}$, $\overrightarrow{BA}=\begin{bmatrix}-3\\3\end{bmatrix}$ (b) $\overrightarrow{AB}=\begin{bmatrix}4\\10\end{bmatrix}$, $\overrightarrow{BA}=\begin{bmatrix}-4\\-10\end{bmatrix}$

(c) $\overrightarrow{AB}=\begin{bmatrix}7\\7\\4\end{bmatrix}$, $\overrightarrow{BA}=\begin{bmatrix}-7\\-7\\-4\end{bmatrix}$ (d) $\overrightarrow{AB}=\begin{bmatrix}-2\\1\\0\end{bmatrix}$, $\overrightarrow{BA}=\begin{bmatrix}2\\-1\\0\end{bmatrix}$

(e) $\overrightarrow{AB}=\begin{bmatrix}2\\0\\-1\end{bmatrix}$, $\overrightarrow{BA}=\begin{bmatrix}-2\\0\\1\end{bmatrix}$ (f) $\overrightarrow{AB}=\begin{bmatrix}-4\\-3\\2\end{bmatrix}$, $\overrightarrow{BA}=\begin{bmatrix}4\\3\\-2\end{bmatrix}$

(g) $\overrightarrow{AB}=\begin{bmatrix}-1\\-2\\1\\2\end{bmatrix}$, $\overrightarrow{BA}=\begin{bmatrix}1\\2\\-1\\-2\end{bmatrix}$ (h) $\overrightarrow{AB}=\begin{bmatrix}2\\1\\-2\\-1\end{bmatrix}$, $\overrightarrow{BA}=\begin{bmatrix}-2\\-1\\2\\1\end{bmatrix}$

2. (a) $\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}=\begin{bmatrix}1\\3\end{bmatrix}$ (b) $\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}=\begin{bmatrix}5\\-5\end{bmatrix}$

(c) $7\boldsymbol{u}=\begin{bmatrix}21\\-7\end{bmatrix}$ (d) $-2\boldsymbol{v}=\begin{bmatrix}4\\-8\end{bmatrix}$

(e) $2\boldsymbol{u}+3\boldsymbol{v}=\begin{bmatrix}0\\10\end{bmatrix}$ (f) $3\boldsymbol{u}-4\boldsymbol{v}=\begin{bmatrix}17\\-19\end{bmatrix}$

(g) $-4\boldsymbol{u}+5\boldsymbol{v}=\begin{bmatrix}-22\\24\end{bmatrix}$ (h) $-5\boldsymbol{u}-6\boldsymbol{v}=\begin{bmatrix}-3\\-19\end{bmatrix}$

3. 엄밀한 증명을 위해서는 중간과정을 자세히 기술해야 하며 증명의 핵심 부분은 다음과 같다.

(a) $\boldsymbol{u}+(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w})=\begin{bmatrix}u_1+v_1+w_1\\u_2+v_2+w_2\\\vdots\\u_n+v_n+w_n\end{bmatrix}=(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})+\boldsymbol{w}$

(b) $k(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})=\begin{bmatrix}ku_1+kv_1\\ku_2+kv_2\\\vdots\\ku_n+kv_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}ku_1\\ku_2\\\vdots\\ku_n\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}kv_1\\kv_2\\\vdots\\kv_n\end{bmatrix}=k\boldsymbol{u}+k\boldsymbol{v}$

(c) $(k+l)\boldsymbol{u}=\begin{bmatrix}(k+l)u_1\\(k+l)u_2\\\vdots\\(k+l)u_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}ku_1\\ku_2\\\vdots\\ku_n\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}lu_1\\lu_2\\\vdots\\lu_n\end{bmatrix}=k\boldsymbol{u}+l\boldsymbol{u}$

(d) $(kl)\boldsymbol{u}=\begin{bmatrix}(kl)u_1\\(kl)u_2\\\vdots\\(kl)u_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}k(lu_1)\\k(lu_2)\\\vdots\\k(lu_n)\end{bmatrix}=k(l\boldsymbol{u})$

4. (a) $\|\boldsymbol{a}\| = 3$ (b) $\|\boldsymbol{b}\| = 3$
(c) $\|\boldsymbol{c}\| = \sqrt{26}$ (d) $\|\boldsymbol{d}\| = \sqrt{8}$
(e) $\|\boldsymbol{u}\| = \sqrt{5}$ (f) $\|\boldsymbol{v}\| = \sqrt{\pi^2 + \pi^4}$
(g) $\|\boldsymbol{w}\| = \sqrt{30}$ (h) $\|\boldsymbol{x}\| = \sqrt{p^2 + q^2 + r^2 + s^2}$

5. (a) $\boldsymbol{a}$와 같은 방향의 단위벡터는 $\frac{1}{2}\begin{bmatrix}2\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$이고 $\boldsymbol{a}$와 반대 방향의 단위벡터는 $-\frac{1}{2}\begin{bmatrix}2\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-1\\0\end{bmatrix}$이다.

(b) $\boldsymbol{b}$와 같은 방향의 단위벡터는 $\frac{1}{2}\begin{bmatrix}0\\-2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\-1\end{bmatrix}$이고 $\boldsymbol{b}$와 반대 방향의 단위벡터는 $-\frac{1}{2}\begin{bmatrix}0\\-2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$이다.

(c) $\boldsymbol{c}$와 같은 방향의 단위벡터는 $\frac{1}{\sqrt{29}}\begin{bmatrix}-2\\-3\\-4\end{bmatrix}$이고 $\boldsymbol{c}$와 반대 방향의 단위벡터는 $-\frac{1}{\sqrt{29}}\begin{bmatrix}-2\\-3\\-4\end{bmatrix}$이다.

(d) $\boldsymbol{d}$와 같은 방향의 단위벡터는 $\frac{1}{\sqrt{29}}\begin{bmatrix}4\\3\\2\end{bmatrix}$이고 $\boldsymbol{d}$와 반대 방향의 단위벡터는 $-\frac{1}{\sqrt{29}}\begin{bmatrix}4\\3\\2\end{bmatrix}$이다.

(e) $\boldsymbol{u}$와 같은 방향의 단위벡터는 $\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1\\0\\\sqrt{3}\end{bmatrix}$이고 $\boldsymbol{u}$와 반대 방향의 단위벡터는 $-\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1\\0\\\sqrt{3}\end{bmatrix}$이다.

(f) $\boldsymbol{v}$와 같은 방향의 단위벡터는 $\frac{1}{\sqrt{11}}\begin{bmatrix}-\sqrt{6}\\0\\-\sqrt{5}\end{bmatrix}$이고 $\boldsymbol{v}$와 반대 방향의 단위벡터는 $-\frac{1}{\sqrt{11}}\begin{bmatrix}-\sqrt{6}\\0\\-\sqrt{5}\end{bmatrix}$이다.

(g) $\boldsymbol{w}$와 같은 방향의 단위벡터는 $\frac{1}{\sqrt{10}}\begin{bmatrix}0\\3\\0\\1\end{bmatrix}$이고 $\boldsymbol{w}$와 반대 방향의 단위벡터는 $-\frac{1}{\sqrt{10}}\begin{bmatrix}0\\3\\0\\1\end{bmatrix}$이다.

(h) $\boldsymbol{x}$와 같은 방향의 단위벡터는 $\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$이고 $\boldsymbol{x}$와 반대방향의 단위벡터는 $-\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$이다.

6. (a) $\boldsymbol{a} = 7\boldsymbol{e}_1$
(b) $\boldsymbol{b} = -4\boldsymbol{e}_2$
(c) $\boldsymbol{c} = -2\boldsymbol{e}_1 - 3\boldsymbol{e}_2$
(d) $\boldsymbol{d} = 4\boldsymbol{e}_1 - 3\boldsymbol{e}_2$
(e) $\boldsymbol{u} = 4\boldsymbol{i} + \sqrt{2}\,\boldsymbol{k}$
(f) $\boldsymbol{v} = -\boldsymbol{i} - 2\boldsymbol{j} - \sqrt{3}\,\boldsymbol{k}$
(g) $\boldsymbol{w} = 4\boldsymbol{e}_3 + \boldsymbol{e}_4$
(h) $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{e}_1 - 2\boldsymbol{e}_2 + 2\boldsymbol{e}_3 - \boldsymbol{e}_4$

7. (a) $\|\boldsymbol{u}\| = \sqrt{14}$
(b) $\|\boldsymbol{v}\| = \sqrt{18}$
(c) $\|\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}\| = \sqrt{42}$
(d) $\|\boldsymbol{u}\| + \|\boldsymbol{v}\| = \sqrt{14} + \sqrt{18}$
(e) $\|\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}\| = \sqrt{22}$
(f) $\|\boldsymbol{u}\| - \|\boldsymbol{v}\| = \sqrt{14} - \sqrt{18}$
(g) $\|5\boldsymbol{u}\| = 5\sqrt{14}$
(h) $\|-6\boldsymbol{v}\| = 6\sqrt{18}$

8. (a) 유클리드 거리는 $\sqrt{18}$ 이고, 맨해튼 거리는 6이다.
(b) 유클리드 거리는 $\sqrt{32}$ 이고, 맨해튼 거리는 8이다.
(c) 유클리드 거리는 $\sqrt{10}$ 이고, 맨해튼 거리는 4이다.
(d) 유클리드 거리는 $\sqrt{136}$ 이고, 맨해튼 거리는 16이다.
(e) 유클리드 거리는 $\sqrt{8}$ 이고, 맨해튼 거리는 4이다.
(f) 유클리드 거리는 $\sqrt{5}$ 이고, 맨해튼 거리는 3이다.
(g) 유클리드 거리는 $\sqrt{22}$ 이고, 맨해튼 거리는 8이다.
(h) 유클리드 거리는 $\sqrt{21}$ 이고, 맨해튼 거리는 7이다.

9. (a) 거짓
(b) 참
(c) 참
(d) 참
(e) 참
(f) 거짓
(g) 거짓
(h) 거짓

3.2절 벡터의 내적

1. (a) $\boldsymbol{u}^T \cdot \boldsymbol{v} = 0 + 0 = 0$
(b) $\boldsymbol{u}^T \cdot \boldsymbol{v} = -15 - 2 = -17$
(c) $\boldsymbol{u}^T \cdot \boldsymbol{v} = 9 + 4 = 13$
(d) $\boldsymbol{u}^T \cdot \boldsymbol{v} = -9 - 4 = -13$
(e) $\boldsymbol{u}^T \cdot \boldsymbol{v} = 0 + 0 + 0 = 0$
(f) $\boldsymbol{u}^T \cdot \boldsymbol{v} = 18 - 2 - 10 = 6$
(g) $\boldsymbol{u}^T \cdot \boldsymbol{v} = 0 + 0 + 0 + 0 = 0$
(h) $\boldsymbol{u}^T \cdot \boldsymbol{v} = -1 - 4 - 4 - 1 = -10$

2. $\boldsymbol{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{w} = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$이라 하자.

(a) $(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})^T \cdot \boldsymbol{w} = \begin{bmatrix} u_1+v_1 & u_2+v_2 & \cdots & u_n+v_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix}$

$$= (u_1+v_1)w_1 + (u_2+v_2) + \cdots + (u_n+v_n)w_n$$
$$= (u_1w_1+u_2w_2+\cdots+u_nw_n) + (v_1w_1+v_2w_2+\cdots+v_nw_n)$$
$$= \boldsymbol{u}^T \cdot \boldsymbol{w} + \boldsymbol{v}^T \cdot \boldsymbol{w}$$

(b) $k(\boldsymbol{u}^T \cdot \boldsymbol{v}) = k(u_1v_1+u_2v_2+\cdots+u_nv_n)$

$$= (ku_1)v_1 + (ku_2)v_2 + \cdots + (ku_n)v_n = (k\boldsymbol{u}^T) \cdot \boldsymbol{v}$$

이고

$k(\boldsymbol{u}^T \cdot \boldsymbol{v}) = k(u_1v_1+u_2v_2+\cdots+u_nv_n)$

$$= u_1(kv_1) + u_2(kv_2) + \cdots + u_n(kv_n) = \boldsymbol{u}^T(k\boldsymbol{v})$$

이다. 따라서 $k(\boldsymbol{u}^T \cdot \boldsymbol{v}) = (k\boldsymbol{u}^T) \cdot \boldsymbol{v} = \boldsymbol{u}^T \cdot (k\boldsymbol{v})$ 이다.

3. (a) $\boldsymbol{u}^T \cdot \boldsymbol{v} = \|\boldsymbol{u}\|\|\boldsymbol{v}\|\cos\theta = 4\cos\frac{\pi}{6} = 2\sqrt{3}$

(b) $\boldsymbol{u}^T \cdot \boldsymbol{v} = \|\boldsymbol{u}\|\|\boldsymbol{v}\|\cos\theta = (\frac{3}{4})(\frac{4}{3})\cos\frac{2}{3}\pi = -\frac{1}{2}$

(c) $\boldsymbol{u}^T \cdot \boldsymbol{v} = \|\boldsymbol{u}\|\|\boldsymbol{v}\|\cos\theta = (2)(\frac{4}{5})\cos\frac{3}{4}\pi = -\frac{4\sqrt{2}}{5}$

(d) $\boldsymbol{u}^T \cdot \boldsymbol{v} = \|\boldsymbol{u}\|\|\boldsymbol{v}\|\cos\theta = (\frac{5}{3})(\frac{2}{5})\cos\pi = -\frac{2}{3}$

(e) $\cos\theta = \frac{\boldsymbol{u}^T \cdot \boldsymbol{v}}{\|\boldsymbol{u}\|\|\boldsymbol{v}\|} = \frac{1}{2\sqrt{5}}$ 이므로 두 벡터 $\boldsymbol{u}$ 와 $\boldsymbol{v}$ 의 사잇각은 $\theta = \cos^{-1}\frac{1}{2\sqrt{5}}$ 이다.

(f) $\cos\theta = \frac{\boldsymbol{u}^T \cdot \boldsymbol{v}}{\|\boldsymbol{u}\|\|\boldsymbol{v}\|} = \frac{-7}{3\sqrt{14}}$ 이므로 두 벡터 $\boldsymbol{u}$ 와 $\boldsymbol{v}$ 의 사잇각은

$\theta = \cos^{-1}(-\frac{7}{3\sqrt{14}})$ 이다.

(g) $\cos\theta = \frac{\boldsymbol{u}^T \cdot \boldsymbol{v}}{\|\boldsymbol{u}\|\|\boldsymbol{v}\|} = \frac{0}{\sqrt{5}\sqrt{54}} = 0$ 이므로 두 벡터 $\boldsymbol{u}$ 와 $\boldsymbol{v}$ 의 사잇각은

$\theta = \cos^{-1}0 = \frac{\pi}{2}$ 이다.

(h) $\cos\theta = \frac{\boldsymbol{u}^T \cdot \boldsymbol{v}}{\|\boldsymbol{u}\|\|\boldsymbol{v}\|} = \frac{-2}{\sqrt{2}\sqrt{2}} = -1$ 이므로 두 벡터 $\boldsymbol{u}$ 와 $\boldsymbol{v}$ 의 사잇각은

$\theta = \cos^{-1}(-1) = \pi$ 이다.

4. (a) $|\boldsymbol{u}^T \cdot \boldsymbol{v}| = 10$, $\|\boldsymbol{u}\|\|\boldsymbol{v}\| = 10$ (b) $|\boldsymbol{u}^T \cdot \boldsymbol{v}| = 26$, $\|\boldsymbol{u}\|\|\boldsymbol{v}\| = 26$

(c) $|\boldsymbol{u}^T \cdot \boldsymbol{v}| = 14$, $\|\boldsymbol{u}\|\|\boldsymbol{v}\| = 2\sqrt{85}$ (d) $|\boldsymbol{u}^T \cdot \boldsymbol{v}| = 10$, $\|\boldsymbol{u}\|\|\boldsymbol{v}\| = 10$

(e) $|\boldsymbol{u}^T \cdot \boldsymbol{v}| = 12$, $\|\boldsymbol{u}\|\|\boldsymbol{v}\| = 2\sqrt{42}$ (f) $|\boldsymbol{u}^T \cdot \boldsymbol{v}| = 0$, $\|\boldsymbol{u}\|\|\boldsymbol{v}\| = 3\sqrt{5}$

(g) $|\boldsymbol{u}^T \cdot \boldsymbol{v}| = 10$, $\|\boldsymbol{u}\|\|\boldsymbol{v}\| = 10$ (h) $|\boldsymbol{u}^T \cdot \boldsymbol{v}| = 20$, $\|\boldsymbol{u}\|\|\boldsymbol{v}\| = 20$

5. (a) $\|u + v\| = 0$, $\|u\| + \|v\| = 2\sqrt{10}$
   (b) $\|u + v\| = 3\sqrt{13}$, $\|u\| + \|v\| = 3\sqrt{13}$
   (c) $\|u + v\| = \sqrt{2}$, $\|u\| + \|v\| = \sqrt{10} + 2\sqrt{5}$
   (d) $\|u + v\| = 7$, $\|u\| + \|v\| = 7$
   (e) $\|u + v\| = \sqrt{5}$, $\|u\| + \|v\| = \sqrt{21} + 2\sqrt{2}$
   (f) $\|u + v\| = \sqrt{14}$, $\|u\| + \|v\| = 3 + \sqrt{5}$
   (g) $\|u + v\| = 3\sqrt{14}$, $\|u\| + \|v\| = 3\sqrt{14}$
   (h) $\|u + v\| = 0$, $\|u\| + \|v\| = 2\sqrt{2}$

6. (a) 두 벡터 u 와 v 는 직교하지 않는다. (b) 두 벡터 u 와 v 는 직교하지 않는다.
   (c) 두 벡터 u 와 v 는 직교한다. (d) 두 벡터 u 와 v 는 직교한다.
   (e) 두 벡터 u 와 v 는 직교한다. (f) 두 벡터 u 와 v 는 직교하지 않는다.
   (g) 두 벡터 u 와 v 는 직교한다. (h) 두 벡터 u 와 v 는 직교하지 않는다.

7. (a) $x = \frac{4}{3}$ (b) $x = -8$
   (c) $x = -1$ 또는 $x = 1$ (d) $x = -\sqrt{3}$ 또는 $x = \sqrt{3}$
   (e) $x = 0$ (f) $x = -3$ 또는 $x = 2$
   (g) $x = -\frac{1}{2}$ (h) $x = -1$ 또는 $x = \frac{3}{2}$

8. (a) $\mathrm{Comp_v u} = 1$, $\mathrm{Proj_v u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\mathrm{Comp_u v} = \sqrt{2}$, $\mathrm{Proj_u v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$
   (b) $\mathrm{Comp_v u} = -1$, $\mathrm{Proj_v u} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}$, $\mathrm{Comp_u v} = -\frac{3}{2}\sqrt{2}$, $\mathrm{Proj_u v} = -\frac{3}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$
   (c) $\mathrm{Comp_v u} = -2\sqrt{5}$, $\mathrm{Proj_v u} = \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \end{bmatrix}$, $\mathrm{Comp_u v} = -2\sqrt{5}$, $\mathrm{Proj_u v} = \begin{bmatrix} -4 \\ 2 \end{bmatrix}$
   (d) $\mathrm{Comp_v u} = \sqrt{5}$, $\mathrm{Proj_v u} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$, $\mathrm{Comp_u v} = 2\sqrt{5}$, $\mathrm{Proj_u v} = \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \end{bmatrix}$
   (e) $\mathrm{Comp_v u} = -1$, $\mathrm{Proj_v u} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}$, $\mathrm{Comp_u v} = -1$, $\mathrm{Proj_u v} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$
   (f) $\mathrm{Comp_u v} = 0$, $\mathrm{Proj_u v} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\mathrm{Comp_v u} = 0$, $\mathrm{Proj_v u} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$
   (g) $\mathrm{Comp_v u} = \frac{1}{\sqrt{19}}$, $\mathrm{Proj_v u} = \frac{1}{19}\begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\mathrm{Comp_u v} = \frac{1}{\sqrt{5}}$, $\mathrm{Proj_u v} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}$
   (h) $\mathrm{Proj_v u} = \frac{17}{\sqrt{26}}$, $\mathrm{Proj_v u} = \frac{17}{26}\begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ -3 \end{bmatrix}$, $\mathrm{Proj_u v} = \sqrt{17}$, $\mathrm{Proj_u v} = \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$

9. (a) 참 (b) 거짓

(c) 참　　(d) 거짓
(e) 참　　(f) 거짓
(g) 거짓　　(h) 거짓

3.3절 벡터의 외적

1. (a) $\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$, $\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{u}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$　　(b) $\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}=\begin{bmatrix}1\\-1\\1\end{bmatrix}$, $\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{u}=\begin{bmatrix}-1\\1\\-1\end{bmatrix}$

(c) $\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}=\begin{bmatrix}6\\-3\\2\end{bmatrix}$, $\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{u}=\begin{bmatrix}-6\\3\\-2\end{bmatrix}$　　(d) $\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}=\begin{bmatrix}-9\\3\\3\end{bmatrix}$, $\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{u}=\begin{bmatrix}9\\-3\\-3\end{bmatrix}$

(e) $\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}=\begin{bmatrix}3\\3\\3\end{bmatrix}$, $\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{u}=\begin{bmatrix}-3\\-3\\-3\end{bmatrix}$　　(f) $\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}=\begin{bmatrix}-8\\8\\-12\end{bmatrix}$, $\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{u}=\begin{bmatrix}8\\-8\\12\end{bmatrix}$

(g) $\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$, $\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{u}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$　　(h) $\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$, $\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{u}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$

2. (a) $(\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{j})\times\boldsymbol{k}=\boldsymbol{0}$　　(b) $(\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{j})\times\boldsymbol{j}=-\boldsymbol{i}$

(c) $(\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{j})\times\boldsymbol{i}=\boldsymbol{j}$　　(d) $(\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{k})\times\boldsymbol{j}=\boldsymbol{0}$

(e) $(\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{k})\times\boldsymbol{k}=-\boldsymbol{i}$　　(f) $(\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{k})\times\boldsymbol{i}=\boldsymbol{k}$

(g) $(\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{j})\times(\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{k})=\boldsymbol{j}$　　(h) $(\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{i})\times(\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{j})=\boldsymbol{k}$

3. (a) 0　　(b) 0

(c) 0　　(d) 0

(e) 0　　(f) 0

(g) 0　　(h) 0

4. $\boldsymbol{u}=\begin{bmatrix}u_1\\u_2\\u_3\end{bmatrix}$, $\boldsymbol{v}=\begin{bmatrix}v_1\\v_2\\v_3\end{bmatrix}$, $w=\begin{bmatrix}w_1\\w_2\\w_3\end{bmatrix}$라 하자.

(a) $\boldsymbol{u}\times(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w})=\begin{bmatrix}u_2(v_3+w_3)-u_3(v_2+w_2)\\u_3(v_1+w_1)-u_1(v_3+w_3)\\u_1(v_2+w_2)-u_2(v_1+w_1)\end{bmatrix}=\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}+\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{w}$

(b) $(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})\times\boldsymbol{w}=\begin{bmatrix}(u_2+v_2)w_3-(u_3+v_3)w_2\\(u_3+v_3)w_1-(u_1+v_1)w_3\\(u_1+v_1)w_2-(u_2+v_2)w_1\end{bmatrix}=\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{w}+\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{w}$

(c) $\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{0}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}=\boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{0}\times\boldsymbol{u}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}=0$

(d) $k(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v})=k\begin{bmatrix}u_2v_3-u_3v_2\\u_3v_1-u_1v_3\\u_1v_2-u_2v_1\end{bmatrix}=(k\boldsymbol{u})\times\boldsymbol{v}=\boldsymbol{u}\times(k\boldsymbol{v})$

5. (a) $\boldsymbol{u} \times (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w}) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\quad (\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}) \times \boldsymbol{w} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

(b) $\boldsymbol{u} \times (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w}) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$, $\quad (\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}) \times \boldsymbol{w} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

(c) $\boldsymbol{u} \times (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w}) = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\quad (\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}) \times \boldsymbol{w} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

(d) $\boldsymbol{u} \times (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w}) = \begin{bmatrix} -4 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$, $\quad (\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}) \times \boldsymbol{w} = \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix}$

(e) $\boldsymbol{u} \times (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w}) = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\quad (\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}) \times \boldsymbol{w} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}$

(f) $\boldsymbol{u} \times (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w}) = \begin{bmatrix} 4 \\ 10 \\ 8 \end{bmatrix}$, $\quad (\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}) \times \boldsymbol{w} = \begin{bmatrix} 3 \\ 10 \\ -9 \end{bmatrix}$

(g) $\boldsymbol{u} \times (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w}) = \begin{bmatrix} 9 \\ -1 \\ -17 \end{bmatrix}$, $\quad (\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}) \times \boldsymbol{w} = \begin{bmatrix} 15 \\ 8 \\ 10 \end{bmatrix}$

(h) $\boldsymbol{u} \times (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w}) = \begin{bmatrix} 26 \\ 44 \\ 53 \end{bmatrix}$, $\quad (\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}) \times \boldsymbol{w} = \begin{bmatrix} 18 \\ 72 \\ 36 \end{bmatrix}$

6. (a) 정의되지 않는다. (b) 정의된다.
(c) 정의되지 않는다. (d) 정의된다.
(e) 정의되지 않는다. (f) 정의된다.
(g) 정의되지 않는다. (h) 정의된다.

7. (a) $4\sqrt{14}$ (b) $6\sqrt{2}$
(c) $2\sqrt{14}$ (d) $\sqrt{67}$
(e) $\frac{1}{2}\sqrt{14}$ (f) $\sqrt{5}$
(g) $\frac{1}{2}\sqrt{38}$ (h) $\frac{5}{2}\sqrt{3}$

8. (a) 거짓 (b) 참
(c) 참 (d) 참
(e) 참 (f) 참
(g) 거짓 (h) 거짓

Chapter 04 벡터공간(Vector Spaces)

4.1절 벡터공간의 정의

1. [정의 1]의 (1)~(10)이 성립함을 보여서 벡터공간임을 증명한다.

2. $k=2, l=4, \boldsymbol{u}=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$이라 하면 $(kl)\boldsymbol{u}=8\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}24\\24\end{bmatrix}$이다. $l\boldsymbol{u}=4\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}12\\12\end{bmatrix}$이므로

$k(l\boldsymbol{u})=2\begin{bmatrix}12\\12\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}72\\72\end{bmatrix}$이다. 따라서 $(kl)\boldsymbol{u}\neq k(l\boldsymbol{u})$이므로 [정의 1]에 의하여 $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$는 벡터공간이 아니다.

3. $\boldsymbol{u}=\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}, \boldsymbol{v}=\begin{bmatrix}2\\2\\2\end{bmatrix}, \boldsymbol{w}=\begin{bmatrix}3\\3\\3\end{bmatrix}$이라 하면 $\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}=\begin{bmatrix}6\\6\\6\end{bmatrix}, \boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}=\begin{bmatrix}10\\10\\10\end{bmatrix}$이다. 따라서

$$(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})+\boldsymbol{w}=\begin{bmatrix}18\\18\\18\end{bmatrix},\ \boldsymbol{u}+(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w})=\begin{bmatrix}22\\22\\22\end{bmatrix}$$

이므로 $(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})+\boldsymbol{w}\neq \boldsymbol{u}+(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w})$이다. 그러므로 [정의 1]에 의하여 $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$는 벡터공간이 아니다.

4. (a) A는 $\mathbb{R}^3$의 부분공간이다. (b) B는 $\mathbb{R}^3$의 부분공간이 아니다.
(c) C는 $\mathbb{R}^3$의 부분공간이 아니다. (d) D는 $\mathbb{R}^3$의 부분공간이 아니다.
(e) E는 $\mathbb{R}^3$의 부분공간이 아니다. (f) F는 $\mathbb{R}^3$의 부분공간이다.
(g) G는 $\mathbb{R}^3$의 부분공간이 아니다. (h) H는 $\mathbb{R}^3$의 부분공간이다.

5. (a) T_1은 $M_{2\times2}$의 부분공간이다. (b) T_2는 $M_{2\times2}$의 부분공간이다.
(c) T_3는 $M_{2\times2}$의 부분공간이다. (d) T_4는 $M_{2\times2}$의 부분공간이 아니다.
(e) T_5는 $M_{2\times2}$의 부분공간이 아니다. (f) T_6는 $M_{2\times2}$의 부분공간이다.
(g) T_7은 $M_{2\times2}$의 부분공간이 아니다. (h) T_8은 $M_{2\times2}$의 부분공간이다.

6. (a) 참 (b) 거짓
(c) 참 (d) 참
(e) 참 (f) 참
(g) 참 (h) 거짓

4.2절 벡터공간의 생성과 차원

1.(a) $\boldsymbol{u}=3\boldsymbol{v}_1+2\boldsymbol{v}_2$ (b) $\boldsymbol{u}=2\boldsymbol{v}_1-\boldsymbol{v}_2$

(c) $u = 4v_1 + 2v_2$ (d) $u = \frac{1}{2}v_1 + 2v_2$

(e) $u = 4v_1 - 2v_2$ (f) $u = -5v_1 + 2v_2$

(g) $u = -2v_1 + 5v_2$ (h) $u = -v_1 - v_2$

2. (a) $w = v_1 - 2v_2 + v_3$ (b) $w = 3v_1 - 2v_2 - v_3$

(c) $w = \frac{1}{2}v_1 - 3v_2 + \frac{2}{5}v_3$ (d) $w = -3v_1 - v_2 + 2v_3$

(e) $w = 3v_1 - 4v_2 + 5v_3$ (f) $w = v_1 + v_2 - v_3$

(g) $w = v_1 - v_2 + v_3$ (h) $w = 2v_1 - 3v_2 - v_3$

3. (a) 생성집합이다. (b) 생성집합이 아니다.
(c) 생성집합이다. (d) 생성집합이다.
(e) 생성집합이 아니다. (f) 생성집합이다.
(g) 생성집합이 아니다. (h) 생성집합이다.

4. (a) 선형독립이다. (b) 선형종속이다.
(c) 선형독립이다. (d) 선형독립이다.
(e) 선형종속이다. (f) 선형독립이다.
(g) 선형종속이다. (h) 선형독립이다.

5. (a) 선형종속이다. (b) 선형종속이다.
(c) 선형독립이다. (d) 선형종속이다.
(e) 선형독립이다. (f) 선형종속이다.
(g) 선형종속이다. (h) 선형독립이다.

6. (a) 기저가 아니다. (b) 기저가 아니다.
(c) 기저이다. (d) 기저가 아니다.
(e) 기저가 아니다. (f) 기저이다.
(g) 기저가 아니다. (h) 기저가 아니다.

7. (a) $S = \{ \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ -2 \\ -3 \end{bmatrix} \}$은 W의 기저이고 $\mathrm{Dim}(\mathrm{W}) = 1$이다.

(b) $S = \{ \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \\ -3 \end{bmatrix} \}$은 W의 기저이고 $\mathrm{Dim}(\mathrm{W}) = 2$이다.

(c) $S = \{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -3 \end{bmatrix} \}$은 W의 기저이고 $\mathrm{Dim}(\mathrm{W}) = 3$이다.

(d) $S = \{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \}$은 W의 기저이고 $\mathrm{Dim}\,(\mathrm{W}) = 2$이다.

(e) $S = \{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \}$은 W의 기저이고 $\mathrm{Dim}\,(\mathrm{W}) = 2$이다.

(f) $S = \{ \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \}$은 W의 기저이고 $\mathrm{Dim}\,(\mathrm{W}) = 3$이다.

(g) $S = \{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \}$은 W의 기저이고 $\mathrm{Dim}\,(\mathrm{W}) = 3$이다.

(h) $S = \{ \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \}$은 W의 기저이고 $\mathrm{Dim}(\mathrm{W}) = 3$이다.

8. (a) 참 (b) 참
(c) 거짓 (d) 참
(e) 참 (f) 거짓
(g) 거짓 (h) 참

4.3절 행렬의 부분공간

1.(a) $Row\,(A) = \{ \alpha_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} : \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R} \}$,

$Col\,(A) = \{ \beta_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + \beta_2 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} : \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R} \}$

(b) $Row\,(B) = \{ \alpha_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix} : \alpha_1 \in \mathbb{R} \}$, $Col\,(B) = \{ \beta_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix} : \beta_1 \in \mathbb{R} \}$

(c) $Row\,(C) = \{ \alpha_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} : \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R} \}$,

$Col\,(C) = \{ \beta_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} + \beta_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} : \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R} \}$

(d) $Row\,(D) = \{ \alpha_1 \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} : \alpha_1 \in \mathbb{R} \}$, $Col\,(D) = \{ \beta_1 \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix} : \beta_1 \in \mathbb{R} \}$

(e) $Row\,(E) = \{ \alpha_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} : \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R} \}$,

$Col\,(E) = \{ \beta_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + \beta_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} : \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R} \}$

(f) $Row(F) = \{ \alpha_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} + \alpha_3 \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} : \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R} \}$,

$Col(F) = \{ \beta_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} + \beta_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix} + \beta_3 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} : \beta_1, \beta_2, \beta_3 \in \mathbb{R} \}$

(g) $Row(G) = \{ \alpha_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} : \alpha_1 \in \mathbb{R} \}$, $Col(G) = \{ \beta_1 [1] : \beta_1 \in \mathbb{R} \}$

(h) $Row(H) = \{ \alpha_1 [1] : \alpha_1 \in \mathbb{R} \}$, $Col(H) = \{ \beta_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} : \beta_1 \in \mathbb{R} \}$

2. (a) Rank (A) = 2 (b) Rank (B) = 1
(c) Rank (C) = 2 (d) Rank (D) = 1
(e) Rank (E) = 2 (f) Rank (F) = 3

3. (a) Nullity (A) = 0 (b) Nullity (B) = 1
(c) Nullity (C) = 1 (d) Nullity (D) = 1
(e) Nullity (E) = 2 (f) Nullity (F) = 1
(g) Nullity (G) = 2 (h) Nullity (H) = 0

4. (a) $\boldsymbol{v} \in Row(A)$ (b) $\boldsymbol{v} \notin Row(B)$
(c) $\boldsymbol{v} \in Row(C)$ (d) $\boldsymbol{v} \in Row(D)$
(e) $\boldsymbol{v} \in Row(E)$ (f) $\boldsymbol{v} \in Row(F)$
(g) $\boldsymbol{v} \notin Row(G)$ (h) $\boldsymbol{v} \notin Row(H)$

5. (a) $\boldsymbol{w} \in Col(A)$ (b) $\boldsymbol{w} \notin Col(B)$
(c) $\boldsymbol{w} \in Col(C)$ (d) $\boldsymbol{w} \notin Col(D)$
(e) $\boldsymbol{w} \in Col(E)$ (f) $\boldsymbol{w} \notin Col(F)$
(g) $\boldsymbol{w} \in Col(G)$ (h) $\boldsymbol{w} \in Col(H)$

6. (a) $Null(A) = \{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \}$ (b) $Null(B) = \{ t \begin{bmatrix} -5 \\ 1 \end{bmatrix} : t \in \mathbb{R} \}$

(c) $Null(C) = \{ t \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} : t \in \mathbb{R} \}$ (d) $Null(D) = \{ t \begin{bmatrix} -\frac{3}{2} \\ 1 \end{bmatrix} : t \in \mathbb{R} \}$

(e) $Null(E) = \{ \begin{bmatrix} -2s \\ s \\ t \\ 0 \end{bmatrix} : s, t \in \mathbb{R} \}$ (f) $Null(F) = \{ \begin{bmatrix} -7t \\ 0 \\ 4t \\ t \end{bmatrix} : t \in \mathbb{R} \}$

(g) $Null(G) = \{ \begin{bmatrix} -2s - 3t \\ s \\ t \end{bmatrix} : s, t \in \mathbb{R} \}$ (h) $Null(H) = \{ [0] \}$

7. (a) 거짓 (b) 거짓
(c) 참 (d) 참
(e) 참 (f) 참
(g) 거짓 (h) 거짓

4.4절 그람-슈미트 직교화

1. (a) 직교집합이다. (b) 직교집합이 아니다.
(c) 직교집합이 아니다. (d) 직교집합이다.
(e) 직교집합이 아니다. (f) 직교집합이 아니다.
(g) 직교집합이다. (h) 직교집합이 아니다.

2. (a) $a=-\frac{2}{3}$ (b) $a=6$
(c) $a=-\frac{11}{5}$ (d) $a=-\frac{16}{7}$
(e) $a=-\frac{14}{3}$ (f) $a=-6$
(g) $a=-3,\ a=1$ (h) $a=-2,\ a=-1$

3. (a) 정규직교집합이 아니다. (b) 정규직교집합이다.
(c) 정규직교집합이다. (d) 정규직교집합이다.
(e) 정규직교집합이 아니다. (f) 정규직교집합이 아니다.
(g) 정규직교집합이다. (h) 정규직교집합이 아니다.

4. (a) $\boldsymbol{v}_1=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{5}}\\ \frac{2}{\sqrt{5}}\end{bmatrix},\ \boldsymbol{v}_2=\begin{bmatrix}-\frac{2}{\sqrt{5}}\\ \frac{1}{\sqrt{5}}\end{bmatrix}$ (b) $\boldsymbol{v}_1=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix},\ \boldsymbol{v}_2=\begin{bmatrix}0\\-1\end{bmatrix}$

(c) $\boldsymbol{v}_1=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\0\\ \frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix},\ \boldsymbol{v}_2=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{6}}\\ \sqrt{\frac{2}{3}}\\ -\frac{1}{\sqrt{6}}\end{bmatrix}$ (d) $\boldsymbol{v}_1=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}}\\0\end{bmatrix},\ \boldsymbol{v}_2=\begin{bmatrix}-\frac{1}{\sqrt{6}}\\ \frac{1}{\sqrt{6}}\\ \sqrt{\frac{2}{3}}\end{bmatrix}$

(e) $\boldsymbol{v}_1=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix},\ \boldsymbol{v}_2=\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix},\ \boldsymbol{v}_3=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$ (f) $\boldsymbol{v}_1=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix},\ \boldsymbol{v}_2=\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix},\ \boldsymbol{v}_3=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$

(g) $\boldsymbol{v}_1=\begin{bmatrix}\frac{2}{\sqrt{5}}\\0\\ \frac{1}{\sqrt{5}}\end{bmatrix},\ \boldsymbol{v}_2=\begin{bmatrix}-\frac{1}{\sqrt{30}}\\ \sqrt{\frac{5}{6}}\\ \sqrt{\frac{2}{15}}\end{bmatrix},\ \boldsymbol{v}_3=\begin{bmatrix}-\frac{1}{\sqrt{6}}\\ -\frac{1}{\sqrt{6}}\\ \sqrt{\frac{2}{3}}\end{bmatrix}$

(h) $\boldsymbol{v}_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}, \ \boldsymbol{v}_2 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \sqrt{\frac{2}{3}} \end{bmatrix}, \ \boldsymbol{v}_3 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{bmatrix}$

5. (a) $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ (b) $\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \right\}$

(c) $\left\{ \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix} \right\}$ (d) $\left\{ \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$

(e) $\left\{ \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}$ (f) $\left\{ \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} \\ 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \\ 0 \\ \frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} \right\}$

(g) $\left\{ \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -\frac{4}{\sqrt{66}} \\ \frac{7}{\sqrt{66}} \\ \frac{1}{\sqrt{66}} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{11}} \\ -\frac{1}{\sqrt{11}} \\ \frac{3}{\sqrt{11}} \end{bmatrix} \right\}$ (h) $\left\{ \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -\frac{4}{\sqrt{105}} \\ \frac{8}{\sqrt{105}} \\ \frac{5}{\sqrt{105}} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{21}} \\ -\frac{2}{\sqrt{21}} \\ \frac{4}{\sqrt{21}} \end{bmatrix} \right\}$

6, (a) $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{3}{5}\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2 - \frac{4}{5}\boldsymbol{v}_3$ (b) $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{7}{5}\boldsymbol{v}_1 - \frac{1}{5}\boldsymbol{v}_3$

(c) $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = 3\boldsymbol{v}_1 + 2\boldsymbol{v}_2 + \boldsymbol{v}_3$ (d) $\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{13}{5}\boldsymbol{v}_1 + 2\boldsymbol{v}_2 - \frac{9}{5}\boldsymbol{v}_3$

(e) $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = -\frac{1}{5}\boldsymbol{v}_1 - \frac{7}{5}\boldsymbol{v}_3$ (f) $\begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = -\frac{2}{5}\boldsymbol{v}_1 + \frac{11}{5}\boldsymbol{v}_3$

(g) $\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix} = 3\boldsymbol{v}_1 - 2\boldsymbol{v}_2 + \boldsymbol{v}_3$ (h) $\begin{bmatrix} -3 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} = -\boldsymbol{v}_1 - 2\boldsymbol{v}_2 + 3\boldsymbol{v}_3$

7. (a) $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} - 3\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \frac{18}{5}\begin{bmatrix} \frac{3}{5} \\ \frac{4}{5} \end{bmatrix} + \frac{1}{5}\begin{bmatrix} -\frac{4}{5} \\ \frac{3}{5} \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \frac{18}{5}\begin{bmatrix} \frac{3}{5} \\ \frac{4}{5} \end{bmatrix} - \frac{1}{5}\begin{bmatrix} \frac{4}{5} \\ -\frac{3}{5} \end{bmatrix}$

(e) $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \frac{5}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} + \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$

(f) $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \frac{5}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} - \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$

(g) $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = (1 + \frac{3\sqrt{3}}{2}) \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} + (-\sqrt{3} + \frac{3}{2}) \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

(h) $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = (\sqrt{3} - \frac{3}{2}) \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix} + (1 + \frac{3\sqrt{3}}{2}) \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$

8. (a) 참 (b) 거짓
(c) 참 (d) 거짓
(e) 거짓 (f) 참
(g) 참 (h) 거짓

Chapter 05 선형변환(Linear Transformations)

5.1절 선형변환의 정의

1. (a) 선형변환이다. (b) 선형변환이 아니다.
(c) 선형변환이다. (d) 선형변환이 아니다.
(e) 선형변환이다. (f) 선형변환이 아니다.
(g) 선형변환이다. (h) 선형변환이 아니다.

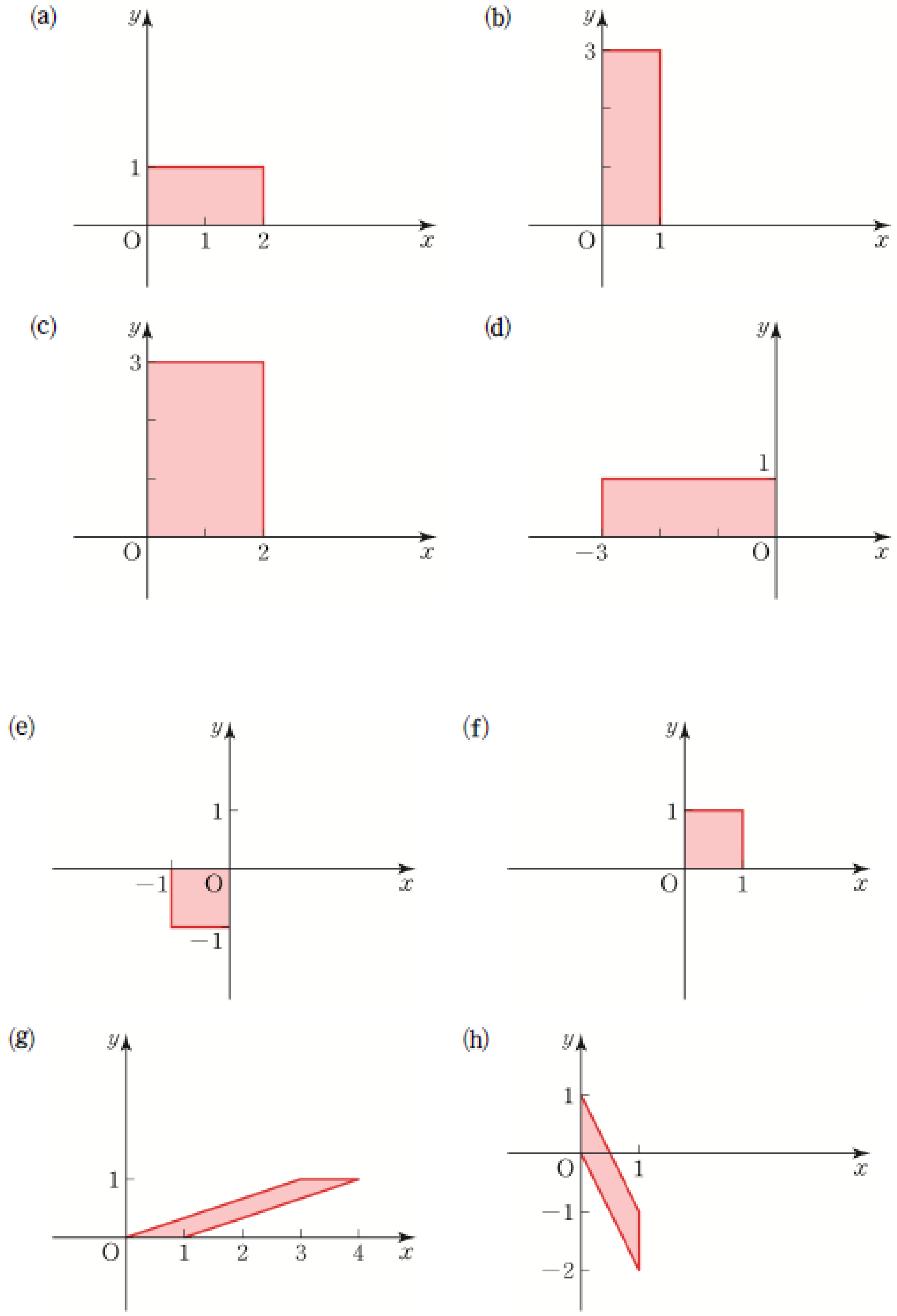
2. (a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ (b) $A = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$

(c) $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$ (d) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}$

(e) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ (f) $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

(g) $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ (h) $A = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 \end{bmatrix}$

3.



4. (a) 거짓 (b) 거짓
(c) 참 (d) 거짓
(e) 참 (f) 거짓

(g) 참 (h) 거짓

5.2절 선형변환의 성질

1. (a) 단사 선형변환이다. (b) 단사 선형변환이 아니다.
   (c) 단사 선형변환이다. (d) 단사 선형변환이 아니다.
   (e) 단사 선형변환이 아니다. (f) 단사 선형변환이 아니다.
   (g) 단사 선형변환이다. (h) 단사 선형변환이다.

2. (a) 전사 선형변환이다. (b) 전사 선형변환이 아니다.
   (c) 전사 선형변환이다. (d) 전사 선형변환이 아니다.
   (e) 전사 선형변환이다. (f) 전사 선형변환이 아니다.
   (g) 전사 선형변환이 아니다. (h) 전사 선형변환이 아니다.

3. (a) $Ker(L_1) = \{\mathbf{0}\}$, $\mathrm{Range}(L_1) = \{t\begin{bmatrix}3\\0\end{bmatrix} + s\begin{bmatrix}0\\2\end{bmatrix} : t, s \in \mathbb{R}\}$

   (b) $Ker(L_2) = \{t\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} : t \in \mathbb{R}\}$, $\mathrm{Range}(L_2) = \{s\begin{bmatrix}4\\0\end{bmatrix} : s \in \mathbb{R}\}$

   (c) $Ker(L_3) = \{\mathbf{0}\}$, $\mathrm{Range}(L_3) = \{t\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} + s\begin{bmatrix}-1\\2\end{bmatrix} : t, s \in \mathbb{R}\}$

   (d) $Ker(L_4) = \{t\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} : t \in \mathbb{R}\}$, $\mathrm{Range}(L_4) = \{s\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix} : s \in \mathbb{R}\}$

   (e) $Ker(L_5) = \{t\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix} : t \in \mathbb{R}\}$, $\mathrm{Range}(L_5) = \{s\begin{bmatrix}3\\0\end{bmatrix} + r\begin{bmatrix}0\\4\end{bmatrix} : s, r \in \mathbb{R}\}$

   (f) $Ker(L_6) = \{t\begin{bmatrix}-1\\1\\1\end{bmatrix} : t \in \mathbb{R}\}$, $\mathrm{Range}(L_6) = \{s\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} + r\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} : s, r \in \mathbb{R}\}$

   (g) $Ker(L_7) = \{\mathbf{0}\}$, $\mathrm{Range}(L_7) = \{t\begin{bmatrix}1\\0\\1\\1\end{bmatrix} + s\begin{bmatrix}0\\1\\-1\\1\end{bmatrix} : t, s \in \mathbb{R}\}$

   (h) $Ker(L_8) = \{\mathbf{0}\}$, $\mathrm{Range}(L_8) = \{t\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix} + s\begin{bmatrix}0\\0\\1\\0\end{bmatrix} : t, s \in \mathbb{R}\}$

4. (a) 단사 선형변환이다. (b) 단사 선형변환이 아니다.
   (c) 단사 선형변환이다. (d) 단사 선형변환이 아니다.
   (e) 단사 선형변환이 아니다. (f) 단사 선형변환이 아니다.
   (g) 단사 선형변환이다. (h) 단사 선형변환이다.

5. (a) 참 (b) 거짓
   (c) 거짓 (d) 거짓
   (e) 참 (f) 참

(g) 거짓 (h) 거짓

5.3절 선형변환의 합성과 역변환

1. (a) $(L_1 \circ L_2)\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x_1 - 4x_2 \\ 2x_2 \end{bmatrix}$

(b) $(L_1 \circ L_2)\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x_1 - 2x_2 \\ 2x_2 \end{bmatrix}$

(c) $(L_1 \circ L_2)\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 3x_2 + 2x_1 \\ -x_2 + x_1 \end{bmatrix}$

(d) $(L_1 \circ L_2)\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -x_1 + x_2 \\ 3x_1 + 2x_2 \end{bmatrix}$

(e) $(L_1 \circ L_2)\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2x_1 \\ 0 \\ 2x_1 \end{bmatrix}$

(f) $(L_1 \circ L_2)\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 3x_1 \\ 0 \\ -3x_1 \end{bmatrix}$

(g) $(L_1 \circ L_2)\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x_1 + 2x_2 \\ 3x_3 \\ 3x_3 + 2x_2 \end{bmatrix}$

2. (a) $\begin{bmatrix} 0 & 15 \\ 8 & 0 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -5 & 2 \\ 8 & 0 \end{bmatrix}$

(e) $\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -3 \\ 4 & -3 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$ (f) $\begin{bmatrix} 3 & -9 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$

(g) $\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -2 \\ 1 & -8 \end{bmatrix}$ (h) $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 2 & 3 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$

3. (a) $L_2 \circ L_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$, $L_1 \circ L_2 = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

(b) $L_2 \circ L_1 = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, $L_1 \circ L_2 = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

(c) $L_2 \circ L_1 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $L_1 \circ L_2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

(d) $L_2 \circ L_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, $L_1 \circ L_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

(e) $L_2 \circ L_1 = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{2}} & -\dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ -\dfrac{1}{\sqrt{2}} & -\dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$, $L_1 \circ L_2 = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{2}} & \dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ \dfrac{1}{\sqrt{2}} & -\dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$

(f) $L_2 \circ L_1 = \begin{bmatrix} -\dfrac{1}{\sqrt{2}} & -\dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ -\dfrac{1}{\sqrt{2}} & \dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$, $L_1 \circ L_2 = \begin{bmatrix} -\dfrac{1}{\sqrt{2}} & \dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ \dfrac{1}{\sqrt{2}} & \dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$

(g) $L_2 \circ L_1 = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$, $L_1 \circ L_2 = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

(h) $L_2 \circ L_1 = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ -9 & -3 \end{bmatrix}$, $L_1 \circ L_2 = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ -9 & -3 \end{bmatrix}$

4. (a) 역변환을 갖는다.
(b) 역변환을 갖지 않는다.
(c) 역변환을 갖지 않는다.
(d) 역변환을 갖는다.
(e) 역변환을 갖지 않는다.
(f) 역변환을 갖는다.
(g) 역변환을 갖는다.
(h) 역변환을 갖는다.

5. (a) $L_1^{-1}\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{5}x + \dfrac{1}{5}y \\ \dfrac{2}{5}x - \dfrac{3}{5}y \end{bmatrix}$
(b) $L_2^{-1}\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2x - 3y \\ -x + 2y \end{bmatrix}$

(c) $L_3^{-1}\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{4}x \\ \dfrac{1}{4}x - y \end{bmatrix}$
(d) $L_4^{-1}\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{2}x - \dfrac{3}{2}y \\ y \end{bmatrix}$

(e) $L_5^{-1}\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{2}x \\ \dfrac{1}{3}y \end{bmatrix}$
(f) $L_6^{-1}\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{3}y \\ -\dfrac{1}{2}x \end{bmatrix}$

(g) $L_7^{-1}\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{2}y + \dfrac{1}{2}z \\ -x + y + z \\ -\dfrac{1}{2}y + \dfrac{1}{2}z \end{bmatrix}$
(h) $L_8^{-1}\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -x + 3y - 3z \\ x - 2y + 2z \\ \dfrac{1}{2}x - y + \dfrac{3}{2}z \end{bmatrix}$

6. (a) 직선 $q = 0$
(b) 직선 $\dfrac{9}{5}p + \dfrac{1}{5}q + 2 = 0$
(c) 직선 $\dfrac{3}{13}p + \dfrac{2}{13}q + 3 = 0$
(d) 직선 $-\dfrac{5}{21}p + \dfrac{2}{21}q - 2 = 0$
(e) 평면 $\dfrac{4}{3}p + \dfrac{2}{3}q - \dfrac{5}{3}r + 1 = 0$
(f) 평면 $2p + 3r = 0$
(g) 평면 $-\dfrac{1}{3}p + \dfrac{7}{3}q + 2r - 4 = 0$
(h) 평면 $p - q + 2r + 1 = 0$

7. (a) 거짓
(b) 참
(c) 참
(d) 거짓

(e) 거짓 (f) 거짓
(g) 거짓 (h) 참

Chapter 06 고윳값과 고유벡터 (Eigenvalues and Eigenvectors)

6.1절 고윳값과 고유벡터의 정의

1. (a) 고유벡터가 아니다. (b) 고유벡터이다.
(c) 고유벡터가 아니다. (d) 고유벡터가 아니다.
(e) 고유벡터가 아니다. (f) 고유벡터이다.
(g) 고유벡터이다. (h) 고유벡터가 아니다.

2. (a) 고윳값은 $\lambda = 1$, $\lambda = 3$이다.

$\lambda = 1$에 대응하는 고유공간은 $\{ t \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} : t \in \mathbb{R} \}$이고, $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$은 $\lambda = 1$에 대응하는 고유벡터이다.

$\lambda = 3$에 대응하는 고유공간은 $\{ t \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} : t \in \mathbb{R} \}$이고 $v_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$은 $\lambda = 3$에 대응하는 고유벡터이다.

(b) 고윳값은 $\lambda = 0$, $\lambda = 2$이다.

$\lambda = 0$에 대응하는 고유공간은 $\{ t \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} : t \in \mathbb{R} \}$이고, $v_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$은 $\lambda = 0$에 대응하는 고유벡터이다.

$\lambda = 2$에 대응하는 고유공간은 $\{ t \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ 1 \end{bmatrix} : t \in \mathbb{R} \}$이고, $v_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$은 $\lambda = 2$에 대응하는 고유벡터이다.

(c) 고윳값은 $\lambda = -1$, $\lambda = 8$이다.

$\lambda = -1$에 대응하는 고유공간은 $\{ t \begin{bmatrix} -\frac{7}{2} \\ 1 \end{bmatrix} : t \in \mathbb{R} \}$이고, $v_1 = \begin{bmatrix} -7 \\ 2 \end{bmatrix}$는 $\lambda = -1$에 대응하는 고유벡터이다.

$\lambda = 8$에 대응하는 고유공간은 $\{ t \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} : t \in \mathbb{R} \}$이고, $v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$은 $\lambda = 8$에 대응하는 고유벡터이다.

(d) 고윳값은 $\lambda = -6$, $\lambda = 5$이다.

$\lambda = -6$에 대응하는 고유공간은 $\{ t \begin{bmatrix} -\frac{2}{9} \\ 1 \end{bmatrix} : t \in \mathbb{R} \}$이고, $v_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ 9 \end{bmatrix}$는 $\lambda = -6$에 대응하는 고유벡터이다.

$\lambda = 5$에 대응하는 고유공간은 $\{ t \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} : t \in \mathbb{R} \}$이고, $v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$은 $\lambda = 5$에 대응하는 고유

벡터이다.

(e) 고윳값은 $\lambda = -3$이다.

$\lambda = -3$에 대응하는 고유공간은 $\{ t\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} + s\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} : t, s \in \mathbb{R} \}$이다. 따라서 $v_1 = \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$과 $v_2 = \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$이 $\lambda = -3$에 대응하는 고유벡터이다.

(f) 고윳값은 $\lambda = \sqrt{2}$이다.

$\lambda = \sqrt{2}$에 대응하는 고유공간은$\{ t\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} + s\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} : t, s \in \mathbb{R} \}$이다. 따라서 $v_1 = \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$과 $v_2 = \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$이 $\lambda = \sqrt{2}$ 에 대응하는 고유벡터이다.

(g) 고윳값은 $\lambda = 2$이다.

$\lambda = 2$에 대응하는 고유공간은$\{ t\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} : t \in \mathbb{R} \}$이다. 따라서 $v = \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$은 $\lambda = 2$에 대응하는 고유벡터이다.

(h) 고윳값은 $\lambda = -2$이다.

고유공간은$\{ t\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix} : t \in \mathbb{R} \}$이다. 따라서 $v = \begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}$은 $\lambda = -2$에 대응하는 고유벡터이다.

3. (a) 고윳값은 $\lambda = 2, 0$이다.

$\lambda = 2$에 대응하는 고유벡터는 $v_1 = \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$이다.

$\lambda = 0$에 대응하는 고유벡터는 $v_2 = \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}$과 $v_3 = \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$이다.

(b) 고윳값은 $\lambda = 2, 0$이다.

$\lambda = 2$에 대응하는 고유벡터는 $v_1 = \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$이다.

$\lambda = 0$에 대응하는 고유벡터는 $v_2 = \begin{bmatrix}-1\\2\\0\end{bmatrix}$과 $v_3 = \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$이다.

(c) 고윳값은 $\lambda = 2, 0$이다.

$\lambda = 2$에 대응하는 고유벡터는 $v_1 = \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$이다.

$\lambda = 0$에 대응하는 고유벡터는 $v_2 = \begin{bmatrix}-1\\2\\0\end{bmatrix}$과 $v_3 = \begin{bmatrix}-3\\0\\2\end{bmatrix}$이다.

(d) 고윳값은 $\lambda = 3$이다.

$\lambda = 3$에 대응하는 고유벡터는 $v_1 = \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$, $v_2 = \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}$, $v_3 = \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$이다.

(e) 고윳값은 $\lambda = 1, 2, -3$이다.

$\lambda = 1$에 대응하는 고유벡터는 $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ 이다.

$\lambda = 2$에 대응하는 고유벡터는 $v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ 이다.

$\lambda = -3$에 대응하는 고유벡터는 $v_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ 이다.

(f) 고윳값은 $\lambda = -3,\ 2,\ 0$이다.

$\lambda = -3$에 대응하는 고유벡터는 $v_1 = \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ 이다.

$\lambda = 2$에 대응하는 고유벡터는 $v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ 이다.

$\lambda = 0$에 대응하는 고유벡터는 $v_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ 이다.

(g) 고윳값은 $\lambda = 1,\ 2$이다.

$\lambda = 1$에 대응하는 고유벡터는 $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$ 과 $v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ 이다.

$\lambda = 2$에 대응하는 고유벡터는 $v_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ 이다.

(h) 고윳값은 $\lambda = 1,\ 3$이다.

$\lambda = 1$에 대응하는 고유벡터는 $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ 이다.

$\lambda = 3$에 대응하는 고유벡터는 $v_2 = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$ 이다.

4. (a) $\lambda = 0$은 행렬 A 의 고윳값이 아니다. (b) $\lambda = 0$은 행렬 B의 고윳값이 아니다.
(c) $\lambda = 0$은 행렬 C 의 고윳값이 아니다. (d) $\lambda = 0$은 행렬 D 의 고윳값이다.
(e) $\lambda = 0$은 행렬 E의 고윳값이 아니다. (f) $\lambda = 0$은 행렬 F의 고윳값이 아니다.
(g) $\lambda = 0$은 행렬 G의 고윳값이다. (h) $\lambda = 0$은 행렬 H의 고윳값이 아니다.

5. (a) 27 (b) 0
(c) 1 (d) -7
(e) 8 (f) 7
(g) 0 (h) 0

6. (a) $A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$ (b) $A^2 = \begin{bmatrix} 5 & 8 \\ 8 & 13 \end{bmatrix}$

(c) $A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 16 \\ 0 & 9 \end{bmatrix}$ (d) $A^2 = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ -2 & 7 \end{bmatrix}$

(e) $B^3 = \begin{bmatrix} 5 & 8 \\ 8 & 13 \end{bmatrix}$ (f) $B^3 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 7 & 27 \end{bmatrix}$

(g) $B^3 = \begin{bmatrix} 15 & 20 \\ 20 & 35 \end{bmatrix}$ (h) $B^3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

7. (a) $A^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{9} & -\frac{1}{9} \end{bmatrix}$ (b) $B^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$

(c) $C^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ (d) $D^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{bmatrix}$

(e) $E^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$ (f) $F^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$

(g) $G^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{6} \end{bmatrix}$ (h) $H^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & \frac{2}{3} \\ 0 & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$

8. (a) 거짓 (b) 참
(c) 거짓 (d) 거짓
(e) 참 (f) 거짓
(g) 거짓 (h) 거짓

6.2절 닮음행렬과 대각화

1. 이 문제는 가역행렬 P에 따라서 다양한 답변이 가능하다. 학생들이 정한 가역행렬 P에 따라서 무수히 많은 정답이 가능하다.

2. (a) 닮음행렬이 아니다. (b) 닮음행렬이 아니다.
(c) 닮음행렬이 아니다. (d) 닮음행렬이 아니다.
(e) 닮음행렬이 아니다. (f) 닮음행렬이 아니다.
(g) 닮음행렬이 아니다. (h) 닮음행렬이 아니다.

3. (a) 대각화가능하지 않다. (b) 대각화가능하다.
(c) 대각화가능하다. (d) 대각화가능하지 않다.
(e) 대각화가능하지 않다. (f) 대각화가능하다.
(g) 대각화가능하다. (h) 대각화가능하다.

4. (a) $P=\begin{bmatrix}1&-2\\1&3\end{bmatrix}$이라 하면 $P^{-1}AP=\begin{bmatrix}3&0\\0&-2\end{bmatrix}$ 이다.

(b) $P=\begin{bmatrix}4&1\\1&0\end{bmatrix}$이라 하면 $P^{-1}BP=\begin{bmatrix}3&0\\0&2\end{bmatrix}$ 이다.

(c) $P=\begin{bmatrix}1&2\\1&1\end{bmatrix}$이라 하면 $P^{-1}CP=\begin{bmatrix}3&0\\0&1\end{bmatrix}$ 이다.

(d) $P=\begin{bmatrix}1&-1\\2&1\end{bmatrix}$이라 하면 $P^{-1}DP=\begin{bmatrix}-2&0\\0&1\end{bmatrix}$ 이다.

(e) $P=\begin{bmatrix}1&-1&0\\2&0&1\\3&1&0\end{bmatrix}$ 이라 하면 $P^{-1}EP=\begin{bmatrix}4&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$ 이다.

(f) $P=\begin{bmatrix}1&0&-1\\0&1&0\\1&0&1\end{bmatrix}$ 이라 하면 $P^{-1}FP=\begin{bmatrix}3&0&0\\0&3&0\\0&0&1\end{bmatrix}$ 이다.

(g) $P=\begin{bmatrix}1&0&-1\\1&0&1\\0&1&0\end{bmatrix}$ 이라 하면 $P^{-1}GP=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{bmatrix}$ 이다.

(h) 일차독립인 고유벡터가 2개뿐이라서 대각화가능하지 않다.

5. (a) $A^{10}=\begin{bmatrix}-19&20\\-20&21\end{bmatrix}$ (b) $A^{10}=\begin{bmatrix}1024&0\\1023&1\end{bmatrix}$

(c) $A^{10}=\begin{bmatrix}144&-55\\55&-21\end{bmatrix}$ (d) $A^{10}=\begin{bmatrix}34&55\\55&89\end{bmatrix}$

(e) $A^{10}=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}$ (f) $A^{10}=\begin{bmatrix}-1&1\\-2&2\end{bmatrix}$

(g) $A=\begin{bmatrix}512&0&512\\0&1&0\\512&0&512\end{bmatrix}$ (h) $A^{10}=\begin{bmatrix}16&0&16\\0&32&0\\16&0&16\end{bmatrix}$

6. (a) 참 (b) 거짓

(c) 거짓 (d) 거짓

(e) 거짓 (f) 거짓

(g) 거짓 (h) 참

6.3절 대칭행렬의 직교대각화

1. (a) 행렬 A의 고윳값은 $\lambda=3$, $\lambda=1$이고 $\lambda=3$에 대응하는 고유벡터는 $\boldsymbol{x}_1=\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}$, $\lambda=1$에 대응하는 고유벡터는 $\boldsymbol{x}_2=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$ 이다. 그리고 $\boldsymbol{x}_1^T\cdot\boldsymbol{x}_2=0$이다.

(b) 행렬 B의 고윳값은 $\lambda=4$, $\lambda=-2$이고 $\lambda=4$에 대응하는 고유벡터는 $\boldsymbol{x}_1=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$, $\lambda=-2$에 대응하는 고유벡터는 $\boldsymbol{x}_2=\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}$ 이다. 그리고 $\boldsymbol{x}_1^T\cdot\boldsymbol{x}_2=0$이다.

(c) 행렬 C의 고윳값은 $\lambda=-2-\sqrt{2}$, $\lambda=-2+\sqrt{2}$이고 $\lambda=-2-\sqrt{2}$에 대응하는 고유벡터는 $\boldsymbol{x}_1=\begin{bmatrix}1-\sqrt{2}\\1\end{bmatrix}$, $\lambda=-2+\sqrt{2}$에 대응하는 고유벡터는 $\boldsymbol{x}_2=\begin{bmatrix}1+\sqrt{2}\\1\end{bmatrix}$ 이다.

그리고 $\boldsymbol{x}_1^T \cdot \boldsymbol{x}_2 = 0$ 이다.

(d) 행렬 D의 고윳값은 $\lambda = 2+\sqrt{5}$, $\lambda = 2-\sqrt{5}$ 이고 $\lambda = 2+\sqrt{5}$ 에 대응하는 고유벡터는 $\boldsymbol{x}_1 = \begin{bmatrix} \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2} \\ 1 \end{bmatrix}$, $\lambda = 2-\sqrt{5}$ 에 대응하는 고유벡터는 $\boldsymbol{x}_2 = \begin{bmatrix} \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2} \\ 1 \end{bmatrix}$ 이다.

그리고 $\boldsymbol{x}_1^T \cdot \boldsymbol{x}_2 = 0$ 이다.

(e) 행렬 E의 고윳값은 $\lambda = 3$, $\lambda = 1$ 이고 $\lambda = 3$ 에 대응하는 고유벡터는 $\boldsymbol{x}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\lambda = 1$ 에 대응하는 고유벡터는 $\boldsymbol{x}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ 과 $\boldsymbol{x}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ 이다. 그리고 $\boldsymbol{x}_1^T \cdot \boldsymbol{x}_2 = 0$, $\boldsymbol{x}_1^T \cdot \boldsymbol{x}_3 = 0$ 이다.

(f) 행렬 F의 고윳값은 $\lambda = -2$, $\lambda = 2$, $\lambda = 1$ 이고 $\lambda = -2$ 에 대응하는 고유벡터는 $\boldsymbol{x}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\lambda = 2$ 에 대응하는 고유벡터는 $\boldsymbol{x}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\lambda = 1$ 에 대응하는 고유벡터는 $\boldsymbol{x}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ 이다. 그리고 $\boldsymbol{x}_1^T \cdot \boldsymbol{x}_2 = 0$, $\boldsymbol{x}_1^T \cdot \boldsymbol{x}_3 = 0$, $\boldsymbol{x}_2^T \cdot \boldsymbol{x}_3 = 0$ 이다.

(g) 행렬 G의 고윳값은 $\lambda = 2+\sqrt{5}$, $\lambda = 2-\sqrt{5}$, $\lambda = 2$ 이고 $\lambda = 2+\sqrt{5}$ 에 대응하는 고유벡터는 $\boldsymbol{x}_1 = \begin{bmatrix} \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\lambda = 2-\sqrt{5}$ 에 대응하는 고유벡터는 $\boldsymbol{x}_2 = \begin{bmatrix} \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\lambda = 2$ 에 대응하는 고유벡터는 $\boldsymbol{x}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ 이다. 그리고 $\boldsymbol{x}_1^T \cdot \boldsymbol{x}_2 = 0$, $\boldsymbol{x}_1^T \cdot \boldsymbol{x}_3 = 0$, $\boldsymbol{x}_2^T \cdot \boldsymbol{x}_3 = 0$ 이다.

(h) 행렬 H 의 고윳값은 $\lambda = \frac{1}{2}(3+\sqrt{5})$, $\lambda = \frac{1}{2}(3-\sqrt{5})$, $\lambda = 1$ 이고 $\lambda = \frac{1}{2}(3+\sqrt{5})$ 에 대응하는 고유벡터는 $\boldsymbol{x}_1 = \begin{bmatrix} \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\lambda = \frac{1}{2}(3-\sqrt{5})$ 에 대응하는 고유벡터는 $\boldsymbol{x}_2 = \begin{bmatrix} \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\lambda = 1$ 에 대응하는 고유벡터는 $\boldsymbol{x}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ 이다. 그리고

$\boldsymbol{x}_1^T \cdot \boldsymbol{x}_2 = 0$,
$\boldsymbol{x}_1^T \cdot \boldsymbol{x}_3 = 0$, $\boldsymbol{x}_2^T \cdot \boldsymbol{x}_3 = 0$ 이다.

2. [증명] A가 n차 직교행렬이므로

$$I_n = A^{-1}A = A^TA$$

이다. $1 \le i, j \le n$에 대하여

$$(I_n)_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{if } i = j \\ 0 & \text{if} i \neq j \end{cases}$$

이고

$$(A^T A)_{ij} = (A \text{의 } i \text{번째 열})\ (A \text{의 } j \text{번째 열})$$

이므로

$$(A \text{의 } i \text{번째 열})\ (A \text{의 } j \text{번째 열}) = \begin{cases} 1 & \text{if } i = j \\ 0 & \text{if} i \neq j \end{cases}$$

이다. 그러므로 행렬 A의 열벡터들의 집합은 정규직교집합이다.

3. (a) $A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ (b) $B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

(c) $C^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$ (d) $D^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{3} & -\frac{3}{5} \end{bmatrix}$

(e) $E^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$ (f) $F^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

(g) $G^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}$ (h) $H^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ 0 & -0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$

4. (a) $Q = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$, $D = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$이라 하면 $Q^{-1}AQ = D$이다.

(b) $Q = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$, $D = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$이라 하면 $Q^{-1}AQ = D$이다.

(c) $Q = \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ -\frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}$, $D = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$이라 하면 $Q^{-1}AQ = D$이다.

(d) $Q = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}$, $D = \begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$라 하면 $Q^{-1}AQ = D$이다.

(e) $Q = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$, $D = \begin{bmatrix} -7 & 0 \\ 0 & 7 \end{bmatrix}$ 이라 하면 $Q^{-1}AQ = D$이다.

(f) $Q = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$, $D = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & -\sqrt{2} \end{bmatrix}$ 라 하면 $Q^{-1}AQ = D$이다.

(g) $Q = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{bmatrix}$, $D = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ 이라 하면 $Q^{-1}AQ = D$이다.

(h) $Q = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $D = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ 라 하면 $Q^{-1}AQ = D$이다.

5. (a) 참 (b) 거짓
(c) 참 (d) 거짓
(e) 참 (f) 참
(g) 거짓 (h) 거짓

6.4절 특잇값 분해

1. (a) $\sigma_1 = \sqrt{10}$, $\sigma_2 = 0$ (b) $\sigma_1 = \sqrt{29}$, $\sigma_2 = 0$
(c) $\sigma_1 = \sqrt{6}$, $\sigma_2 = 0$, $\sigma_3 = 0$ (d) $\sigma_1 = \sqrt{13}$, $\sigma_2 = 0$, $\sigma_3 = 0$
(e) $\sigma_1 = \sqrt{8+\sqrt{5}}$, $\sigma_2 = \sqrt{8-\sqrt{5}}$, $\sigma_3 = 0$
(f) $\sigma_1 = \sqrt{4+\sqrt{10}}$, $\sigma_2 = \sqrt{4-\sqrt{10}}$
(g) $\sigma_1 = \sqrt{\frac{1}{2}(7+\sqrt{13})}$, $\sigma_2 = \sqrt{\frac{1}{2}(7-\sqrt{13})}$, $\sigma_3 = 1$
(h) $\sigma_1 = 2$, $\sigma_2 = 1$, $\sigma_3 = 0$

2. (a) $8+\sqrt{10}$, $8-\sqrt{10}$, 0 (b) $8+\sqrt{10}$, $8-\sqrt{10}$
(c) 3, 2 (d) 3, 2, 0
(e) $\frac{1}{2}(15+\sqrt{29})$, $\frac{1}{2}(15-\sqrt{29})$ (f) $\frac{1}{2}(15+\sqrt{29})$, $\frac{1}{2}(15-\sqrt{29})$
(g) $\frac{5}{2}(3+\sqrt{5})$, $\frac{5}{2}(3-\sqrt{5})$ (h) $\frac{5}{2}(3+\sqrt{5})$, $\frac{5}{2}(3-\sqrt{5})$

3. (a) $U = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, $\Sigma = \begin{bmatrix} \sqrt{10} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $V = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{10}} & -\frac{3}{\sqrt{10}} \\ \frac{3}{\sqrt{10}} & \frac{1}{\sqrt{10}} \end{bmatrix}$

(b) $U = \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{13}} & 0 & -\frac{3}{\sqrt{13}} \\ \frac{3}{\sqrt{13}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{13}} \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, $\Sigma = \begin{bmatrix} \sqrt{13} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $V = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

(c) $U = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}$, $\Sigma = \begin{bmatrix} \sqrt{5} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $V = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

(d) $U = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $\Sigma = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, $V = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

(e) $U = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}$, $\Sigma = \begin{bmatrix} \sqrt{130} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $V = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{26}} & -\frac{5}{\sqrt{26}} \\ \frac{5}{\sqrt{26}} & \frac{1}{\sqrt{26}} \end{bmatrix}$

(f) $U = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{10}} & \frac{3}{\sqrt{10}} \\ \frac{3}{\sqrt{10}} & \frac{1}{\sqrt{10}} \end{bmatrix}$, $\Sigma = \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $V = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{10}} & \frac{3}{\sqrt{10}} \\ \frac{3}{\sqrt{10}} & \frac{1}{\sqrt{10}} \end{bmatrix}$

(g) $U = [1]$, $\Sigma = [\ \sqrt{17} \ \ 0 \ \ 0 \ \ 0\ ]$, $V = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{\sqrt{17}} & 0 & -\frac{4}{\sqrt{17}} & 0 \\ \frac{4}{\sqrt{17}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{17}} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

(h) $U = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{2}{\sqrt{13}} & -\frac{3}{\sqrt{13}} & 0 & 0 \\ \frac{3}{\sqrt{13}} & \frac{2}{\sqrt{13}} & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\Sigma = \begin{bmatrix} \sqrt{13} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $V = [1]$

4. λ가 0이 아닌 AA^T의 고윳값이면 적당한 $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$이 존재하여

$$A(A^T\boldsymbol{x}) = AA^T\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$$

이다. 위의 식의 양변의 좌측에 A^T를 곱하면

$$A^TA(A^T\boldsymbol{x}) = A^T(AA^T\boldsymbol{x}) = A^T(\lambda\boldsymbol{x}) = \lambda(A^T\boldsymbol{x})$$

이다. $A^T\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$라 하면 $\boldsymbol{y} \neq \boldsymbol{0}$이고 위의 식으로부터

$$A^TA\boldsymbol{y} = \lambda\boldsymbol{y}$$

이므로 λ는 A^TA의 고윳값이다.